

FICHE – MÉTHODE*Analyse 1 – Suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$*

On s'intéresse ici aux suites définies par un terme initial $u_0 \in D$, et une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est une fonction de la partie D de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Cette fonction est supposée **continue**.

Cette étude commence toujours par une étude de propriétés intéressantes de la fonction f .

1. ÉTUDE QUALITATIVE DE LA CONVERGENCE

Il s'agit d'étudier ici les variations de la suite en utilisant les variations de la fonction f et/ou le signe de $f(x) - x$ et d'en déduire la convergence ou la divergence.

Plan :

- ❶ Représenter graphiquement le comportement de la suite.

On commence par étudier les variations de f ainsi que le signe de $f(x) - x$ et les points fixes de f .

Puis on représente le comportement graphique de la suite : sur un même graphique, on trace la courbe représentative de f et la première bissectrice du repère en s'aidant de l'étude précédente pour les intersections et les positions relatives. On place u_0 sur l'axe des abscisses et on va verticalement sur la courbe, puis horizontalement sur la bissectrice, puis verticalement sur la courbe, puis... *ad libitum*

On peut alors aisément conjecturer le comportement de (u_n) (monotonie, convergence).

- ❷ Déterminer un intervalle stable.

Il s'agit d'un intervalle **fermé** $I \subset D$ tel que $f(I)$ est inclus dans I , et qui contient u_0 . Alors, par une récurrence immédiate, tous les u_n sont dans I . C'est l'intérêt principal d'un tel intervalle : la suite n'en sort pas.

En pratique, on choisira le plus souvent (dans le cas où f est croissante notamment) un intervalle fermé dont les extrémités sont des points fixes consécutifs de f ou $\pm\infty$.

- ❸ Déterminer les seules limites possibles d'une telle suite.

Les valeurs nécessaires de la limite de (u_n) sont les points fixes de f sur I .

- ❹ Cas où f est croissante sur I .

Dans ce cas, la suite (u_n) est nécessairement monotone. On détermine son sens de va-

riation en utilisant le signe de $f(x) - x$.

Si I est borné (au moins) du « bon » côté, alors (u_n) est bornée et donc va converger.

Sinon, (u_n) ne peut converger, faute de point fixe à l'horizon, et donc va diverger vers $\pm\infty$.

- ❺ Cas où f est décroissante sur I .

Alors la fonction $f \circ f$ est croissante et, par conséquent, les deux suites extraites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont nécessairement monotones de sens de variation contraires. On étudie alors les deux suites extraites en question comme indiqué en ❹.

Si f n'est pas monotone sur I , l'étude des suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$ peut être très difficile.

2. ÉTUDE QUANTITATIVE DE LA CONVERGENCE, VITESSE DE CONVERGENCE

Il s'agit d'étudier et de quantifier la convergence en utilisant des arguments de dérivabilité, en particulier l'inégalité des accroissements finis pour étudier $|u_n - \ell|$, où ℓ est un (le) point fixe de f sur I .

On suppose dans ce qui suit que f est dérivable sur l'intervalle stable I et que $|f'| \leq M < 1$ sur I . On établit alors successivement que

$$\bullet \forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \ell| = |f(u_n) - f(\ell)| \leq M |u_n - \ell| \quad (\text{IAF})$$

$$\bullet \text{ puis, par récurrence, } \forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \ell| \leq M^n |u_0 - \ell|$$

ce qui prouve que (u_n) converge vers ℓ et que la vitesse de convergence est au moins géométrique.

Pour votre culture et pour que vous soyez avertis, les résultats suivants sont intéressants mais (très) hors-programme.

1. Si $|f'(\ell)| > 1$, il existe un voisinage W_0 de ℓ tel que les suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $u_0 \in W_0 \setminus \{\ell\}$ sortent au moins une fois de W_0 . Par conséquent, ces suites convergent vers ℓ si, et seulement si elles sont stationnaires à la valeur ℓ . On dit que le point fixe est *répulsif*.
2. Si $|f'(\ell)| < 1$, il existe un voisinage W de ℓ tel que les suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $u_0 \in W$ convergent vers ℓ avec une vitesse au moins géométrique. On dit que le point fixe est *attractif*.
3. Si $|f'(\ell)| = 1$, tout peut arriver, et s'il y a convergence, la vitesse de convergence peut être lente. On dit que le point fixe est *indifférent*.