Brevet de Technicien Supérieur
Groupement D1

MATHÉMATIQUES

SESSION 2024

Durée : 2 heures

SPÉCIALITÉS	COEFFICIENTS
ANALYSES DE BIOLOGIE MÉDICALE	1
BIO ANALYSES ET CONTRÔLES	2
BIOTECHNOLOGIES	1
EUROPLASTICS ET COMPOSITES	1,5
BIOQUALITÉ	2

Moyens de calculs autorisés :

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé.

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.
L'annexe est à rendre avec la copie.

Exercice n°1 (10 points)

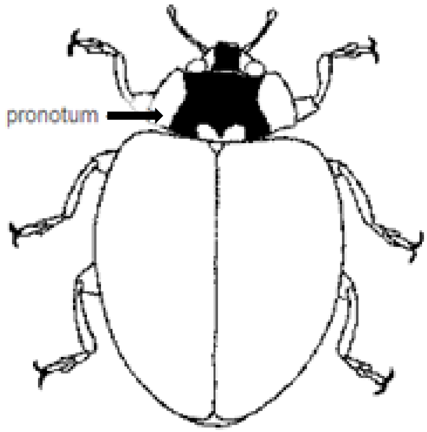
Les questions 1) à 5) de cet exercice peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.
Les probabilités seront arrondies à 10^{-3}.

De par la diversité des coccinelles, on peut utiliser deux critères pour reconnaître certaines espèces de coccinelles :

- la taille de la coccinelle ;

- le type de pronotum (le pronotum est la face dorsale d'une partie du thorax de la coccinelle : voir dessin ci-contre).

Un type de pronotum répandu est le pronotum dit de type P.



1) On s'intéresse à toutes les coccinelles présentes dans une forêt d'Europe. Des études statistiques montrent que :

   - 25 % des coccinelles présentes dans cette forêt ont une taille inférieure ou égale à 5 mm ; parmi les coccinelles qui ont une taille inférieure ou égale à 5 mm, 40 % ont un pronotum de type P ;
   - Parmi les coccinelles présentes dans cette forêt de taille strictement supérieure à 5 mm, 68 % ont un pronotum de type P.

   Dans cette forêt, on prélève au hasard une coccinelle. On appelle :

   - T l'évènement : « la coccinelle a une taille inférieure ou égale à 5 mm » ;
   - P l'évènement : « la coccinelle a un pronotum de type P ».

   On note $\overline{T}$ l'évènement contraire de l'évènement T et $\overline{P}$ l'évènement contraire de l'évènement P.

   a) Sur **l'annexe qui sera à rendre avec la copie**, compléter l'arbre modélisant la situation décrite ci-dessus.

   Pour les questions b) à d), on prélève au hasard une coccinelle dans la forêt.

   b) Déterminer la probabilité de l'évènement A : « la coccinelle prélevée a une taille inférieure ou égale à 5 mm et n'a pas un pronotum de type P ».

   c) Déterminer la probabilité de l'événement B : « la coccinelle prélevée dans la forêt n'a pas un pronotum de type P ».

   d) Déterminer la probabilité que la coccinelle prélevée soit de taille inférieure ou égale à 5 mm sachant qu'elle n'a pas un pronotum de type P.

2) Les critères « avoir une taille moyenne inférieure ou égale à 5 mm » et « ne pas avoir un pronotum de type P » caractérisent une espèce particulière : la coccinelle à deux points.

On appelle X la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 10 coccinelles prélevées au hasard dans cette forêt, associe le nombre de coccinelles à deux points dans l'échantillon. La population de coccinelles de la forêt est suffisamment importante pour que ce prélèvement soit assimilé à un tirage avec remise. On admet que la probabilité de prélever au hasard dans la forêt étudiée une coccinelle à deux points est égale à 0,15.

a) Donner la loi suivie par la variable aléatoire X et préciser ses paramètres. On ne justifiera pas la réponse.

b) On prélève au hasard 10 coccinelles dans la forêt étudiée. Calculer la probabilité d'avoir au moins une coccinelle à deux points dans le prélèvement.

3) On considère un élevage de coccinelles. On note L la variable aléatoire qui, à chaque coccinelle de l'élevage associe sa taille. On estime que cette taille exprimée en mm suit la loi uniforme sur l'intervalle $[3\,;6]$.

a) On prélève au hasard une coccinelle dans cet élevage. Quelle est la probabilité que sa taille soit comprise entre 4 mm et 5 mm ?

b) Quelle est la taille moyenne des coccinelles dans cet élevage ?

4) On s'intéresse ici à la ponte d'une espèce particulière de coccinelles : les coccinelles à deux points. On modélise le nombre d'œufs par ponte à l'aide d'une variable aléatoire U qui suit la loi normale d'espérance égale à 35 et d'écart-type égal à 6.

a) Donner le nombre moyen d'œufs par ponte d'une coccinelle à deux points.

b) Calculer la probabilité $p(31 \leq U \leq 39)$.

c) Déterminer un nombre entier h tel que : $p(35 - h \leq U \leq 35 + h) \approx 0{,}95$ à 10^{-2} près. Interpréter sous forme d'une phrase la probabilité correspondante dans le contexte.

5) Une autre espèce spécifique est utilisée dans la lutte contre l'infestation des pucerons.
Michel a créé un mur végétalisé. Avec effroi, il constate une infestation de pucerons. Sachant que les larves de cette espèce spécifique de coccinelles dévorent un grand nombre de pucerons, il en commande un lot de 80 larves pour traiter le mur. Le vendeur annonce que la durée de vie de ces larves, en jours, suit la loi normale d'espérance $m = 20$ et d'écart-type $\sigma = 3$.

Michel constate que la durée de vie moyenne des larves de son lot n'est que de 18 jours. Peut-il remettre en question l'annonce du vendeur au seuil de confiance de 95 % ?

On s'aidera d'un test bilatéral relatif à une moyenne pour répondre à cette question. On rappelle la formule de l'intervalle de confiance de la moyenne : $\left[m - 1{,}96\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\,;m + 1{,}96\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$.

Exercice n°2 (10 points)

Cet exercice est composé de trois parties indépendantes entre elles.

Dans une usine agroalimentaire, il y a une seule ligne de production, qui fonctionne en continu. Elle peut fabriquer deux variétés M1 et M2 d'un même produit, qui diffèrent par leur teneur en matière grasse :

- la variété M1 correspond à une teneur idéale en matière grasse de 8,6 %, soit 0,086 ;
- la variété M2 correspond à une teneur idéale en matière grasse de 15,2 %, soit 0,152.

La ligne était réglée jusqu'alors pour produire la variété M1. On injecte continûment de la matière grasse dans le produit en fabrication, sans arrêter la ligne de production, jusqu'à obtenir la variété M2. Durant cette phase de transition, la production est recyclée.

La variété M2 est considérée commercialisable par le service qualité dès que sa teneur en matière grasse dépasse 14,9 %, soit 0,149.

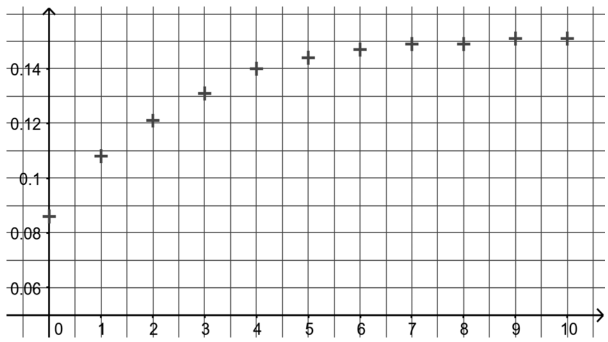
Partie A

La phase de transition pour passer de la variété M1 à la variété M2 est lancée. Un prélèvement est réalisé toutes les minutes pour mesurer la teneur en matière grasse du produit (le temps $t = 0$ correspond au démarrage de la période de transition). Les résultats sont rassemblés dans le tableau ci-dessous :

Temps t_i (en minutes)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Teneur en matière grasse y_i	0,086	0,108	0,121	0,131	0,14	0,144	0,147	0,149	0,149	0,151	0,151

1) Le nuage de points $(t_i\,;y_i)$ est représenté sur le graphique ci-contre.

   Un ajustement linéaire paraît-il approprié ? Pourquoi ?



2) On pose $z_i = \ln(0{,}152 - y_i)$. Le tableau ci-dessous donne certaines valeurs de z_i arrondies à 10^{-3} :

t_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
z_i	- 2,718	z_1	z_2	- 3,863	-4,423	- 4,828	- 5,298	- 5,809	- 5,809	- 6,908	- 6,908

a) Indiquer sur la copie les deux valeurs manquantes z_1 et z_2 du tableau, arrondies à 10^{-3}.

b) À l'aide de la calculatrice, déterminer par la méthode des moindres carrés une équation de la droite d'ajustement du nuage de points (t_i, z_i) sous la forme $z = at + b$, les réels a et b étant arrondis à 10^{-3}.

c) Pour cette question, on prendra $a = -0{,}44$ et $b = -2{,}7$. Déterminer une expression de la fonction y ajustant le nuage de points (t_i, y_i) dans le cadre de cette modélisation.

Partie B

1) L'étude expérimentale menée conduit à considérer la fonction C définie sur $[0; 10]$ par :

$$C(t) = 0{,}152 - 0{,}067\mathrm{e}^{-0{,}44t} .$$

On admet que la fonction C modélise la teneur en matière grasse du produit (nombre entre 0 et 1) en fonction du temps en minutes, décompté depuis le démarrage de la période de transition.

a) Calculer l'arrondi de $C(2)$ à 10^{-3}. Interpréter par rapport à la situation étudiée.

b) Calculer la dérivée de la fonction C et en déduire le sens de variation de la fonction C sur $[0; 10]$. Ce résultat est-il cohérent avec la situation étudiée ?

2) On considère l'algorithme ci-contre rédigé en langage naturel.

Quelle est la valeur numérique renvoyée par cet algorithme lorsqu'il a été exécuté ?

```
M prend la valeur 0
D prend la valeur 0,085
Tant que D ≤ 0,149
  M prend la valeur M+1
  D prend la valeur C(M)
Fin Tant que
Renvoyer M
```

3) a) On admet que l'équation $C(t) = 0{,}149$ admet une unique solution, notée T, sur l'intervalle $[0 ; 10]$. Déterminer une valeur approchée de T à 10^{-2} près.

b) Déduire de la question précédente le temps, à la seconde près, qu'il faut attendre après le démarrage de la phase de transition afin d'obtenir une variété M2 commercialisable.

Partie C

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ;\ 10]$ par $f(t) = 0{,}152 - 0{,}062\mathrm{e}^{-0{,}5t}$.

Le génie des procédés permet de considérer que la fonction f constitue une autre modélisation acceptable de la teneur en matière grasse du produit en fonction du temps t en minutes qui s'est écoulé à partir du démarrage de la période de transition.

On admet que le plus grand nombre réel t appartenant à l'intervalle $[0 ;\ 10]$ tel que $f(t) \leq 0{,}149$ vaut approximativement 6 au dixième près.

1) On considère la fonction F définie sur l'intervalle $[0 ;\ 10]$ par $F(t) = 0{,}152t + 0{,}124\mathrm{e}^{-0{,}5t}$.
Vérifier que la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0 ;\ 10]$.

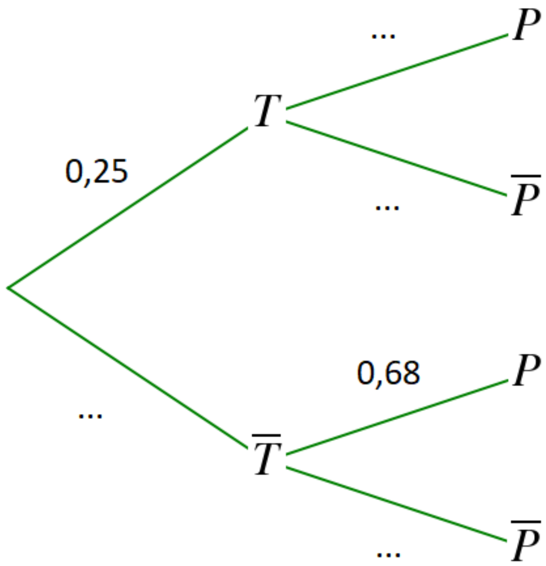
2) a) Déduire de la question précédente que l'arrondi à 10^{-4} de $\int_0^6 f(t)\mathrm{d}t$ est 0,7942.

b) Hachurer sur le graphique fourni **en annexe à rendre avec la copie** le domaine dont l'aire est égale à la valeur de cette intégrale.

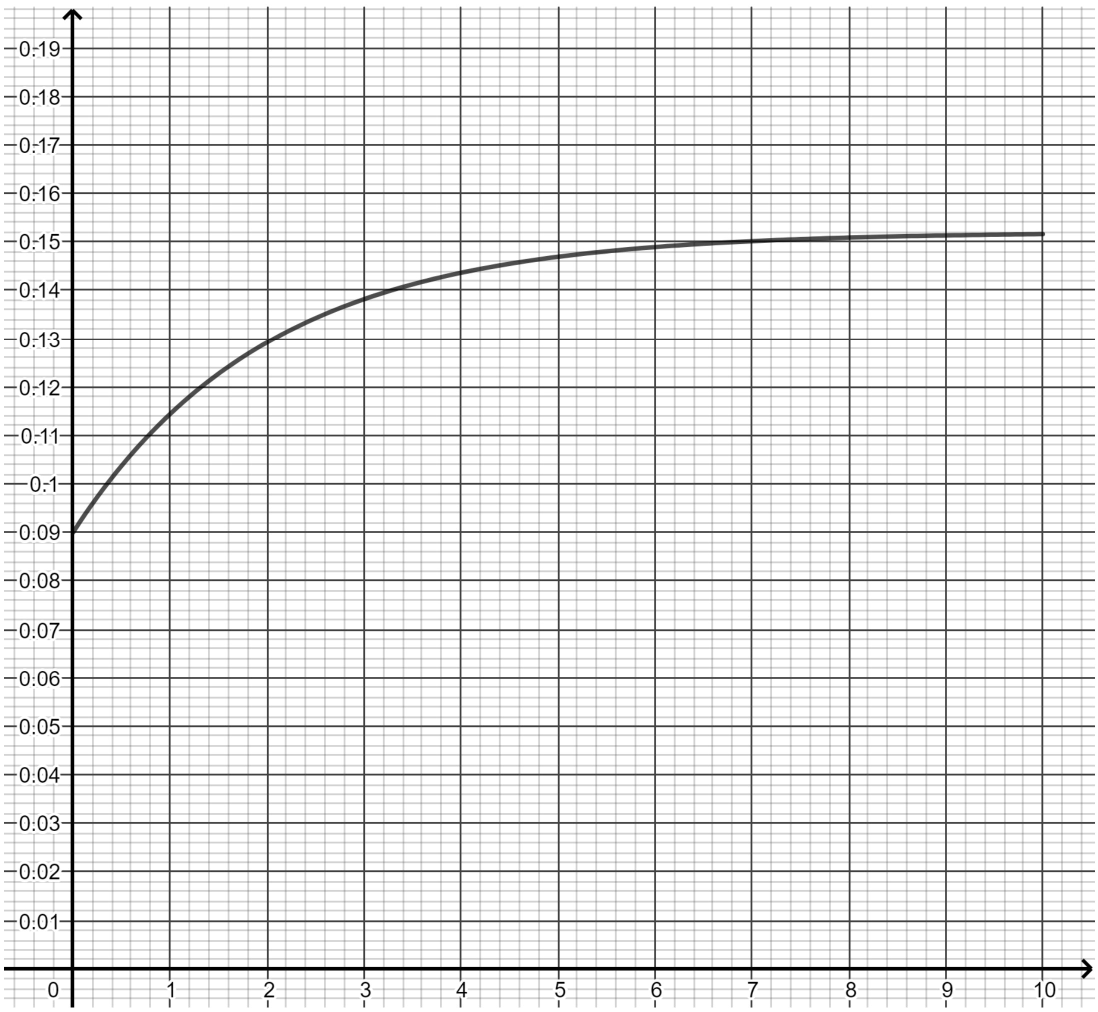
3) On note $m = \frac{1}{6}\int_0^6 f(t)\mathrm{d}t$.
Calculer l'arrondi du réel m à 10^{-3} et interpréter la valeur obtenue dans le contexte de l'exercice.

ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE

Exercice 1 – Question 1) a)



Exercice 2 - Partie C – Question 2) b)



Modèle CCYC : ©DNE
NOM DE FAMILLE (naissance) :
(en majuscules)

PRENOM :
(en majuscules)

N° candidat :

N° d'inscription :

(Les numéros figurent sur la convocation, si besoin demander à un surveillant.)

Liberté · Égalité · Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

Né(e) le : / /

1.2

BTS Industriels

Session 2024

Épreuve : **Mathématiques Groupe D1**

Durée de l'épreuve : 2 heures

PROPOSITION DE CORRIGÉ

Exercice 1

1. a) Arbre complété
b) $P(T \cap \overline{P}) = 0{,}25 \times 0{,}6 = 0{,}15$
c) $P(\overline{P}) = P(T \cap \overline{P}) + P(\overline{T} \cap \overline{P}) = 0{,}15 + 0{,}75 \times 0{,}32 = 0{,}39$ d'après la formule des probabilités totales
d) $P_{\overline{P}}(T) = \frac{P(T\cap\overline{P})}{P(\overline{P})} = \frac{0{,}15}{0{,}39} \approx 0{,}385$
2. a) X suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0{,}15$.
b) $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}85^{10} \approx 0{,}803$.
3. a) $P(4 \leq L \leq 5) = \int_4^5 \frac{1}{6-3} dx = \left[\frac{1}{3}x\right]_4^5 = \frac{1}{3}$.
b) $E(L) = \frac{3+6}{2} = 4{,}5$. La taille moyenne des coccinelles dans cet élevage est de 4,5 mm.
4. a) Le nombre moyen d'œufs par ponte est égale à $\mu = 35$.
b) $P(31 \leq U \leq 39) \approx 0{,}495$ à l'aide de la calculatrice.
c) $h = 1{,}96 \times \sigma = 11{,}76$. La probabilité $P(35 - 11{,}76 \leq U \leq 35 + 11{,}76) \approx 0{,}95$ signifie que dans environ 95% des cas, le nombre d'œufs pondus se situe entre 23 et 47 .
5. $I = \left[20 - 1{,}96 \times \frac{3}{\sqrt{80}}; 20 + 1{,}96 \times \frac{3}{\sqrt{80}}\right] \approx [19{,}342; 20{,}657]$, 18 n'appartient pas à l'intervalle I, donc il peut remettre en question l'annonce du vendeur.

Exercice 2

Partie A

1. Les points ne sont pas alignés donc un ajustement linéaire ne parait pas approprié.
2. a) $y_1 \approx 0{,}109$ donc $z_1 \approx \ln(0{,}152 - 0{,}109) \approx -3{,}147$.
$y_2 \approx 0{,}12$ donc $z_2 \approx \ln(0{,}152 - 0{,}12) \approx -3{,}442$
b) A l'aide de la calculatrice on obtient : $z = -0{,}435x - 2{,}656$ arrondi au millième.
c) $z_i = \ln(0{,}152 - y_i) \Leftrightarrow e^{z_i} = 0{,}152 - y_i \Leftrightarrow y_i = 0{,}152 - e^{z_i}$ donc la fonction $y = 0{,}152 - e^{-0{,}44t-2{,}7}$ ajuste le nuage de points (t_i, y_i).

Partie B

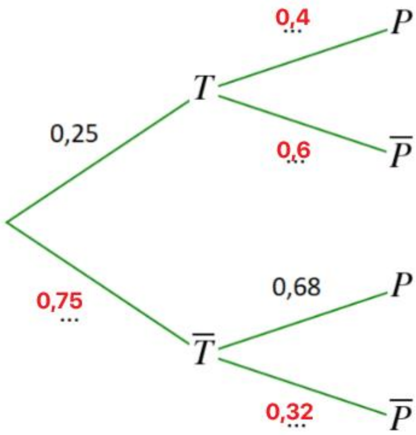
1. a) $C(2) = 0{,}152 - 0{,}067e^{-0{,}44\times 2} \approx 0{,}124$. Deux minutes après le démarrage de la phase de transition, la teneur en matière grasse du produit est de $12{,}4\%$.
b) $C'(t) = -0{,}067 \times (-0{,}44)e^{-0{,}44t} = 0{,}02948e^{-0{,}44t}$. Sur $[0; 10]$, $C'(t) \geq 0$ car $e^{-0{,}44t} > 0$ donc C est croissante. Ce résultat est cohérent car on injecte continûment de la matière grasse dans le produit en fabrication.
2. Cet algorithme détermine le nombre de minutes M à partir duquel la teneur en matière grasse dépasse$14{,}9\%$.

3.a) $C(t) = 0{,}149 \Leftrightarrow 0{,}152 - 0{,}067e^{-0{,}44t} = 0{,}149 \Leftrightarrow e^{-0{,}44t} = \frac{3}{67} \Leftrightarrow -0{,}44t = \ln\left(\frac{3}{67}\right) \Leftrightarrow t \approx 7{,}06$**b)** Il faut donc attendre $7{,}06$ min soit 7 min et 3 secondes après le démarrage de la phase de transition afin d'obtenir une variété M2 commercialisable.

Partie C

1. $F'(t) = 0,152 + 0,124 \times (-0,5)e^{-0,5t} = f(t)$ donc F est une primitive de f sur $[0;10]$
2.a) $\int_0^6 f(t)dt = [F(t)]_0^6 = F(6) - F(0) \approx 0,7942$
b) Domaine hachuré sur l'annexe.
3. $m = \frac{1}{6}\int_0^6 f(t)dt \approx \frac{1}{6} \times 0,7942 \approx 0,132$. Cela signifie qu'en moyenne durant les 6 premières minutes, le produit en fabrication contient environ $13,2\%$.

Exercice 1 – Question 1) a)



Exercice 2 - Partie C – Question 2) b)