BTS OPTICIEN-LUNETIER

MATHÉMATIQUES

Session 2024

Durée : 2 heures

Coefficient : 2

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé.

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il soit complet.

Le sujet comporte 8 pages, numérotées de 1/8 à 8/8.

<u>EXERCICE 1</u> (10 points)

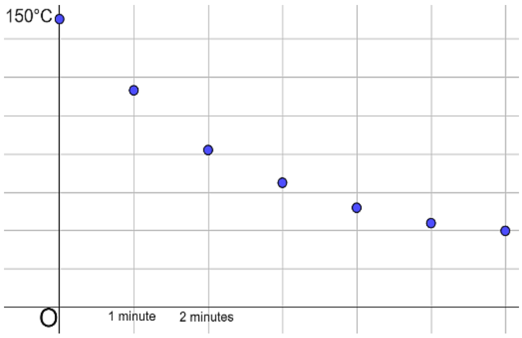
Pour fabriquer des montures, on chauffe un matériau à $150°\text{C}$ puis on le sort du four et on le laisse refroidir à température ambiante ($28°\text{C}$).

Les trois parties peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A. Étude d'une série statistique

Pour étudier le refroidissement du matériau, on a réalisé des relevés de température et réalisé un croquis.

Temps t (minutes)	0	1	2	3	4	5	6
Température y (°C)	150	113	82	65	52	44	40



1. Expliquer pourquoi un ajustement affine de y en t n'est pas pertinent.

2. On pose : $z = \ln(y - 28)$.
Recopier et compléter le tableau. Les valeurs de z seront arrondies au centième.

Temps t (minutes)	0	1	2	3	4	5	6
Température y (°C)	150	113	82	65	52	44	40
$z = \ln(y - 28)$	$4{,}80$	$4{,}44$					

3. On note r le coefficient de corrélation linéaire de la série $(t\,;z)$.
On sait que $r \simeq -0{,}999$.

Sur la base de cette information, répondre aux deux questions suivantes en justifiant.

a. La corrélation de la série $(t\,;z)$ est-elle bonne ?
b. Le nuage de points $(t\,;\,z)$ a-t-il une allure croissante ?

4. À l'aide de la calculatrice, donner l'équation de la droite de régression linéaire de z en t, selon la méthode des moindres carrés, sous la forme $z = at + b$.
Les coefficients a et b seront arrondis à 10^{-1}.

5. En déduire une expression de y en fonction de t sous la forme :

$$y = C\mathrm{e}^{-0,4t} + 28 ,$$

où C est une constante que l'on arrondira à l'unité.

Partie B. Équation différentielle

On considère l'équation différentielle

$$(E) : 5y' + 2y = 56 ,$$

où y est une fonction inconnue de la variable t, définie et dérivable sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$, et où y' est sa fonction dérivée.

1. Déterminer les solutions de l'équation différentielle

$$(E_0) : 5y' + 2y = 0 .$$

On fournit la formule suivante :

Équation différentielle	Solutions sur un intervalle I
$ay' + by = 0$	$f(t) = k\mathrm{e}^{-\frac{b}{a}t}$

2. Soit A un nombre réel. On considère la fonction constante g, définie par $g(t) = A$.
Déterminer A pour que la fonction g soit solution de l'équation différentielle (E).

3. En déduire les solutions de l'équation différentielle (E).

4. Déterminer la fonction f , solution de l'équation différentielle (E), qui vérifie la condition initiale $f(0) = 150$.

Partie C. Étude de fonction

On considère la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(t) = 122\mathrm{e}^{-0{,}4t} + 28\,.$$

On admet que la fonction f modélise l'évolution de la température du matériau au fil du temps : ainsi, $f(t)$ représente la température, en degrés Celsius, t minutes après la sortie du four.

1. Donner la limite de f en $+\infty$. Ce résultat est-il cohérent avec le contexte de l'exercice ?

2. On cherche à partir de quel instant la température du matériau devient inférieure à 50°C.

a. Montrer que cela revient à résoudre l'inéquation : $\mathrm{e}^{-0{,}4t} \leq \frac{11}{61}$.

b. Résoudre cette inéquation, puis, déterminer à partir de quel instant, exprimé en minutes et secondes, la température devient inférieure à $50°C$.

3. On considère la fonction F définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$F(t) = -305\mathrm{e}^{-0{,}4t} + 28t\,.$$

Vérifier que la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

4. Déterminer la température moyenne du matériau durant les 6 premières minutes qui suivent la sortie du four. Arrondir au dixième.

On fournit pour cela la formule suivante :

Valeur moyenne d'une fonction f sur l'intervalle $[a\,;\,b]$. $$M = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\,.$$

EXERCICE 2 (10 points)

Les quatre parties sont indépendantes.

Partie A. Probabilités conditionnelles

Le tableau ci-dessous décrit le stock de paires de lunettes d'un opticien.

	Verres Polarisés **L**	Verres Photochromiques **H**	Autre type de verre. **A**	Total
Modèle *CLASSIQUE* **C**	17,5 %	10,5 %	42 %	70 %
Modèle *SPORT* **S**	16,5 %	10,5 %	3 %	30 %
Total	34 %	21 %	45 %	100 %

Le tableau ci-dessus permet ainsi de voir notamment que :

$70\ \%$ des paires de lunettes sont des modèles CLASSIQUE.
$3\ \%$ des paires de lunettes sont des modèles SPORT équipées d'un autre type de verre.
$21\ \%$ des paires de lunettes sont équipées de verres photochromiques.

On prélève au hasard une paire de lunettes. On considère les évènements suivants :

C : La paire de lunettes est un modèle CLASSIQUE.
S : La paire de lunettes est un modèle SPORT.
L : La paire de lunettes est équipée de verres polarisés.
H : La paire de lunettes est équipée de verres photochromiques.
A : La paire de lunettes est équipée d'un autre type de verre.

Les résultats seront arrondis, le cas échéant, au millième.

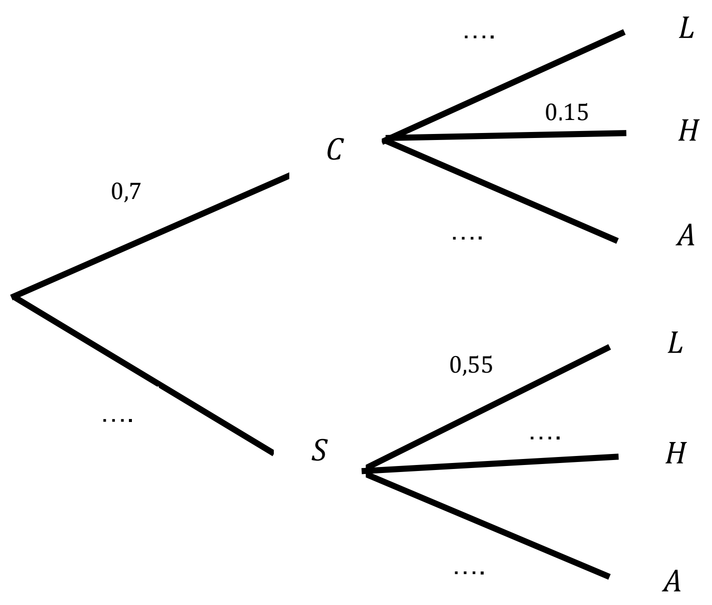
1. Donner la valeur de la probabilité $P(L \cap S)$.

2. Déterminer la probabilité $P(L \cup S)$.

3. Déterminer la valeur de la probabilité de L sachant S, notée $P_S(L)$.

4. Les évènements L et S sont-ils indépendants ? Justifier.

5. Recopier et compléter l'arbre suivant qui représente la situation décrite par le tableau.



Partie B. Loi binomiale

Parmi les clients de l'opticien, la proportion de retraités est égale à $62\ \%$.

Un jour donné, l'opticien accueille 90 clients. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de retraités parmi les 90 clients accueillis ce jour.

1. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale.
Donner ses paramètres ainsi que son espérance.

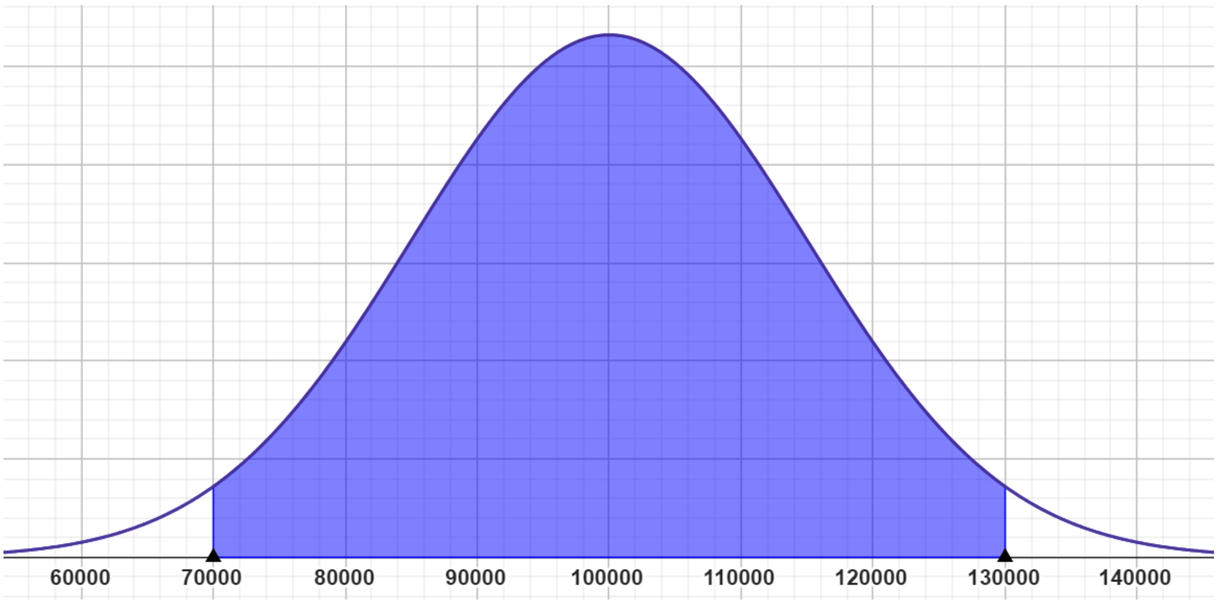
2. Donner la probabilité $P(X = 55)$. Arrondir au millième.

3. Quelle est la probabilité qu'au moins $50\ \%$ des clients accueillis ce jour soient des retraités ? Arrondir au millième.

Partie C. Loi normale

Le chiffre d'affaire d'un opticien en 2023 a été égal à $80\,000$ euros. Il espère que son chiffre d'affaire en 2024 sera supérieur.

Son chiffre d'affaire, en euros, estimé pour 2024, est donné par une variable aléatoire Z qui suit une loi normale dont la courbe de densité est représentée ci-dessous.



1. On note μ l'espérance de la variable aléatoire Z.
Déterminer graphiquement la valeur de μ.

2. On note σ l'écart-type de la variable aléatoire Z.
On sait que la zone grisée correspond à une probabilité égale à $0{,}95$.
Expliquer pourquoi on a : $\sigma \simeq 15\,000$.

3. Quelle est la probabilité que le chiffre d'affaire en 2024 soit supérieur que celui de 2023 ? Arrondir au millième.

4. Si, entre 2023 et 2024, son chiffre d'affaire augmente de $30\,\%$, l'opticien embauchera un nouvel employé.
Quelle est la probabilité que l'opticien embauche un nouvel employé ? Arrondir au millième.

Partie D. Test d'hypothèse

Afin de développer le commerce, une commune rurale décide de construire des parkings pour les commerçants dont la proportion de clients venant en voiture est comprise entre 50 % et 60 %. Lorsque la proportion est inférieure, le parking n'est pas nécessaire. Lorsque la proportion est supérieure, le commerçant devra obligatoirement s'installer en périphérie de la commune.

Un opticien affirme à la mairie de cette commune que $55\ \%$ de ses clients viennent en voiture.

Afin de contrôler cette affirmation, la mairie met en place un test bilatéral au seuil de $5\ \%$ sur un échantillon aléatoire de 130 clients.

On note F la variable aléatoire qui, à chaque échantillon aléatoire de 130 clients, associe la proportion de ceux qui viennent en voiture. On suppose que F suit une loi normale d'espérance p inconnue et d'écart-type $\sqrt{\frac{p(1-p)}{130}}$.

L'hypothèse nulle est H_0 : « $p = 0{,}55$ ».
L'hypothèse alternative est H_1 : « $p \neq 0{,}55$ ».

1. Justifier que, sous l'hypothèse nulle, la variable aléatoire F suit une loi normale d'espérance $0{,}55$ et d'écart-type $0{,}044$.

2. Déterminer, sous l'hypothèse nulle, le réel positif h tel que :

$$P(0{,}55 - h < F < 0{,}55 + h) = 0{,}95.$$

3. Sur un échantillon de 130 clients, la mairie a noté que 88 étaient venus en voiture. Que peut-on conclure ?

BTS OPTICIEN LUNETIER

MATHÉMATIQUES

SESSION 2024

Note : ce corrigé n'a pas de valeur officielle et n'est donné qu'à titre informatif sous la responsabilité de son auteur par Acuité.

Corrigé proposé par M. DESHAYES, professeur de mathématiques à

l'institut et campus d'optique de Bures-sur-Yvette.

EXERCICE 1

Partie A. Étude d'une série statistique

1. Un ajustement affine de y en t n'est pas pertinent car les points du graphique ne sont pas proches d'une droite.
2.

Temps t (minutes)	0	1	2	3	4	5	6
Température y (en °C)	150	113	82	65	52	44	40
$z = \ln(y - 28)$	4,80	4,44	3,99	3,61	3,18	2,77	2,48

a. La corrélation linéaire de la série $(t\,;z)$ est bonne car r ≈ - 1.

b. Le nuage de points $(t\,;z)$ n'a pas une allure croissante mais décroissante car $r < 0$

4. $z = -0{,}4\,t + 4{,}8$

5. $z = \ln(y - 28) = -0{,}4t + 4{,}8$

$y - 28 = e^{-0{,}4t + 4{,}8}$

$y = e^{-0{,}4t + 4{,}83} + 28$

$y = e^{-0{,}4t} \times e^{4{,}83} + 28$

y est de la forme $y = C\,e^{-0{,}4t} + 28$ avec $C = e^{4{,}8} \approx 122$

Partie B. Équation différentielle

1. Les solutions de l'équation différentielle (E_0) sont les fonctions f définies sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par $f(t) = k\mathrm{e}^{-\frac{2}{5}t} = k\,e^{-0{,}4t}$ où $k \in \mathbb{R}$

2.
- La fonction g est dérivable sur [0 ; +∞[et $g'(t) = 0$
- La fonction g est solution de l'équation différentielle (E) donc

  $5\,g'(t) + 2\,g(t) = 56$, pour tout t de $[0\,;+\infty[$

  $0 + 2\,c = 56$

  Donc $c = \dfrac{56}{2} = 28$

3. Les solutions de l'équation différentielle (E) sont les fonctions f définies sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par $f(t) = k\,e^{-0{,}4t} + g(t) = k\,e^{-0{,}4t} + 28$ où $k \in \mathbb{R}$

4. $f(0) = 150$

   $k\,e^{0} + 28 = 150$

   $k = 150 - 28 = 122$

   Conclusion : La fonction f recherchée est définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par :

   $f(t) = 122\,e^{-0{,}4t} + 28$

Partie C. Étude d'une fonction

1. La limite de f en +∞ est égale à 28. C'est cohérent avec le contexte de l'exercice car au bout d'un long moment, le matériau est à la température ambiante de 28°C.

2. a. $f(t) \leq 50$

   $122\,\mathrm{e}^{-0{,}4t} + 28 \leq 50$

   $122\,\mathrm{e}^{-0{,}4t} \leq 50 - 28$

   $\mathrm{e}^{-0{,}4t} \leq \dfrac{22}{122}$ et $\dfrac{22}{122} = \dfrac{11}{61}$

   donc la condition revient à résoudre l'inéquation : $\mathrm{e}^{-0{,}4t} \leq \dfrac{11}{61}$

b. $e^{-0,4t} \leq \frac{11}{61}$

$-0,4t \leq \ln(\frac{11}{61})$

$t \geq \frac{\ln(\frac{11}{61})}{-0,4}$

avec $\frac{\ln(\frac{11}{61})}{-0,4} \approx 4,282$

et $4,282$ minutes ≈ 4 minutes et $0,282 \times 60$ secondes ≈ 4 min et $16,92$ s

La température du matériau devient inférieure à 50°C à partir de 4 min et 17 s

3. $F(t) = -305e^{-0,4t} + 28t$

- Déterminons $F'(t)$: $F'(t) = -305 \times (-0,4)e^{-0,4t} + 28 = 122\, e^{-0,4t} + 28$
- On a bien $F'(t) = f(t)$, pour tout t de l'intervalle $[0\,;+\infty[$,

donc la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

4. $M = \frac{1}{6-0}\int_0^6 f(t)\,dt = \frac{1}{6}\,[F(t)]_0^6 = \frac{1}{6}\,(F(6) - F(0))$

$$M = \frac{-305e^{-2,4}+168-(-305e^{0}+0)}{6} = \frac{-305e^{-2,4}+473}{6} \approx 74,2$$

La température moyenne du matériau durant les 6 premières minutes qui suivent la sortie du four est d'environ $74,2$°C.

EXERCICE 2

Partie A. Probabilités conditionnelles

1. $P(L \cap S) = 0{,}165$
2. $P(L \cup S) = P(L) + P(S) - P(L \cap S) = 0{,}34 + 0{,}30 - 0{,}165 = 0{,}475$
3. $P_S(L) = \dfrac{P(L \cap S)}{P(S)} = \dfrac{0{,}165}{0{,}30} = 0{,}55$ (déjà placé dans l'arbre dans la question 5)
4. $P_S(L) = 0{,}55$ est différent de $P(L) = 0{,}34$ donc les évènements L et S ne sont pas indépendants.

   Ou car : $P(L) \times P(S) = 0{,}34 \times 0{,}30 = 0{,}102 \neq P(L \cap S)$

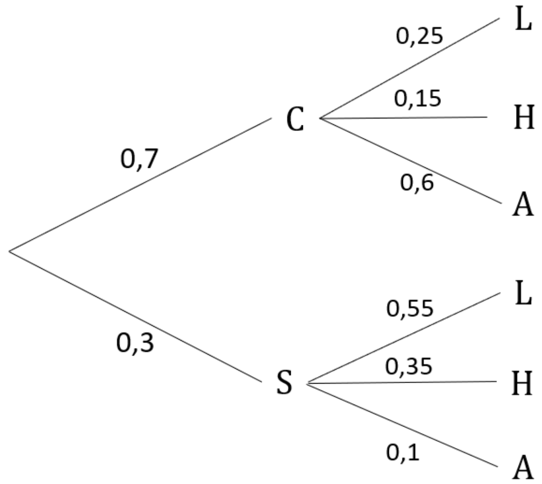
5. Déterminons les probabilités conditionnelles :

$P_C(L) = \dfrac{P(L \cap C)}{P(C)} = \dfrac{0{,}175}{0{,}70} = \dfrac{17{,}5}{70} = 0{,}25$

$P_C(H) = \dfrac{P(H \cap C)}{P(C)} = \dfrac{10{,}5}{70} = 0{,}15$ (déjà placé dans l'arbre)

$P_C(A) = \dfrac{P(A \cap C)}{P(C)} = \dfrac{42}{70} = 0{,}6$ puis $P_S(H) = \dfrac{10{,}5}{30} = 0{,}35$ et $P_S(A) = \dfrac{3}{30} = 0{,}1$

L'arbre complet :



Partie B. Loi binomiale

1. La variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n = 90$ et $p = 0{,}62$

   Son espérance est : $E(X) = np = 90 \times 0{,}62 = 55{,}8$

2. $P(X = 55) \approx 0{,}085$

3. 50% des 90 clients correspond à 45 clients,

   et la probabilité qu'il y ait au moins 45 clients retraités est :

   $P(X \geq 45) = 1 - P(X \leq 44) \approx 1 - 0{,}008 \approx 0{,}992$

   (ou directement avec la calculatrice NumWorks)

Partie C. Loi normale

1. $\mu = 100\,000$ (C'est l'abscisse du maximum de la courbe)

2. $P(70000 \leq Z \leq 130000) = P(100000 - 30000 \leq Z \leq 100000 + 30000) = 0{,}95$
   Et on sait que : $P(100\,000 - 2\,\sigma \leq Z \leq 100\,000 + 2\,\sigma) \approx 0{,}95$
   On en déduit : $2\sigma \approx 30\,000$ et finalement $\sigma \approx \frac{30\,000}{2}$ donc $\sigma \approx 15\,000$

3. $P(Z \geq 80\,000) \approx 0{,}909$

4. Si le chiffre d'affaires de l'opticien augmente de 30%, il serait égal à :
   $80\,000 \times (1+\frac{30}{100}) = 104\,000$ euros.
   L'opticien embauche si son chiffre d'affaires est de 104 000 euros (ou plus).

   Et $P(Z \geq 104\,000) \approx 0{,}395$.
   La probabilité que l'opticien embauche un nouvel employé est donc d'environ $0{,}395$.

Partie D. Test d'hypothèse

1. Sous l'hypothèse nulle, la variable aléatoire F suit la loi normale d'espérance $p = 0{,}55$ et d'écart type $\sqrt{\frac{p\,(1-p)}{n}} = \sqrt{\frac{0{,}55(1-0{,}55)}{130}} \approx 0{,}044$

2. $h = 2 \times 0{,}044 \approx 0{,}088$

3.
- On a donc $P(0{,}55 - 0{,}088 \leq F \leq 0{,}55 + 0{,}088) = 0{,}95$

  donc $P(0{,}462 \leq F \leq 0{,}638) = 0{,}95$

- Énonçons la règle de décision de ce test :

On prend un échantillon de 130 clients et on calcule la fréquence f de clients qui sont venus en voiture. Si $f \in [\,0{,}462\,;\,0{,}638]$ alors on accepte H_0 Sinon on rejette H_0 au seuil de 5%

- Utilisation du test avec l'échantillon : $f = \frac{88}{130} \approx 0{,}677$

  $0{,}677 \notin [\,0{,}462\,;\,0{,}638]$ donc, au seuil de 5%, on rejette H_0.

  On peut donc conclure que, contrairement à ce que dit l'opticien, la proportion de ses clients qui viennent en voiture n'est pas égale à 55%.