FICHE – MÉTHODE

ALGÈBRE 1 – ALGÈBRE LINÉAIRE

I. ESPACES VECTORIELS

Comment prouver qu'un ensemble est un espace vectoriel ?

1. Utiliser la définition d'un espace vectoriel (cf cours) ;
2. chercher un espace vectoriel de référence (cf cours) qui contienne E et utiliser ensuite le point méthode suivant.

Comment prouver qu'un ensemble F est un sev de E ?

1. F est non vide (en pratique, contient 0_E) et est stable par combinaison linéaire : soient x et y éléments de F et λ un scalaire ; on montre que $x + \lambda y$ est un élément de F ;
2. F apparaît comme étant $\text{Vect}(x_1, \dots, x_p)$.
On a ainsi exhibé une famille génératrice de F, ce qui peut être utile pour la suite. Si de plus, la famille est libre, elle constitue une base de F ;
La famille finie $(x_1, \dots, x_p)$ apparaît naturellement après une description précise des vecteurs de F en isolant les variables qui interviennent dans cette description ;
3. F est l'intersection de sev de E ;
4. F est le noyau $\ker u$ ou l'image $\text{Im } u$ d'une application linéaire.
L'application linéaire u apparaît naturellement après une description précise des vecteurs de F.

Comment prouver qu'un espace vectoriel est de dimension finie ?

1. Exhiber une famille génératrice de cardinal fini de cet espace vectoriel ;
2. prouver que c'est un sous-espace vectoriel d'un espace de dimension finie.

Comment déterminer la dimension d'un espace vectoriel ?

1. Exhiber une base de l'espace vectoriel et compter le nombre de vecteurs de cette famille ;
2. construire un isomorphisme entre cet espace vectoriel et un espace vectoriel dont on connaît la dimension.

Comment montrer qu'un espace est de dimension infinie ?

1. Trouver une famille $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(x_0, \dots, x_n)$ est libre ;
2. trouver un sous-espace vectoriel de dimension infinie.

Comment montrer que deux sous-espaces vectoriels de dimensions finies sont égaux ?

Prouver qu'ils ont la même dimension et qu'un des espaces est inclus dans l'autre.

Ceci est valable également pour prouver qu'un sous-espace de E est égal à E : il suffit de prouver que sa dimension est égale à $\dim E$.

Comment prouver qu'une famille finie $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ est libre ?

Utiliser la caractérisation d'une famille libre. Rédaction type : « Soit $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille de scalaires tels que $\sum_{i=1}^n \alpha_i a_i = 0_E$. [...] *raisonnement...* » On déduit que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad \alpha_i = 0$ »

Comment prouver la liberté d'une famille de fonctions ou de polynômes ?

Une fois écrite une combinaison linéaire nulle $\sum_{k=1}^n \lambda_k f_k = 0$,

1. utiliser des valeurs particulières de la variable ;
2. utiliser des limites aux bornes de l'ensemble de définition ;

3. utiliser des relations de prépondérance au voisinage d'un certain point (souvent une borne) ;
4. utiliser la régularité ou l'absence de régularité (continuité, dérivabilité, classe $\mathcal{C}^p$) ;
5. dériver une ou plusieurs fois ;
6. examiner les degrés, les valuations, les racines, ou les pôles dans le cas de $E = \mathbb{K}[X]$ ou $\mathbb{K}(X)$; en particulier, une famille de polynômes étagée (ou échelonnée) en degrés ou en valuations est libre.

Comment construire une base d'un espace de dimension finie ?

1. Trouver une famille libre de E de n vecteurs.
Souvent, on complète une famille libre de E en lui adjoignant des vecteurs de E tout en préservant le caractère libre de la famille (théorème de la base incomplète) ;
2. trouver une famille génératrice de n vecteurs.
Souvent, à partir d'une famille génératrice de E, on retire tout vecteur qui est combinaison linéaire des autres jusqu'à obtenir une famille libre.

Comment montrer qu'une famille est une base d'un espace de dimension finie connue ?

1. Montrer que $(e_j)_{1 \leq j \leq p}$ est une famille libre de E et $p = \dim E$;
2. montrer que $(e_j)_{1 \leq j \leq p}$ est une famille génératrice de E et $p = \dim E$.

Comment déterminer le rang d'une famille de vecteurs ?

On cherche quelle est la dimension de l'espace engendré par ces vecteurs :

1. si ces vecteurs sont donnés par leurs coordonnées dans une base de E, utiliser la méthode du pivot de GAUSS ;
2. retirer un vecteur de la famille qui n'est pas cl des autres, jusqu'à ce que ce ne soit plus possible.
Le rang est le cardinal de la famille obtenue.

Comment prouver que deux ensembles F_1 et F_2 sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E ?

Vérifier d'abord si ce n'est pas annoncé dans le texte que F_1 et F_2 sont des sous-espaces vectoriels de E, l'inclusion $F_1 + F_2 \subset E$ est alors immédiate ;

1. montrer que tout vecteur x de E s'écrit de manière unique comme somme d'un vecteur de F_1 et d'un vecteur de F_2 . Pour ce faire, on peut utiliser deux méthodes selon le contexte :
 - on connaît la forme d'un vecteur x_1 de F_1 et d'un vecteur x_2 de F_2 tels que $x = x_1 + x_2$ grâce par exemple à des questions antérieures. Il reste alors uniquement à prouver l'unicité de l'écriture ; ce qu'on peut faire de manière classique, en supposant que $x = x_1 + x_2 = x'_1 + x'_2$ où $(x_i, x'_i) \in F_i^2$, $i = 1$ ou 2 , on réécrit ces relations sous la forme $x_1 - x'_1 = x'_2 - x_2$ et on exploite que ce vecteur est à la fois dans F_1 et dans F_2 ;
 - dans le cas contraire, on raisonne par analyse-synthèse : on suppose que x s'écrit sous la forme $x_1 + x_2$ avec $(x_1, x_2) \in F_1 \times F_2$ et on cherche une expression de x_1 (ou de x_2) en fonction de x en utilisant les définitions de F_1 et de F_2 . Si cette expression est définie de manière unique à partir de x , on a ainsi prouvé que l'écriture sous forme de somme est unique. Reste ensuite à vérifier que les expressions trouvées pour x_1 et x_2 conviennent, c'est-à-dire que $x_1 \in F_1$, $x_2 \in F_2$ et $x_1 + x_2 = x$.
2. montrer en deux temps que $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$, ou plus précisément que le seul vecteur appartenant à la fois à F_1 et F_2 est le vecteur nul ; puis, prouver qu'un vecteur x quelconque de E peut s'écrire comme somme d'un élément de F_1 et d'un élément de F_2 (analyse-synthèse) ;

3. En dimension finie, il suffit de vérifier l'une des conditions suivantes :

- $\dim F_1 + \dim F_2 = \dim E$ et $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$; $(x \in F_1 \cap F_2 \implies x = 0_E)$
- $\dim F_1 + \dim F_2 = \dim E$ et $F_1 + F_2 = E$; $(\forall x \in E, \exists (x_1, x_2) \in F_1 \times F_2, x = x_1 + x_2)$
- la réunion d'une certaine base de F_1 et d'une certaine base de F_2 est une base de E .

Comment trouver un supplémentaire d'un espace de dimension finie ?

Si $(f_i)_{1 \leq i \leq p}$ est une base de F , compléter cette famille libre de E en une base $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ de E ; l'espace vectoriel engendré par $(f_i)_{p+1 \leq i \leq n}$ est alors un supplémentaire de F .

II. APPLICATIONS LINÉAIRES

Comment montrer qu'une application f de E dans F est linéaire ?

1. Vérifier que $f(x + \lambda y) = f(x) + \lambda f(y)$ pour tous vecteurs x et y de E et tout scalaire λ .
Il est inutile de vérifier que $f(0_E) = 0_F$;

2. écrire f comme combinaison linéaire d'applications linéaires de référence.

Comment montrer qu'une application linéaire est injective ?

1. Prouver que $\ker f = \{0_E\}$ en prouvant que si x est un vecteur de $\ker f$ (cad $f(x) = 0_F$), alors $x = 0_E$;
2. trouver une base de E dont l'image par f est libre.

Comment prouver qu'une application f est un endomorphisme de E ?

Montrer que, pour tout vecteur x de E , $f(x) \in E$, puis que f est une application linéaire.

Comment prouver qu'une application f est un isomorphisme de E dans F ?

1. Montrer que f est linéaire et bijective;
2. montrer que f est linéaire et injective et surjective;
3. montrer que f est linéaire et exhiber une application g de F dans E telle que $f \circ g = \text{Id}_F$ et $g \circ f = \text{Id}_E$.
On peut alors affirmer que g est linéaire et que $g = f^{-1}$;
4. montrer que f est linéaire et trouver une base de E dont l'image par f est une base de F ;
5. **en dimension finie**, montrer que les espaces de départ et d'arrivée sont de même dimension, puis montrer que f est linéaire et, au choix, injective (le plus souvent) ou surjective.

Comment déterminer l'image d'une application linéaire lorsqu'on connaît une base de l'espace de départ ?

1. Connaissant la base $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq p}$ de E , $\text{Im } f$ est engendrée par $(f(e_i))_{1 \leq i \leq p}$;
2. comme il est souvent plus facile de déterminer le noyau d'une application linéaire que son image, on peut utiliser le théorème du rang pour déterminer $\dim \text{Im } f$, puis on cherche $\dim \text{Im } f$ vecteurs de $\text{Im } f$ linéairement indépendants pour avoir une base de $\text{Im } f$.

III. MATRICES

Comment calculer l'inverse d'une matrice ?

1. En inversant (résolvant) le système linéaire $AX = X'$, c'est-à-dire en exprimant les variables $x', y', \dots$ en fonction de $x, y, \dots$
2. Par la méthode du pivot : juxtaposer [resp. superposer] les matrices A et I_n et appliquer la méthode du pivot total (qui consiste à transformer A en la matrice I_n) sur les lignes [resp. colonnes] en effectuant les mêmes opérations sur I_n . A est inversible si on y parvient, auquel cas A^{-1} est la transformée de la matrice I_n par cette suite d'opérations.
Attention, on choisit son camp dès le départ : lignes ou colonnes, et on s'y tient. Pas question de mélanger les deux;
3. lorsqu'on connaît un polynôme annulateur de valuation nulle (i_e de terme constant non nul) :
$$P(A) = \sum_{j=0}^k a_j A^j = 0 \text{ avec } a_0 \neq 0, \text{ on en déduit que } A \text{ est inversible et que } A^{-1} = -\frac{1}{a_0} \sum_{k=1}^n a_k A^{k-1}.$$

Comment calculer les puissances d'une matrice ?

1. Lorsque A s'écrit : $A = aI_n + N$ avec N nilpotente d'ordre p , (c'est le cas des matrices triangulaires à diagonale constante) utiliser la formule du binôme : dans le développement, les termes correspondant à $k \geq p$ sont nuls;
2. lorsqu'on connaît un polynôme P annulateur de A : calculer le reste de la division euclidienne du polynôme X^n par le polynôme P en substituant à X les racines de P (éventuellement après dérivation) puis substituer ensuite A à X .
3. d'autres méthodes apparaîtront cette année...