BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR
ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES - GROUPEMENT C1

SESSION 2024

DURÉE : 2 HEURES

SPÉCIALITÉS	COEFFICIENT
Conception des processus de découpe et d'emboutissage	2
Conception des processus de réalisation de produits (2 options)	2
Conception et réalisation en chaudronnerie industrielle	2
Conception et industrialisation en construction navale	2
Développement et réalisation bois	2
Fonderie	2
Forge	2
Industries céramiques	2
Innovation textile (2 options)	3
Maintenance des matériels de construction et de manutention	2
Maintenance des systèmes (4 options)	2
Maintenance des véhicules (3 options)	2
Motorisations toutes énergies	2
Pilotage des procédés	3
Systèmes constructifs bois et habitat	2
Techniques et services en matériels agricoles	2

Matériel autorisé :
L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé.

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1/7 à 7/7.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 **10 POINTS**

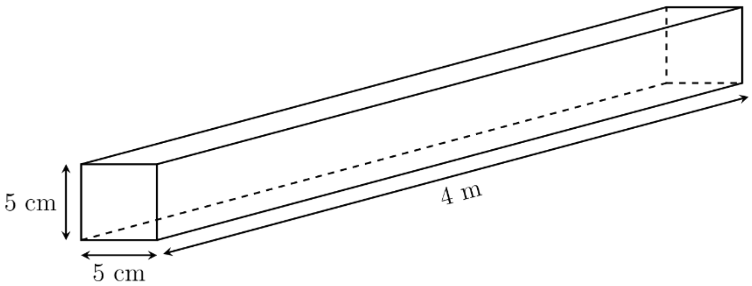
Les différentes parties de cet exercice sont indépendantes.

Le bois d'épicéa est couramment utilisé en France pour la construction.

Avant son utilisation, il est nécessaire de le faire sécher.

La teneur en humidité du bois d'épicéa correspond au pourcentage d'eau contenu dans le bois.

On considère ici des poutres en épicéa ayant la forme d'un pavé droit de longueur 4 m et dont la base est un carré de côté 5 cm.



PARTIE A – Modélisation de la teneur en humidité

Dans cette partie, on utilisera exclusivement des valeurs exactes pour les calculs.

1. On considère que lors du séchage, 96 % de la surface extérieure d'une poutre est exposée à l'air.

   Montrer que, pour de telles poutres, la valeur correspondante à l'aire de la surface du bois exposée à l'air vaut $0{,}7728$ m².

2. On admet que pour le bois considéré dans cette partie et les conditions de séchage envisagées, la teneur en humidité, exprimée en pourcentage, est une fonction f du temps t, exprimé en semaine, qui vérifie l'équation différentielle :

$$(\mathrm{E}) : y' + 0{,}03864\, y = 0{,}003864$$

   où y est une fonction dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ et y' sa fonction dérivée.

   a. Vérifier que la fonction g définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $g(t) = 0{,}1$ est une solution particulière de l'équation (E).

   b. Déterminer les solutions de l'équation homogène (E_0) :

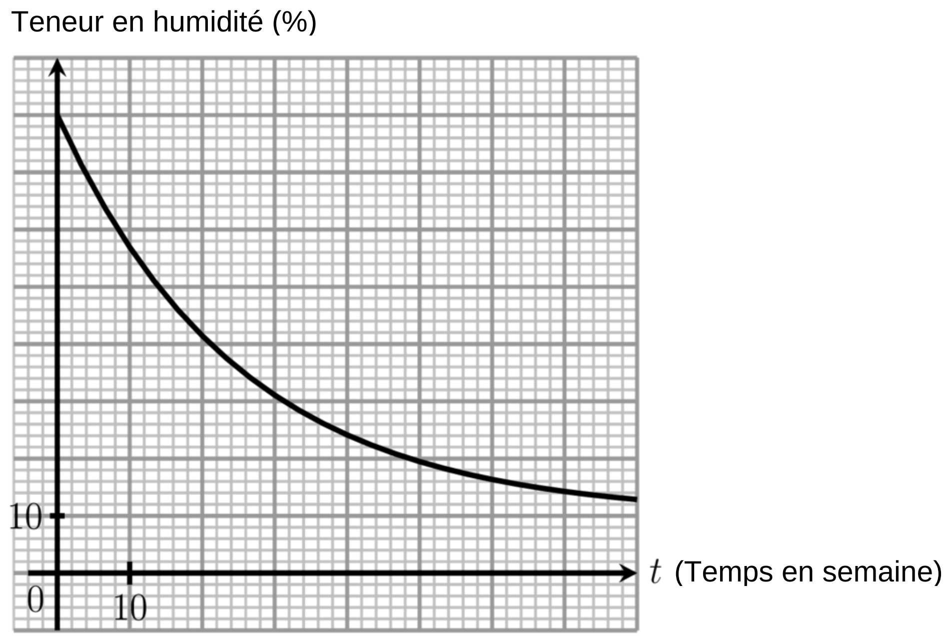
$$(\mathrm{E}_0) : y' + 0{,}03864\, y = 0.$$

c. Déduire, de ce qui précède, les solutions de l'équation différentielle (E).

d. Déterminer la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ solution de l'équation différentielle (E) telle que la teneur en humidité initiale, c'est-à-dire au temps $t = 0$, est de 80 %.

PARTIE B – Temps de séchage

On admet que la fonction représentée ci-dessous est la fonction f qui exprime la teneur en humidité du bois d'épicéa, en pourcentage, en fonction du temps t, exprimé en semaine.



Répondre aux questions suivantes, avec la précision permise par le graphique :

1. Quelle est la teneur en humidité d'une poutre après 20 semaines de séchage ?

2. Ces poutres sont vendues une fois que leur teneur en humidité est inférieure à 20 %.

   Au bout de combien de temps, ces poutres peuvent-elles être vendues ?

PARTIE C – Teneur en humidité

Dans cette partie, on admet que l'expression de la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ représentant la teneur en humidité, en pourcentage, du bois d'épicéa en fonction du temps t, exprimé en semaine, est :

$$f(t) = 0{,}7e^{-0{,}04t} + 0{,}1.$$

À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on a obtenu la capture d'écran suivante :

Calcul formel	
1	f(t):=0.7*exp(-0.04t)+0.1 ≈ $f(t) := 0.7\,e^{-0.04t} + 0.1$
2	Dérivée[f] ≈ $-0.028\,e^{-0.04t}$
3	Intégrale[f] ≈ $-17.5\,e^{-0.04t} + 0.1\,t$
4	Limite[f, +∞] ≈ 0.1

1. En utilisant les résultats précédents, répondre aux questions suivantes :

   a. Donner la limite de $f(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$.

   Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

   b. À l'aide du contexte, conjecturer les variations de la fonction f sur $[0\,;\,+\infty[$.

   c. Étudier les variations de la fonction f sur $[0\,;\,+\infty[$.

2. a. Résoudre pour t appartenant à $[0\,;\,+\infty[$ l'inéquation :

$$f(t) \leq 0{,}2.$$

   Arrondir le résultat à l'unité.

   b. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

EXERCICE 2 **10 POINTS**

Les différentes parties de cet exercice sont indépendantes.

Une entreprise produit en grande série des vis au moyen de deux chaînes de production.

PARTIE A – Production de vis

On choisit au hasard une vis dans le stock. On note :

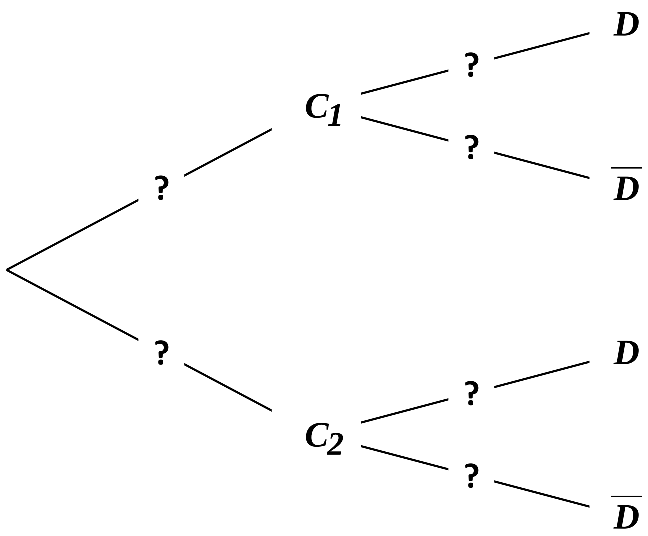
- C_1 l'événement « la vis provient de la première chaîne » ;
- C_2 l'événement « la vis provient de la deuxième chaîne » ;
- D l'événement « la vis a un défaut ».

La première chaîne produit 40 % du stock et on sait que sur cette chaîne 3 vis sur 1000 ont un défaut.

De plus, on sait que sur la deuxième chaîne, 5 vis sur 1000 ont un défaut.

Pour tout événement A, on note $\overline{A}$ son événement contraire.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré suivant :



2. Déterminer la probabilité que la vis choisie provienne de la première chaîne et présente un défaut.

3. Montrer que la probabilité qu'une vis présente un défaut est égale à $0{,}0042$.

4. On choisit une vis du stock et on constate qu'elle présente un défaut.

   Est-il exact qu'il y a moins de 25 % de chance qu'elle provienne de la première chaîne de production ?

PARTIE B – Étude d'un lot

Dans cette partie, on admet que la probabilité qu'une vis ait un défaut vaut $0{,}004$.

On prélève, dans le stock d'une journée, un lot de 50 vis. On admet que ce stock est suffisamment important pour que ce prélèvement soit assimilé à un tirage avec remise.

On note X la variable aléatoire qui, à chaque prélèvement d'un lot de 50 vis, associe le nombre de vis ayant un défaut.

1. Expliquer pourquoi la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

2. Dans cette question, les probabilités seront arrondies au millième.

    a. Calculer la probabilité que ce lot contienne exactement 2 vis ayant un défaut.

    b. Calculer la probabilité que ce lot contienne au moins 3 vis ayant un défaut.

PARTIE C – Conformité des vis

Dans cette partie, on s'intéresse à la longueur des vis produites par la première chaîne de production.

On appelle L la variable aléatoire qui, à chaque vis de cette production, associe sa longueur en millimètre.

On admet que la variable aléatoire L suit la loi normale d'espérance μ et d'écart type σ.

Une vis est considérée comme conforme si sa longueur est comprise entre 59,60 mm et 60,40 mm.

1. Dans cette question, on suppose que $\mu = 60$ et $\sigma = 0{,}25$. Calculer la probabilité qu'une vis choisie au hasard dans le stock soit conforme. Arrondir le résultat au centième.

2. Les vis sont considérées conformes si leur longueur moyenne est de 60 mm.

    Afin de vérifier le bon réglage des machines de fabrication des vis produites par la première chaîne de production, on construit un test d'hypothèse bilatéral relativement à la moyenne des longueurs des vis, au seuil de risque de 5 %.

    L'hypothèse nulle du test est donc $H_0 : \mu = 60$.

    a. Énoncer l'hypothèse alternative H_1.

On note $\overline{L}$ la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 100 vis produites par la première chaîne, associe la moyenne des longueurs de ces 100 vis.

Sous l'hypothèse H_0, on admet que $\overline{L}$ suit la loi normale d'espérance mathématique 60 et d'écart type $\sigma' = 0{,}025$.

b. On admet que $P(59{,}95 \leq \overline{L} \leq 60{,}05) = 0{,}95$. Énoncer la règle de décision du test.

c. On prélève un échantillon de 100 vis et on obtient, pour cet échantillon, une moyenne des longueurs des 100 vis égale à 60,03 mm.

   Appliquer le test conçu dans cette question et conclure quant au réglage de la première chaîne de production.

BTS Industriels

Session 2024

Épreuve : **Mathématiques Groupe C1**

Durée de l'épreuve : 2 heures

PROPOSITION DE CORRIGÉ

Exercice 1:

Partie A

1.

5 cm correspondent à 0,05 m.

Ce pavé droit comporte deux bases identiques et 4 surfaces latérales identiques.

Une base du pavé droit est un carré, donc son aire Ac vaut: 0,05*0,05 = 0,0025 mètres carrés.

Une surface latérale du pavé droit est un rectangle donc son aire vaut: 4*0,05 = 0,2 mètres carrés.

La surface totale S du tétraèdre vaut donc: S = 2*0,0025 + 4*0,2 = 0,805 mètres carrés.

La valeur correspondante à l'aire de la surface du bois exposée à l'air vaut donc:

0,805*(96/100) = 0,7728 mètres carrés.

2.

a.

g'(t) + 0,03864*g(t) = 0 + 0,03864*0,1 = 0,003864.

Donc g est solution de (E).

b.

L'ensemble des solutions de (Eo) est l'ensemble des fonctions de la forme:

$f_k(t)$ = k*exp(-0,03864*t) , où k est une constante réelle fixée quelconque.

c.

L'ensemble des solutions de (E) est l'ensemble des fonctions de la forme:

$g_k(t)$ = k*exp(-0,03864*t) + 0,1 ; où k est une constante réelle fixée quelconque.

d.

On sait que f(0) = 0,8.

En remplaçant t par 0 dans l'expression du c., on obtient l'équation:

k*exp(0) + 0,1 = 0,8

Donc: k = 0,7.

Ainsi:

f(t) = 0,7*exp(-0,03864*t) + 0,1

Partie B

1.

La teneur en humidité au bout de 20 semaines de séchage est d'environ 41%.

2.

Ces poutres pourront être vendues au bout d'environ 49 semaines.

Partie C

1.

a.

D'après le 4. de la capture d'écran,

$\lim\limits_{t->+\infty} f(t)$= 0,1.

Au bout d'un temps infiniment grand, la teneur en humidité sera très proche de 10%.

b.

Etant donné que la fonction f représente la teneur en humidité du bois en fonction du temps t, et étant donné qu'on fait sécher ce bois, on conjecture donc que f est décroissante sur $[0, +\infty[$.

c.

D'après le 2. de la capture d'écran, la dérivée de f est strictement négative quelque soit t, on en déduit donc que la fonction f est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$.

2.

a.

$f(t) \leq 0{,}2$

<=> $0{,}7*\exp(-0{,}04*t) + 0{,}1 \leq 0{,}2$

<=> $0{,}7*\exp(-0{,}04*t) \leq 0{,}1$

<=> $\exp(-0{,}04*t) \leq 1/7$ (Où on a divisé des deux cotés par $0{,}07 > 0$.).

<=> $-0{,}04*t \leq \ln(1/7)$ (Car la fonction ln est croissante sur $[0, +\infty[$.).

<=> $t \geq (-\ln(7)/-0{,}04)$ (Où on a divisé des deux cotés par $-0{,}04 < 0$.).

<=> $t \geq 25*\ln(7)$.

Donc:

$S = [25 * \ln(7), +\infty[$

Et $25*\ln(7) \approx 49$.

b.

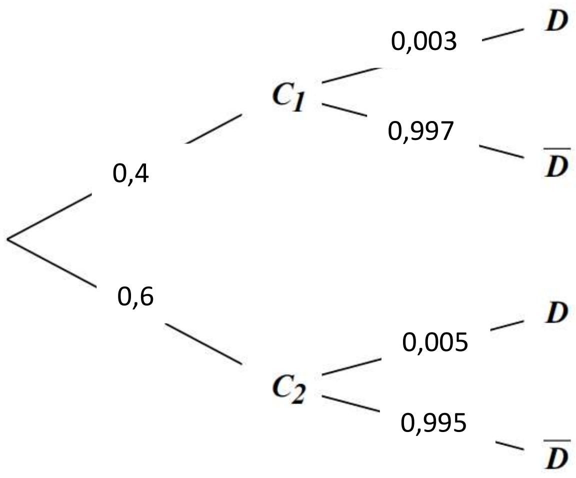
On en déduit qu'au bout de 49 semaines, le taux d'humidité deviendra inférieur à 20 %.

(Ceci confirme le résultat du 2. de la partie B.).

Exercice 2:

Partie A

1.



2.

P($C_1 \cap D$)= 0,4*0,003 = 0,0012.

3.

D'après la formule des probabilités totales, on a:

P(D) = P($C_1 \cap D$) + P($C_2 \cap D$) = 0,4*0,003 + 0,6*0,005 = 0,0042.

4.

$P_D(C_1)$ = P($C_1 \cap D$)/ P(D)

= 0,0012/0,0042

≈ 28,6%

Donc, l'affirmation est fausse.

Partie B

1.

On reconnaît un schéma de Bernouilli:

On répète 50 fois la même épreuve de Bernouilli: «prélever une vis dans le stock»
(Succès = «la pièce a un défaut», p(Succès) = 0,004), de manière indépendante.

X suit donc une loi binomiale de paramètres 50 et 0,004.

2.

a.

$P(X=2)=C_{50}^{2}*0{,}004^{2}*0{,}996^{48} \approx 0{,}016$.

b.

$P(X \geq 3)= 1 - (P(X=0) + P(X=1) + P(X=2))$

$\approx 0{,}001$.

Partie C

1.

$P(59{,}60 \leq L \leq 60{,}40) \approx 0{,}89$. (D'après la calculatrice).

2.

a.

Comme le test d'hypothèse est bilatéral, on a l'hypothèse alternative:

$H_1 : \mu \neq 60$

b.

Si la longueur moyenne d'un échantillon de 100 vis est comprise entre 59,95 et 60,05,

l'hypothèse H_0 est acceptée avec un seuil de confiance de 95%. Sinon, elle est rejetée et on accepte H_1 avec un risque d'erreur de 5%.

c.

60,03 est compris entre 59,95 et 60,05. Au risque de 5% d'erreur, H_0 est acceptée.

On peut donc conclure qu'au risque d'erreur de 5%, la longueur moyenne des vis de cette chaîne de production est conforme.