BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR

SESSION 2024

Épreuve de mathématiques

GROUPEMENT B ***CODE : 24MATGRB1***

Durée : 2 heures

SPÉCIALITÉS	COEFFICIENTS
Aéronautique	2
Assistance technique d'ingénieur	2
Bâtiment	2
Conception et réalisation de carrosseries	2
Conception et réalisation des systèmes automatiques	2
Enveloppe des bâtiments : conception et réalisation	2
Environnement nucléaire	2
Fluides – énergies – domotique (3 options)	2
Traitement des matériaux (2 options)	3
Travaux publics	2

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé.

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

Le sujet comporte 5 pages, numérotées de 1/5 à 5/5.

EXERCICE 1 (10 points)

On coule du béton pour faire une dalle. Au début, le béton est mou, puis, au fil du temps, il sèche, et devient plus résistant.

On note $f(t)$ la résistance du béton à l'instant t.
$f(t)$ est exprimée en mégapascal (MPa) et t désigne le nombre de jours de séchage.

Les trois parties peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A. Résolution d'une équation différentielle

On admet que la fonction f est solution de l'équation différentielle :

$$(E) : \quad y' + 0{,}06y = 2{,}1 \ ,$$

où y est une fonction inconnue de la variable réelle t, définie et dérivable sur $[\,0\,;\,+\infty\,[$, et où y' est la dérivée de y.

1. Résoudre sur $[0\,;+\infty\,[$ l'équation différentielle :

$$(E_0) : \ y' + 0{,}06y = 0$$

On fournit la formule suivante :

Équation différentielle	Solutions sur un intervalle I
$y' + ay = 0$	$y(t) = k\mathrm{e}^{-at}$

2. On considère la fonction constante g définie sur $[0\,;+\infty\,[$ par $g(t) = 35$.
Vérifier que la fonction g est solution de l'équation différentielle (E).

3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

4. À l'instant $t = 0$, on considère que la résistance du béton est nulle.
En déduire que la fonction f est définie sur $[0\,;+\infty\,[$ par : $f(t) = -35\mathrm{e}^{-0{,}06t} + 35$.

Partie B. Étude de fonction

On considère à nouveau la fonction f, définie sur $[0\,;+\infty\,[$ par :

$$f(t) = -35\mathrm{e}^{-0{,}06t} + 35\,.$$

On rappelle que $f(t)$ désigne la résistance du béton, exprimée en mégapascal, à l'issue de t jours de séchage.

1. Quelle est la résistance du béton après 7 jours de séchage ? Après 72 heures ?
Arrondir au dixième.

2. On admet que la fonction f est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée. Vérifier que, pour tout réel t appartenant à $[0\,;+\infty\,[$, on a :

$$f'(t) = 2{,}1\mathrm{e}^{-0{,}06t}\ .$$

3. Déterminer le signe de $f'(t)$ sur $[0\,;+\infty[$ et en déduire le sens de variations de la fonction f sur $[0\,;\ +\infty[$.

4. Déterminer la limite de $f(t)$ lorsque t tend vers l'infini.
Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

5. Le fabricant du béton affirme que la résistance après 28 jours de séchage correspond à 80% de la résistance finale.

Cette affirmation est-elle juste ?

6. On considère la fonction F définie sur $[0\,;+\infty\,[$ par $F(t)\ =\ \left(\frac{1750}{3}\right)\mathrm{e}^{-0{,}06t}\ + 35t$.

Montrer que la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\ +\infty[$.

7. Déterminer une valeur approchée au dixième de la valeur moyenne de la résistance du béton sur les 28 premiers jours.

On fournit la formule suivante :

La valeur moyenne M d'une fonction h sur l'intervalle $[a\,;b]$ est définie par : $$M = \frac{1}{b-a}\int_a^b h(t)\mathrm{d}t\ .$$

Partie C. Algorithme

On note N le nombre entier correspondant au nombre minimal de jours de séchage permettant d'obtenir une résistance au moins égale à 21 MPa.

1. Recopier l'algorithme ci-dessous et compléter les lignes **3** et **4**.

Ligne 1	$t \leftarrow 0$
Ligne 2	$R \leftarrow 0$
Ligne 3	Tant que ……………
Ligne 4	$t \leftarrow$ ……….
Ligne 5	$R \leftarrow -35\mathrm{e}^{-0{,}06t}\ + 35$
Ligne 6	Fin Tant que

2. Donner la valeur de N. Expliquer la démarche suivie.

<u>EXERCICE 2</u> (10 points)

Les trois parties sont indépendantes.

Partie A. Loi normale

Une entreprise produit des tiges métalliques cylindriques.

On note X la variable aléatoire qui, à toute tige prélevée au hasard, associe son diamètre exprimé en millimètres.

On admet que X suit la loi normale de moyenne $\mu = 32$ et d'écart-type $\sigma = 0{,}6$.

1. Donner la probabilité, arrondie au millième, que le diamètre de la tige prélevée ait un diamètre compris entre 31 et 33 mm.

2. Déterminer, au millième près, le réel h tel que :

$$P(X > 32 - h) = 0{,}975.$$

Partie B. Loi binomiale

Une entreprise dispose de 15 imprimantes fonctionnant indépendamment les unes des autres.

On se place un jour donné.

On considère une imprimante quelconque. La probabilité qu'elle tombe en panne ce jour est égale à $0{,}07$.

On considère la variable aléatoire Y qui compte le nombre d'imprimantes qui tombent en panne ce jour.

1. Donner la loi suivie par Y, ainsi que ses paramètres et son espérance.

2. Calculer la probabilité qu'exactement 12 imprimantes ne tombent pas en panne ce jour. Arrondir au millième.

3. Calculer la probabilité qu'au moins 3 imprimantes tombent en panne ce jour. Arrondir au millième.

Partie C. Test d'hypothèse

Une entreprise commercialise des blocs de béton de chanvre. Elle affirme que la résistance moyenne μ de ces blocs est égale à 50 mégapascals (MPa).

Désirant vérifier la validité de cette affirmation, un contrôleur met en place un test d'hypothèse bilatéral.

On note Z la variable aléatoire qui, à chaque bloc prélevé au hasard dans la production, associe sa résistance, exprimée en MPa.

La variable aléatoire Z suit une loi normale de moyenne inconnue μ et d'écart-type $\sigma = 0{,}35$.

Soit n un entier naturel. On désigne par $\overline{Z}$ la variable aléatoire qui, à chaque échantillon aléatoire de n blocs prélevés dans la production, associe la moyenne des résistances de ces blocs.

On rappelle que la variable aléatoire $\overline{Z}$ suit la loi normale de moyenne μ et d'écart-type $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

L'hypothèse nulle H_0 est : « $\mu = 50$ ».
L'hypothèse alternative H_1 est : « $\mu \neq 50$ ».
Le seuil de signification du test est fixé à 5 %.

On se place dans le cas où $n = 80$.

1. Sous l'hypothèse nulle H_0, justifier que la variable aléatoire $\overline{Z}$ suit la loi normale de moyenne 50 et d'écart-type $0{,}04$.

2. On souhaite déterminer, sous l'hypothèse H_0, le réel positif h tel que :

$$P\left(50 - h \leq \overline{Z} \leq 50 + h\right) = 0{,}95.$$

Cette question est une question à choix multiples. Une seule réponse est exacte. Recopier sur la copie la réponse qui vous paraît exacte. On ne demande aucune justification. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de points.

La valeur du nombre réel h est :

$0{,}05$	$0{,}04$	$0{,}08$	$0{,}12$

3. Énoncer la règle de décision permettant d'utiliser ce test.

4. Le contrôleur a prélevé un échantillon de 80 blocs.
Les résistances obtenues ont été notées dans le tableau ci-dessous.

Résistance mesurée (en MPa)	$49{,}7$	$49{,}8$	$49{,}9$	50	$50{,}2$	$50{,}4$	$50{,}5$
Effectif correspondant	2	5	15	24	17	13	4

Appliquer le test et conclure.

BTS Industriels

Session 2024

Épreuve : **Mathématiques Groupe B1**

Durée de l'épreuve : 2 heures

PROPOSITION DE CORRIGÉ

<u>Exercice 1</u> (10 points)

Partie A

1. a) La solution générale de (E_0) est : ***<u>y(t) = k e</u>*** $^{-0,06\,t}$, où *k* est un réel quelconque.
   b) On a *g* '(*t*) + 0,8 g(t) = 0 + 0,06*35 = 2,1 donc g(t) = 35 est une solution particulière de (E).
   c) La solution générale de (E) est alors : ***<u>y(t) = k e</u>*** $^{-0,06\,t}$ ***<u>+ 35</u>***

2. On veut trouver f(t) = k e $^{-0,06\,t}$ + 35 telle que f(0) = 0 i.e. k + 35 = 0 d'où k = - 35 et **<u>f(t) = -35e</u>** $^{-0,06\,t}$ **<u>+ 35</u>** est la fonction qui satisfait à la condition initiale du problème.

Partie B

1. a) f(7) <u>≈ 12</u> donc la résistance du béton au bout de 7 jours de séchage est d'environ <u>12 MPa</u>.

f(3) <u>≈ 5,8</u> donc la résistance du béton au bout de 3 jours, soit 72h de séchage est d'environ <u>5,8 MPa</u> .

2. On a f ' (t) = - 35* (-0,06) e $^{-0,06\,t}$ = 2,1 e $^{-0,06\,t}$

3. f ' (t) > 0, **donc f est strictement croissante sur [0 ; + ∞[.**

4. Comme $\lim\limits_{t \to +\infty} -0,06\,t = -\infty$, alors par composition $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-0,06\,t} = 0$, et on a $\lim\limits_{t \to +\infty} \boldsymbol{f(t)} = \mathbf{35}$ peut s'interpréter comme si **à terme**, la résistance du béton sera de <u>35 MPa.</u>

5. Comme f (28) <u>≈ 28,5</u> et 28,5 /35 <u>≈ 81,4%</u> alors le fabricant du béton qui affirme que la résistance après 28 jours de séchage correspond à 80% de la résistance finale ne peut être accusé de mentir.

6. On a F ' (t) = (1750/3) * (-0,06) e $^{-0,06\,t}$ + 35 = - 35 e $^{-0,06\,t}$ + 35 = f (t), ce qui prouve que **F est une primitive de f sur [0 ; + ∞[.**

7. On a :

M = $\frac{1}{28}\int_0^{28} f(t)dt = \frac{1}{28}(F(28) - F(0)) \approx$ **18MPa** à 0,1 près

ce qui nous donne une valeur moyenne de la résistance du béton sur les 28 premiers jours de **<u>18MPa.</u>**

Partie C

1.

Ligne 1	$t \leftarrow 0$
Ligne 2	$R \leftarrow 0$
Ligne 3	Tant que R < 21
Ligne 4	$t \leftarrow$ t + 1
Ligne 5	$R \leftarrow -35e^{-0,06t} + 35$
Ligne 6	Fin Tant que

2. En tabulant les valeurs de la fonction f, on a f(15) ≈ 20,8 < 21 et f(16) ≈ 21,6 > 21 donc N = 16 : c'est le nombre minimal de jours de séchage permettant d'obtenir une résistance au moins égale à 21 MPa.

Exercice 2 (10 points)

Partie A

1. La probabilité, arrondie au millième, que le diamètre de la tige prélevée ait un diamètre compris entre 31 et 33 mm est : $P(31 \leq X \leq 33)$ **≈ 0,904**

2. On a h = 1,96 σ = **1,176.** (borne supérieure de l'intervalle à 95%)

Partie B

1. Le prélèvement d'une imprimante est assimilé à une épreuve de Bernoulli, le succès étant lui-même assimilé à l'obtention d'une imprimante en panne (probabilité 0,07). On répète cette épreuve 15 fois, donc Y suit la loi binomiale de paramètres $n = 15$ et $p = 0,07$.
Son espérance est $E(Y) = n * p = 15 * 0,07 = 1,05$

2. La probabilité qu'exactement 12 imprimantes ne tombent pas en panne ce jour est :

$P(Y = 3)$ **≈ 0,065** arrondie au millième.

3. La probabilité qu'au moins 3 imprimantes tombent en panne ce jour est :
$P(Y \geq 3)$ **≈ 0,083**

Partie C

1. Sous l'hypothèse nulle H_0, il est dit que :
la moyenne est 50 et que l'écart-type est $\sigma / \sqrt{n} = \sigma / \sqrt{n80} = 0,039$ **≈ 0,04.**

2. On trouve, avec 2 σ , que h = 0,08

3. L'intervalle de confiance autour de la moyenne au seuil de 5% est :
[50 – 0,08 ; 50 + 0,08] ≈ **[49,92 ; 50,08] .**
Si il contient la moyenne observée, l'hypothèse nulle H_0 est vérifiée.
Si il ne contient pas la moyenne observée, on choisit l'hypothèse H_1.

4. L'intervalle de confiance autour de la moyenne au seuil de 5% ne contient pas la valeur moyenne de cet échantillon qui est d'environ 50,09.
Ce qui permet de rejeter l'hypothèse nulle H_0 .
On ne peut donc pas considérer que la résistance moyenne d'un bloc est 50 MPa, avec un risque d'erreur de 5%.