BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR

SESSION 2024

Épreuve de mathématiques

GROUPEMENT B ***CODE : 24MATGRB3***

Durée : 2 heures

SPÉCIALITÉ	COEFFICIENT
Électrotechnique	2

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé.

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il soit complet.

Le sujet comporte 6 pages, numérotées de 1/6 à 6/6.

EXERCICE 1 (10 points)

On coule du béton pour faire une dalle. Au début, le béton est mou, puis, au fil du temps, il sèche, et devient plus résistant.

On note $f(t)$ la résistance du béton à l'instant t.
$f(t)$ est exprimée en mégapascal (MPa) et t désigne le nombre de jours de séchage.

Les trois parties peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A. Résolution d'une équation différentielle

On admet que la fonction f est solution de l'équation différentielle :

$$(E) : \ y' + 0{,}06y = 2{,}1 \ ,$$

où y est une fonction inconnue de la variable réelle t, définie et dérivable sur $[\,0\,;\,+\infty\,[$, et où y' est la dérivée de y.

1. Résoudre sur $[0\,;+\infty\,[$ l'équation différentielle :

$$(E_0) : \ y' + 0{,}06y = 0$$

On fournit la formule suivante :

Équation différentielle	Solutions sur un intervalle I
$y' + ay = 0$	$y(t) = k\mathrm{e}^{-a\,t}$

2. On considère la fonction constante g définie sur $[0\,;+\infty\,[$ par $g(t) = 35$.
Vérifier que la fonction g est solution de l'équation différentielle (E).

3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

4. À l'instant $t = 0$, on considère que la résistance du béton est nulle.
En déduire que la fonction f est définie sur $[0\,;+\infty\,[$ par : $f(t) = -35\mathrm{e}^{-0{,}06t} + 35$.

Partie B. Étude de fonction

On considère à nouveau la fonction f définie sur $[0\,;+\infty\,[$ par :

$$f(t) = -35\mathrm{e}^{-0{,}06t} + 35\,.$$

On rappelle que $f(t)$ désigne la résistance du béton, exprimée en mégapascal, à l'issue de t jours de séchage.

1. Quelle est la résistance du béton après 7 jours de séchage ? Après 72 heures ?
Arrondir au dixième.

2. On admet que la fonction f est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée. Vérifier que, pour tout réel t appartenant à $[0\,;+\infty\,[$, on a :

$$f'(t) = 2{,}1\mathrm{e}^{-0{,}06t}\,.$$

3. Déterminer le signe de $f'(t)$ sur $[0\,;+\infty[$ et en déduire le sens de variations de la fonction f sur $[0\,;\,+\infty[$.

4. Déterminer la limite de $f(t)$ lorsque t tend vers l'infini.
Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

5. Le fabricant du béton affirme que la résistance après 28 jours de séchage correspond à 80% de la résistance finale.

Cette affirmation est-elle juste ?

6. On considère la fonction F définie sur $[0\,;+\infty\,[$ par $F(t)\;=\;\left(\frac{1750}{3}\right)\mathrm{e}^{-0{,}06t}\;+35t$.
Montrer que la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

7. Déterminer une valeur approchée au dixième de la valeur moyenne de la résistance du béton sur les 28 premiers jours.

On fournit la formule suivante :

La valeur moyenne M d'une fonction h sur l'intervalle $[a\,;b]$ est définie par : $$M = \frac{1}{b-a}\int_a^b h(t)\mathrm{d}t\;.$$

Partie C. Algorithme

On note N le nombre entier correspondant au nombre minimal de jours de séchage permettant d'obtenir une résistance au moins égale à 21 MPa.

1. Recopier l'algorithme ci-dessous et compléter les lignes **3** et **4**.

Ligne 1	$t \leftarrow 0$
Ligne 2	$R \leftarrow 0$
Ligne 3	Tant que ……………
Ligne 4	$t \leftarrow$ ……….
Ligne 5	$R \leftarrow -35\mathrm{e}^{-0{,}06t}\;+35$
Ligne 6	Fin Tant que

2. Donner la valeur de N. Expliquer la démarche suivie.

EXERCICE 2 (10 points)

Un formulaire sur les séries de Fourier est placé à la fin de l'exercice.

On étudie le fonctionnement d'un filtre.

La tension en entrée du filtre est une fonction E pour laquelle on possède les informations suivantes :

- E est une fonction périodique de période $T = 20$.
- $E(t) = \begin{cases} 12 \text{ si } t \in [0; 10[\\ 0 \text{ si } t \in [10; 20[\end{cases}$.

1. On note ω la pulsation de la fonction E .
Vérifier que $\omega = \frac{\pi}{10}$.

2. Représenter la courbe de la fonction E sur votre copie en respectant les consignes suivantes :

- Échelle des abscisses : 2 cm pour représenter l'intervalle allant de $t = 0$ à $t = 10$.
- Échelle des ordonnées : 1 cm pour représenter l'intervalle allant de $E = 0$ à $E = 2$.
- La représentation est effectuée pour $t \in [-30 ; 30]$.

3. Déterminer la valeur moyenne a_0 de E.

4. On rappelle que la valeur efficace de E , notée E_{eff} est donnée par :

$$(E_{\text{eff}})^2 = \frac{1}{T}\int_0^T \left(E(t)\right)^2 \text{dt}.$$

Montrer que $E_{\text{eff}} = 6\sqrt{2}$.

5. Démontrer que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a $a_n = 0$.

6. On admet que, pour tout entier naturel n, on a :

$$b_n = \frac{12}{n\pi}\left(1 - \cos(n\pi)\right).$$

Montrer que, lorsque n est pair, on a $b_n = 0$.

7. Recopier et compléter le tableau ci-dessous. Les valeurs seront arrondies à $0{,}01$.

n	1	2	3	4	5	6	7
a_n	0	0	0	0	0	0	0
b_n							

8. On considère la grandeur E_7 , définie par :

$$(E_7)^2 = (a_0)^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{7}((a_k)^2 + (b_k)^2)\,.$$

Commenter l'affirmation suivante :
« E_7 représente une approximation de E_{eff} avec moins de 5 % d'erreur ».

FORMULAIRE sur les séries de Fourier

f est une fonction périodique de période T et de pulsation $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

Développement en série de Fourier de la fonction f :

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)).$$

$$s_n(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)).$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{dt}.$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)\mathrm{dt} \qquad (n \geq 1).$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)\mathrm{dt} \qquad (n \geq 1).$$

La valeur efficace du signal f est notée f_{eff} . Elle est donnée par :

$$(f_{\mathrm{eff}})^2 = \frac{1}{T}\int_0^T (f(t))^2\mathrm{dt}$$

➔ Lorsque la fonction f est paire, on a :

$$a_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(n\omega t)\mathrm{dt} \qquad (n \geq 1).$$

BTS Industriels

Studyrama.com

Session 2024

Épreuve : **Mathématiques Groupe B3**

Durée de l'épreuve : 2 heures

PROPOSITION DE CORRIGÉ

Exercice 1

Partie A

1. a) La solution générale de (E_0) est : $\boldsymbol{y(t) = k\, e^{-0,06\,t}}$, où k est un réel quelconque.

b) On a $g'(t) + 0,8\, g(t) = 0 + 0,06*35 =$ ~~2,1 donc = 2,~~donc $g(t) = 35$ est une solution particulière de (E).

c) La solution générale de (E) est alors : $\underline{\boldsymbol{y(t) = k\, e^{-0,06\,t} + 35}}$

2. On veut trouver $f(t) = k\, e^{-0,06\,t} + 35$ telle que $f(0) = 0$ i.e. $k + 35 = 0$ d'où $k = -35$ et $\underline{\boldsymbol{f(t) = -35e^{-0,06\,t} + 35}}$ est la fonction qui satisfait à la condition initiale du problème.

Partie B

1. a) $f(7) \approx \underline{12}$ donc la résistance du béton au bout de 7 jours de séchage est d'environ <u>12 MPa</u>.

$f(3) \approx \underline{5,8}$ donc la résistance du béton au bout de 3 jours, soit 72h de séchage est d'environ <u>5,8 MPa</u> .

2. On a $f'(t) = -35*(-0,06)\, e^{-0,06\,t} = 2,1\, e^{-0,06\,t}$

3. $f'(t) > 0$, **donc f est strictement croissante sur [0 ; + ∞[.**

4. Comme $\lim\limits_{t \to +\infty} -0,06\,t = -\infty$, alors par composition $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-0,06\,t} = 0$, et on a

$\boldsymbol{\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 35}$ peut s'interpréter comme si **à terme**, la résistance du béton sera de <u>35 MPa.</u>

5. Comme f (28) ≈ 28,5 et 28,5 /35 ≈ 81,4% alors le fabricant du béton qui affirme que la résistance après 28 jours de séchage correspond à 80% de la résistance finale ne peut être accusé de mentir.

6. On a F ' (t) = (1750/3) * (-0,06) e $^{-0,06t}$ + 35 = - 35 e $^{-0,06t}$ + 35 = f (t), ce qui prouve que

F est une primitive de f sur [0 ; + ∞[.

7. On a :

$M = \frac{1}{28}\int_0^{28} f(t)dt = \frac{1}{28}(F(28) - F(0)) \approx$ **18MPa** à 0,1 près

ce qui nous donne une valeur moyenne de la résistance du béton sur les 28 premiers jours de **18MPa.**

Partie C

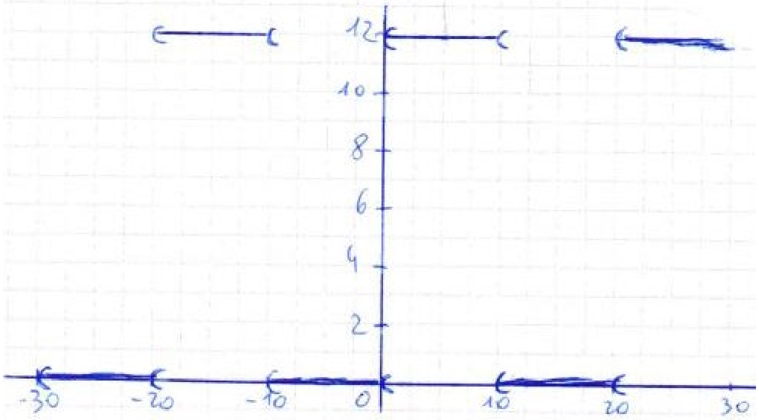
1.
Ligne 1 t←0
Ligne 2 R←0
Ligne 3 Tant que R < 21
Ligne 4 t ← t + 1
Ligne 5 R← −35e−0,06t +35
Ligne 6 Fin Tant que

2. En tabulant les valeurs de la fonction f, on a f(15) ≈ 20,8 < 21 et f(16) ≈ 21,6 > 21 donc N = 16 : c'est le nombre minimal de jours de séchage permettant d'obtenir une résistance au moins égale à 21 MPa.

Exercice 2 :

1. On calcule la pulsation : $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{20} = \frac{\pi}{10}$

2. On représente la fonction E sur l'intervalle [-30 ;30] :



3. On calcule la valeur moyenne a_0 de E :

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T E(t)dt = \frac{1}{20}\int_0^{10} 12dt + \frac{1}{20}\int_{10}^{20} 0dt = \frac{1}{20}[12t]_0^{10} = \frac{12\times 10}{20} = 6$$

4. On calcule d'abord le carré de la valeur efficace de E :

$$\left(E_{eff}\right)^2 = \frac{1}{20}\int_0^{10} 12^2 dt = \frac{1}{20}[144t]_0^{10} = \frac{144\times 10}{20} = 72$$

Alors : $E_{eff} = \sqrt{72} = \sqrt{36\times 2} = 6\sqrt{2}$

5. On utilise la formule donnant les coefficients a_n pour $n \geq 1$:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T E(t)\cos(n\omega t)dt = \frac{2}{20}\int_0^{10} 12\cos\left(n\frac{\pi}{10}t\right)dt + \frac{1}{20}\int_{10}^{20} 0dt$$

Ainsi : $a_n = \frac{2}{20}\left[\frac{12\sin\left(n\frac{\pi}{10}t\right)}{n\frac{\pi}{10}}\right]_0^{10} = \frac{12}{n\pi}(\sin(n\pi) - \sin(0)) = \frac{12}{n\pi}(0\text{-}0) = 0$

6. Lorsque n est pair, on a : $\cos(n\pi) = 1$, alors :

$$b_n = \frac{12}{n\pi}(1-1) = 0$$

7. On obtient à la calculatrice le tableau de valeurs suivant :

n	1	2	3	4	5	6	7
a_n	0	0	0	0	0	0	0
b_n	7,64	0	2,55	0	1,53	0	1,09

8. On calcule d'abord la valeur approchée du carré de la grandeur E_7 :

$$(E_7)^2 \approx 6^2 + \frac{1}{2}(7{,}64^2 + 2{,}55^2 + 1{,}53^2 + 1{,}09^2) \approx 70{,}2$$

Alors l'erreur commise en approchant E_{eff} par E_7 est :

$$\frac{E_{eff} - E_7}{E_{eff}} \approx \frac{6\sqrt{2} - \sqrt{70{,}2}}{6\sqrt{2}} \approx 0{,}025 \approx 2{,}5\ \%$$

L'affirmation proposée est donc VRAIE.