MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE
ET DE LA JEUNESSE
Liberté
Égalité
Fraternité

EST MAT 1

SESSION 2023

CONCOURS DE RECRUTEMENT DE PROFESSEURS DES ECOLES

Concours externe - Concours externe spécial langue régionale - Troisième concours
Second concours interne - Concours interne spécial langue régionale

Deuxième épreuve d'admissibilité

Épreuve écrite disciplinaire de mathématiques

L'épreuve est constituée d'un ensemble d'au moins trois exercices indépendants, permettant de vérifier les connaissances du candidat.

Durée : 3 heures

L'usage de la calculatrice est autorisé dans les conditions relevant de la circulaire du 17 juin 2021 BOEN du 29 juillet 2021.

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout document et de tout matériel électronique (y compris les montres connectées) est rigoureusement interdit.

Il appartient au candidat de vérifier qu'il a reçu un sujet complet et correspondant à l'épreuve à laquelle il se présente.

Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous devez le signaler très lisiblement sur votre copie, en proposer la correction et poursuivre l'épreuve en conséquence. De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, vous devez la (ou les) mentionner explicitement.

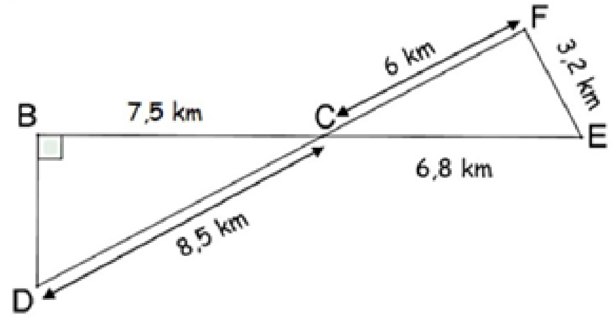
NB : Conformément au principe d'anonymat, votre copie ne doit comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé consiste notamment en la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de la signer ou de l'identifier.
Le fait de rendre une copie blanche est éliminatoire.

Tournez la page S.V.P

Ce sujet est composé de six exercices indépendants.

EXERCICE 1

Un professeur des écoles, organise avec sa classe de CM1 une randonnée à vélo. Le parcours BCEFCDB est représenté ci-contre.



1. Montrer que l'angle $\widehat{CFE}$ est droit.

2. Déterminer la longueur totale du parcours.

3. Sachant que la vitesse moyenne du groupe est de 14 km/h, la classe fera-t-elle le parcours en moins de 2 h 45 min ? Justifier la réponse.

EXERCICE 2

1. Quatre personnes A, B, C, D se partagent une somme d'argent. On appelle a, b, c et d les montants respectivement reçus par A, B, C et D. On sait par ailleurs que :

- a représente $\frac{1}{4}$ de la somme totale ;
- b représente $\frac{1}{3}$ de la somme totale ;
- C et D se partagent ce qui reste en prenant chacun le même montant.

a. Déterminer la proportion que représente c par rapport à la somme totale.

b. D reçoit 55 €. Déterminer les valeurs de a, b et c.

2. Quatre personnes E, F, G, H se partagent une somme d'argent s. On appelle e, f, g et h les montants respectivement reçus par E, F, G et H. On sait par ailleurs que :

- E perçoit le triple de F ;
- $g + h$ représente $\frac{1}{3}$ de la somme totale ;
- $g = h$.

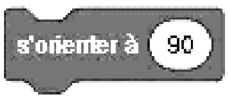
Exprimer la part de chacun en fonction de s.

EXERCICE 3

On donne le programme ci-contre qui permet de tracer des triangles de tailles différentes.
Ce programme comporte une variable nommée « côté ». Les longueurs sont données en pixels.

Script

Bloc Triangle

On rappelle que l'instruction 

signifie que l'on se dirige vers la droite.

1. Répondre aux questions suivantes sans justifier.
L'utilisateur clique sur le drapeau.
- **a.** Quelles sont les coordonnées du point de départ du tracé ?
- **b.** Combien de triangles sont dessinés par le script ?
- **c.** Quelle est la nature des triangles dessinés ?
- **d.** Quelle est la longueur (en pas) d'un côté du deuxième triangle tracé ?

2. Tracer le dessin obtenu par ce programme en prenant comme échelle 1 cm pour 20 pas.

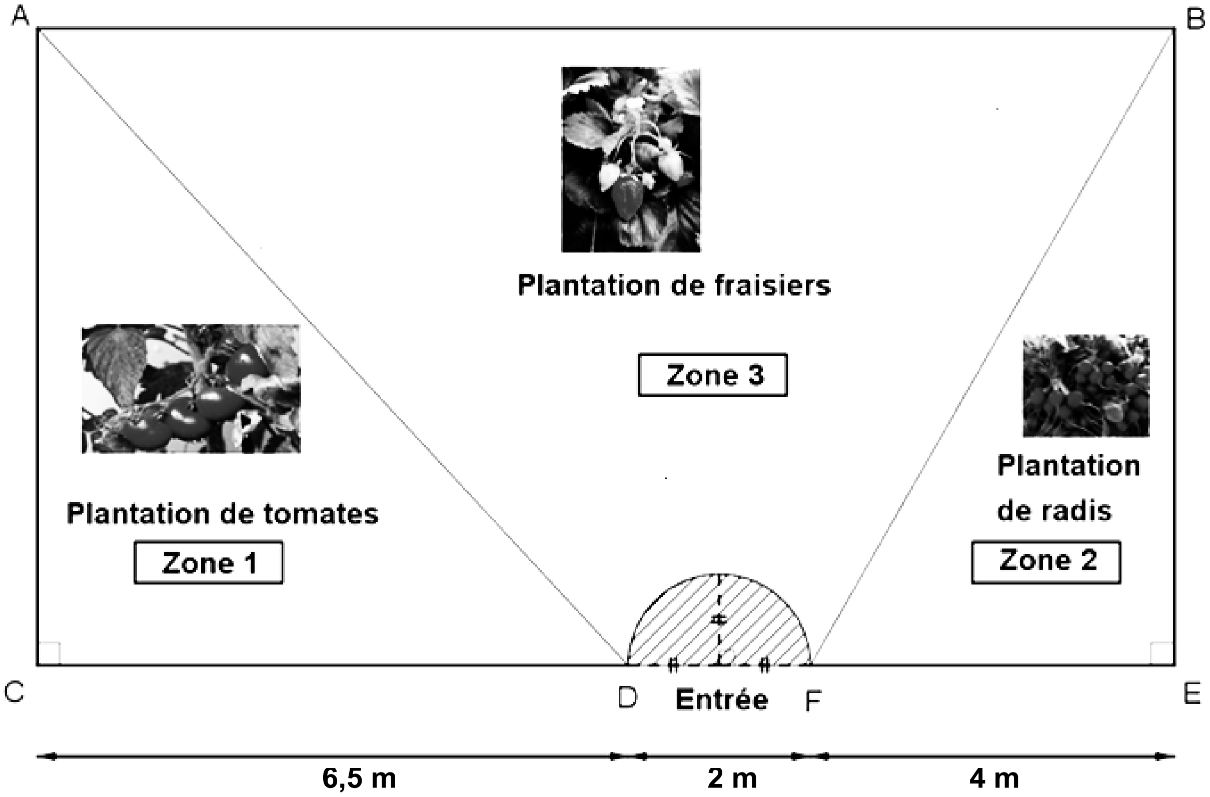
3. Si au lieu de triangles on voulait obtenir des hexagones réguliers, que devrait-on changer dans les instructions du bloc triangle ?

EXERCICE 4

Partie A

Dans une école, un jardin pédagogique est constitué d'un terrain rectangulaire ABEC dont l'aire est égale à 100 m².

Des enseignants de l'école décident de planter avec les élèves différentes cultures sur ce terrain : des fraisiers, des pieds de tomates et des radis.
La répartition dans le terrain est la suivante :



L'entrée est un demi-disque délimité par le demi-cercle de diamètre [DF] (zone hachurée sur la figure ci-dessus). Elle doit rester libre de toute plantation.

1. Justifier que la largeur du terrain correspondant au segment [CA] est égale à 8 m.

2. Tracer un plan du terrain avec les différentes zones à l'échelle 1 : 80.

3. Le directeur de l'école veut installer une bordure sur les trois côtés autour de la zone 1 où on plante des tomates.

   a. Montrer que AD = $\sqrt{106,25}$ m.

   b. Déterminer la longueur de la bordure qu'il doit acheter. On donnera le résultat en mètre, arrondi à l'unité.

   c. Les bordures sont vendues par rouleaux de 4 mètres. Déterminer le nombre de rouleaux nécessaire pour entourer la zone 1.

4. On veut déterminer l'aire de chacune des zones.

a. Calculer l'aire de la zone 1, en mètre carré.
b. Calculer l'aire de la zone 2, où on plante des radis, en mètre carré.
c. En déduire l'aire de la zone 3, où on plante des fraisiers (sans la zone « Entrée » hachurée sur la figure), en mètre carré. Donner la valeur exacte puis la valeur arrondie au dixième.

5. On s'intéresse à la culture des fraisiers.
Sachant qu'on peut planter 6 pieds de fraisiers par m² et qu'un pied de fraisier produit en moyenne 650 grammes de fraises par année, quelle masse de fraises les élèves peuvent-ils espérer récolter ? On donnera le résultat en kilogramme, arrondi à l'unité.

Partie B

Fin juin, l'école décide de récolter des fraises pour faire de la confiture. Les élèves récoltent ainsi 25 kg de fraises.

1. La recette de confiture de fraise dit que la quantité de sucre nécessaire doit correspondre à 55 % de la masse totale avant cuisson. Quelle masse de sucre, arrondi au kilogramme, le directeur doit-il acheter pour respecter cette recette ?

2. Sachant que 3 kg de fraises permettent de réaliser 4,8 L de confiture, combien de litres de confiture peut-on réaliser ?

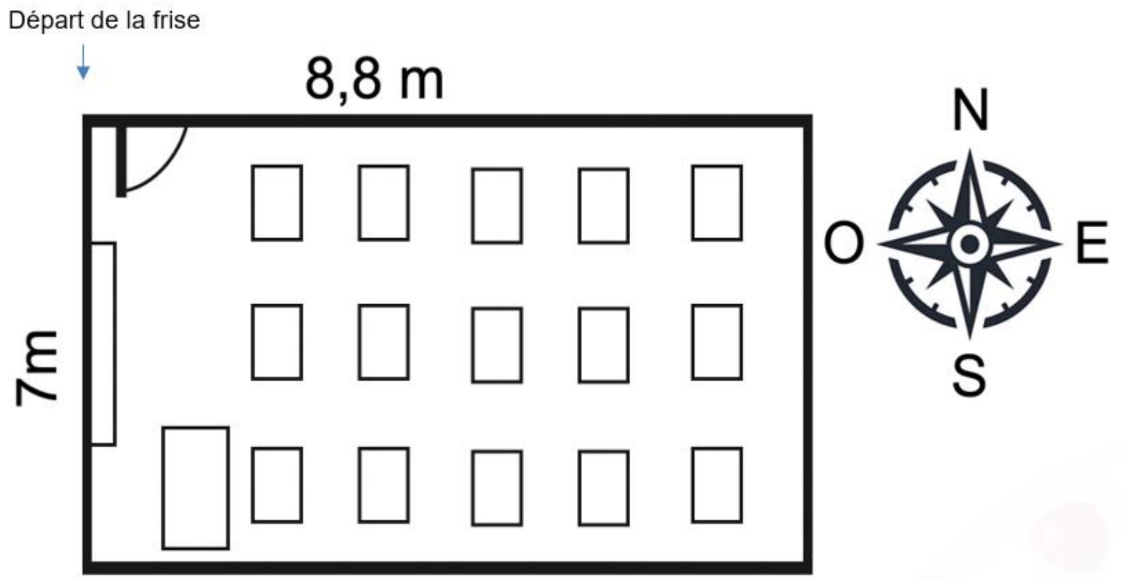
3. Il décide de conditionner cette confiture dans des pots cylindriques dont la base est un disque de diamètre 8,4 cm et dont la hauteur mesure 11 cm.
Sachant que les pots ne peuvent être remplis qu'au 8/9 de leur capacité maximale, déterminer le nombre de pots de confiture qu'il devrait réaliser.

On rappelle la formule suivante :

Volume d'un prisme ou d'un cylindre : $V = B \times h$,   *où* B *désigne l'aire de la base du prisme ou du cylindre et* h *sa hauteur.*

EXERCICE 5

Un enseignant souhaite décorer sa salle de classe avec une frise chronologique allant de la chute de l'Empire romain (476) à nos jours. Cette frise devra couvrir trois murs de la salle de classe rectangulaire en commençant par le coin nord-ouest et en tournant dans le sens des aiguilles d'une montre. La frise passe au-dessus de la porte et s'étend ainsi sur les murs nord, est et sud.



1. Pour effectuer cette frise l'enseignant prévoit d'assembler bord à bord des feuilles de format A4 (21 x 29,7 cm) dans le sens de la longueur.
   Montrer qu'il faudra 83 feuilles pour réaliser la frise.

2. Par combien de centimètres est représentée une année sur cette frise chronologique ? Arrondir au millimètre près.

3. L'enseignant a répertorié dans une feuille de calcul automatisé des dates importantes qu'il aimerait faire figurer sur cette frise.

D2 =(C2/29,7)+1

	A	B	C	D	E
1		Année	Nombre de cm du début de la frise		
2	Fin de l'antiquité / Début du Moyen-Âge	476	0	1	
3	Fin du Moyen-Âge / Début de l'époque moderne	1492			
4	Fin de l'époque moderne / Début de l'époque contemporaine	1789			
5					
6					

   a. Proposer une formule à valider dans la cellule C2, pouvant être étirée vers le bas afin de trouver tous les résultats de la colonne C.
   b. Sachant que la formule validée dans la cellule D2 est « =ENT(C2/29,7) + 1 », déterminer à quoi correspondent les nombres de la colonne D au sein de la salle de classe.
   On rappelle que « ENT(x) » renvoie la partie entière du nombre x.

4. Sur quel mur de la classe se trouvera l'événement « l'accostage de Christophe Colomb sur le continent américain », marquant la fin du Moyen-Âge, si on le positionne sur la frise ?

EXERCICE 6

Dans une école élémentaire de 150 élèves, 80 sont des filles. Le directeur veut mettre en place un « orchestre à l'école ». Il réalise une enquête auprès des familles de l'école afin de connaître les élèves qui pratiquent déjà un instrument de musique.

À l'issue de l'enquête, il apparaît que 24 % des élèves sont musiciens.
Parmi ces élèves, 16 sont des garçons.

1. Reproduire et compléter le tableau suivant.

	Nombre d'élèves musiciens	Nombre d'élèves non-musiciens	Total
Nombre de filles			
Nombre de garçons			
Total			150

2. Dans cette question, on écrira les résultats sous forme de fractions irréductibles.
On interroge un élève au hasard.
   a. Quelle est la probabilité pour que ce soit un garçon ?
   b. Quelle est la probabilité que ce soit une fille musicienne ?
   c. Quelle est la probabilité que ce soit un élève non-musicien ?

3. L'élève interrogé est un garçon. Quelle est la probabilité qu'il soit musicien ?

4. 30 % des filles musiciennes jouent d'un instrument à vent. Quel pourcentage cela représente-t-il par rapport à l'effectif total de l'école ?

Information aux candidats

Les codes doivent être reportés sur les rubriques figurant en en-tête de chacune des copies que vous remettrez.

Épreuve écrite disciplinaire de mathématiques

Externe

	Concours	Épreuve	Matière
Public	**EXT PU**	**102**	**9418**
Privé	**EXT PR**	**102**	**9418**

Concours Externe - Spécial langue régionale

	Concours	Épreuve	Matière
Public	**EXT LR PU**	**102**	**9418**
Privé	**EXT LR PR**	**102**	**9418**

Troisième concours

	Concours	Épreuve	Matière
Public	**3ème PU**	**102**	**9418**
Privé	**3ème PR**	**102**	**9418**

Second concours interne

	Concours	Épreuve	Matière
Public	**2INT PU**	**102**	**9418**
Privé	**2INT PR**	**102**	**9418**

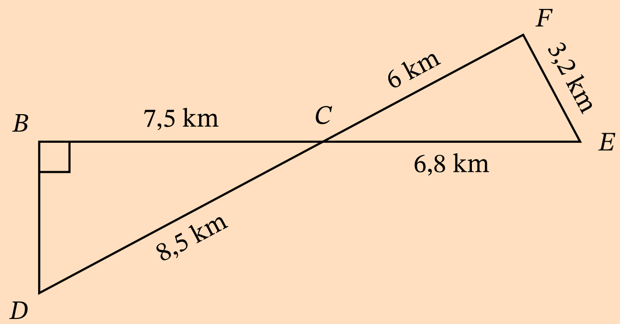
Concours interne - spécial langue régionale

	Concours	Épreuve	Matière
Public	**2INT LR PU**	**102**	**9418**
Privé	**2INT LR PR**	**102**	**9418**

IMPRIMERIE NATIONALE – 23 0904 – D'après documents fournis

Exercice n°1

Un professeur des écoles, organise avec sa classe de CM1 une randonnée à vélo. Le parcours BCEFCDB est représenté ci-contre.



1. Montrer que l'angle $\widehat{CFE}$ est droit.
2. Déterminer la longueur totale du parcours.
3. Sachant que la vitesse moyenne du groupe est de 14 km/h, la classe fera-t-elle le parcours en moins de 2 h 45 min ? Justifier la réponse.

1. Les mesures de longueurs sont en km. Dans le triangle CFE, $[CE]$ est le plus grand côté.

$$\left.\begin{array}{l} CE^2 = 6{,}8^2 = 46{,}24 \\ CF^2 + FE^2 = 6^2 + 3{,}2^2 = 36 + 10{,}24 = 46{,}24 \end{array}\right\} CE^2 = CF^2 + FE^2$$

   Comme $CE^2 = CF^2 + FE^2$, alors le triangle CFE est rectangle en F d'après la réciproque du théorème de Pythagore.
   L'angle $\widehat{CFE}$ est droit.

2. Pour calculer la longueur totale du parcours, en km, il nous faut connaître la longueur du segment $[BD]$.

   Dans le triangle DBC rectangle en B, le théorème de Pythagore permet d'écrire :

$$\begin{aligned} DB^2 &= DC^2 - BC^2 \\ DB^2 &= 8{,}5^2 - 7{,}5^2 \\ DB^2 &= 72{,}25 - 56{,}25 \\ DB^2 &= 16 \\ DB &= \sqrt{16} \\ DB &= 4 \end{aligned}$$

   On a alors : $DB + BC + CE + EF + FC + CD = 4$ km $+ 7{,}5$ km $+ 6{,}8$ km $+ 3{,}2$ km $+ 6$ km $+ 8{,}5$ km $= 36$ km.

   Le parcours total mesure 36 km.

3. Si on convertit la durée donnée en durée décimale, on obtient 2 h45 min $= 2{,}75$ h.

   Méthode 1 : À une vitesse de 14 km/h et un temps de 2,75 h, la distance parcourue serait de
   2,75 h $\times$ 14 km/h $= 38{,}5$ km.
   Comme le parcours ne mesure que 36 km, la classe mettra moins de 2h 45 min pour l'effectuer.

   Méthode 2 : On a la formule $v = \dfrac{d}{t}$, soit $t = \dfrac{d}{v}$. Donc, $t = \dfrac{36 \text{ km}}{14 \text{ km/h}} \approx 2{,}57$ h.
   Or, 2,57 h $<$ 2,75 h.

   La classe effectuera le parcours en moins de 2 h 45 min.

Exercice n°2

1. Quatre personnes A, B, C, D se partagent une somme d'argent. On appelle a, b, c et d les montants respectivement reçus par A, B, C et D. On sait par ailleurs que :
   - a représente $\frac{1}{4}$ de la somme totale ;
   - b représente $\frac{1}{3}$ de la somme totale ;
   - C et D se partagent ce qui reste en prenant chacun le même montant.

   (a) Déterminer la proportion que représente c par rapport à la somme totale.

   (b) D reçoit 55 €. Déterminer les valeurs de a, b et c.

2. Quatre personnes E, F, G, H se partagent une somme d'argent s. On appelle e, f, g et h les montants respectivement reçus par E, F, G et H. On sait par ailleurs que :
   - E perçoit le triple de F ;
   - $g+h$ représente $\frac{1}{3}$ de la somme totale ;
   - $g = h$.

   Exprimer la part de chacun en fonction de s.

1. (a) Soit S la somme totale partagée, on a : $a = \frac{1}{4}S$ et $b = \frac{1}{3}S$.

   Il reste donc $S - \frac{1}{4}S - \frac{1}{3}S = \frac{12S - 3S - 4S}{12} = \frac{5}{12}S$.

   C et D se partagent ce reste équitablement donc : $c = d = \frac{1}{2} \times \frac{5}{12}S = \frac{5}{24}S$.

   c représente $\frac{5}{24}$ de la somme totale.

   (b) $d = 55$ € donc, $c = d = 55$ €.

   Or, $c = 55 \text{ €} = \frac{5}{24}S$, soit $S = \frac{24}{5} \times ¶[0]55 = 264$ €.

   $b = \frac{1}{3}S = \frac{1}{3} \times 264 \text{ €} = 88$ €.

   $a = \frac{1}{4}S = \frac{1}{4} \times 264 \text{ €} = 66$ €.

   a, b et c valent respectivement 66 €, 88 € et 55 €.

2. L'énoncé nous fournit les données suivantes :

   (E1) $e + f + g + h = s$

   (E2) $e = 3f$

   (E3) $g + h = \frac{1}{3}s$

   (E4) $g = h$

   De (E3) et (E4), on en déduit que $h + h = \frac{1}{3}s$, soit $2h = \frac{1}{3}s$, ou encore $h = \frac{1}{6}s$.

   (E4) nous dit alors que $g = h = \frac{1}{6}s$.

   De (E1) et (E2), on en déduit que : $e + f + g + h = 3f + f + \frac{1}{3}s = s$. Soit $4f = s - \frac{1}{3}s = \frac{2}{3}s$ et $f = \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{6}s$.

   (E2) implique que $e = 3f = 3 \times \frac{1}{6}s = \frac{3}{6}s = \frac{1}{2}s$.

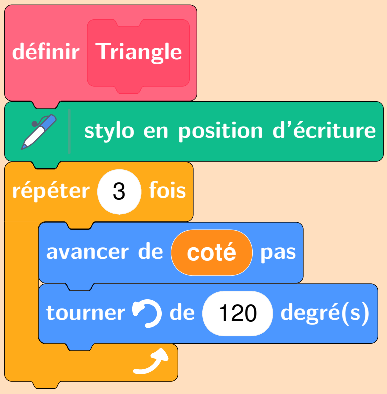
   E reçoit la moitié de la somme s, et F, G et H reçoivent chacun un sixième de s.

Exercice n°3

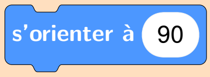
On donne le programme ci-contre qui permet de tracer des triangles de tailles différentes. Ce programme comporte une variable nommée « côté ». Les longueurs sont données en pixels.

Script

Bloc Triangle



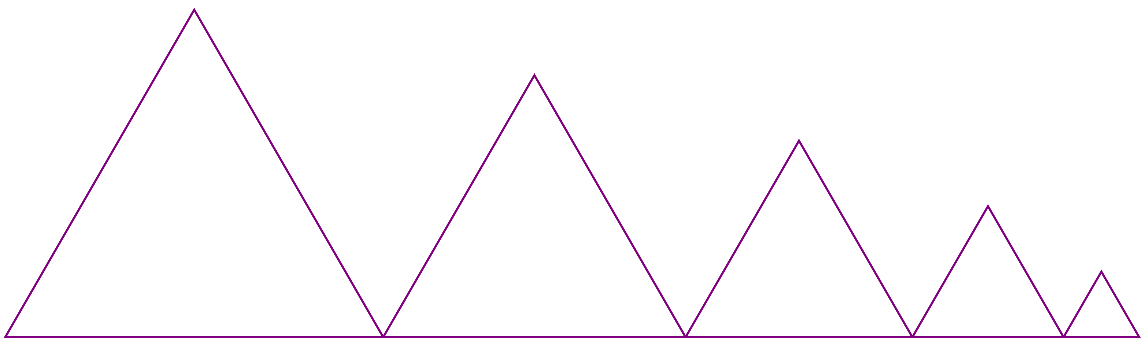
On rappelle que l'instruction



signifie que l'on se dirige vers la droite.

1. Répondre aux questions suivantes sans justifier. L'utilisateur clique sur le drapeau.
   (a) Quelles sont les coordonnées du point de départ du tracé ?
   (b) Combien de triangles sont dessinés par le script ?
   (c) Quelle est la nature des triangles dessinés ?
   (d) Quelle est la longueur (en pas) d'un côté du deuxième triangle tracé ?
2. Tracer le dessin obtenu par ce programme en prenant comme échelle 1 cm pour 20 pas.
3. Si au lieu de triangles on voulait obtenir des hexagones réguliers, que devrait-on changer dans les instructions du bloc triangle ?

1. (a) Les coordonnées du point de départ sont $(-75; 50)$.
   (b) Cinq triangles sont dessinés par le script.
   (c) Les triangles dessinés sont des triangles équilatéraux.
   (d) La longueur d'un côté du deuxième triangle est de 80 pas.
2. Dessin à l'échelle 1 cm pour 20 pas.



3. Pour un hexagone régulier, il faudrait tout d'abord modifier le nombre de côtés et donc remplacer le bloc 3 du bloc triangle par répéter 6 fois.

   D'autre part, l'angle de rotation du bloc 5 devrait être modifié en tourner à gauche de 60 degrés.

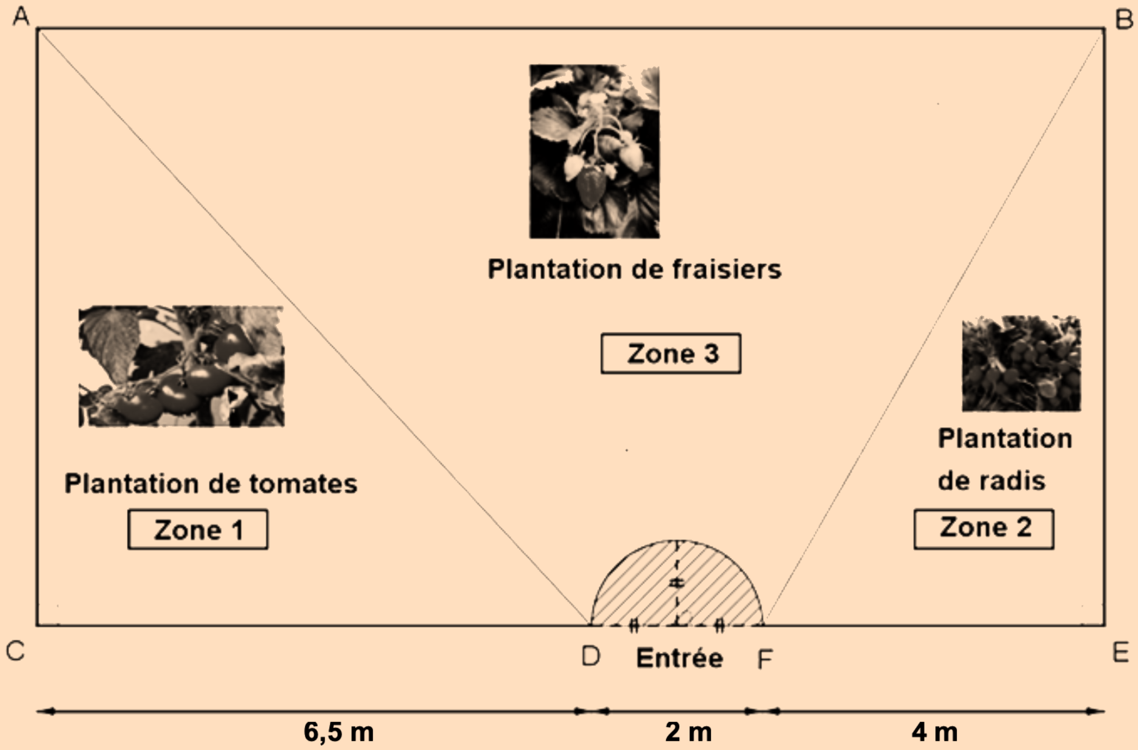
Exercice n°4

Partie A

Dans une école, un jardin pédagogique est constitué d'un terrain rectangulaire $ABEC$ dont l'aire est égale à 100 m^2.

Des enseignants de l'école décident de planter avec les élèves différentes cultures sur ce terrain : des fraisiers, des pieds de tomates et des radis.

La répartition dans le terrain est la suivante :



L'entrée est un demi-disque délimité par le demi-cercle de diamètre $[DF]$ (zone hachurée sur la figure ci-dessus). Elle doit rester libre de toute plantation.

1. Justifier que la largeur du terrain correspondant au segment $[CA]$ est égale à 8 m.
2. Tracer un plan du terrain avec les différentes zones à l'échelle 1 : 80.
3. Le directeur de l'école veut installer une bordure sur les trois côtés autour de la zone 1 où on plante des tomates.
   (a) Montrer que $AD = \sqrt{106,25}$ m.
   (b) Déterminer la longueur de la bordure qu'il doit acheter. On donnera le résultat en mètre, arrondi à l'unité.
   (c) Les bordures sont vendues par rouleaux de 4 mètres. Déterminer le nombre de rouleaux nécessaire pour entourer la zone 1.
4. On veut déterminer l'aire de chacune des zones.
   (a) Calculer l'aire de la zone 1, en mètre carré.
   (b) Calculer l'aire de la zone 2, où on plante des radis, en mètre carré.
   (c) En déduire l'aire de la zone 3, où on plante des fraisiers (sans la zone « Entrée » hachurée sur la figure), en mètre carré. Donner la valeur exacte puis la valeur arrondie au dixième.
5. On s'intéresse à la culture des fraisiers. Sachant qu'on peut planter 6 pieds de fraisiers par m2 et qu'un pied de fraisier produit en moyenne 650 grammes de fraises par année, quelle masse de fraises les élèves peuvent-ils espérer récolter ? On donnera le résultat en kilogramme, arrondi à l'unité.

Exercice n°4

Partie B

Fin juin, l'école décide de récolter des fraises pour faire de la confiture. Les élèves récoltent ainsi 25 kg de fraises.

1. La recette de confiture de fraise dit que la quantité de sucre nécessaire doit correspondre à 55 % de la masse totale avant cuisson. Quelle masse de sucre, arrondi au kilogramme, le directeur doit-il acheter pour respecter cette recette ?
2. Sachant que 3 kg de fraises permettent de réaliser 4,8 L de confiture, combien de litres de confiture peut-on réaliser ?
3. Il décide de conditionner cette confiture dans des pots cylindriques dont la base est un disque de diamètre 8,4 cm et dont la hauteur mesure 11 cm. Sachant que les pots ne peuvent être remplis qu'au 8/9 de leur capacité maximale, déterminer le nombre de pots de confiture qu'il devrait réaliser.

   On rappelle la formule suivante : Volume d'un prisme ou d'un cylindre : $V = B \times h$,
   où B désigne l'aire de la base du prisme ou du cylindre et h sa hauteur.

Partie A

1. Le terrain est un rectangle $ABEC$ d'aire 100 m^2.

   Sa longueur CE vaut : $CE = CD + DF + FE = 6{,}5\text{ m} + 2\text{ m} + 4\text{ m} = 12{,}5\text{ m}$.

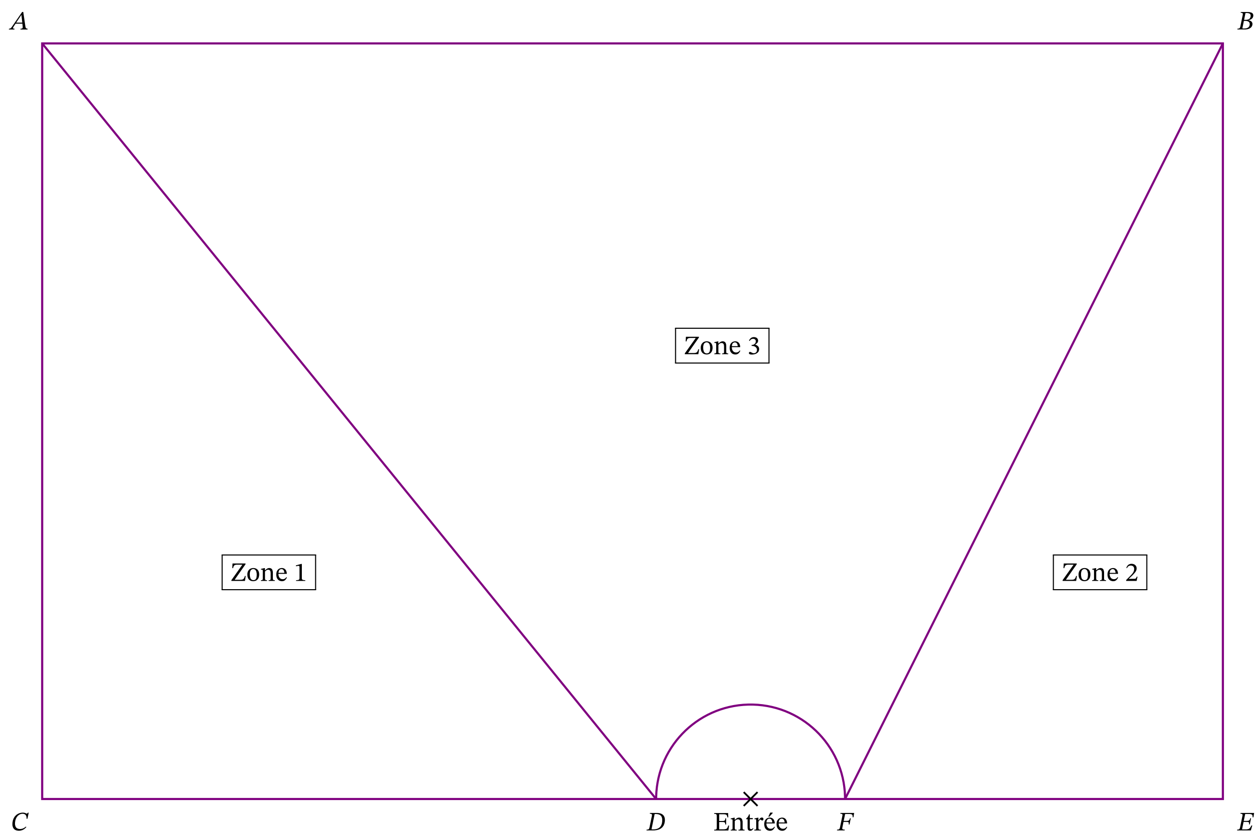
   Sachant que $\mathcal{A}(ABEC) = CE \times CA$, alors $CA = \dfrac{\mathcal{A}(ABEC)}{CE} = \dfrac{100\text{ m}^2}{12{,}5\text{ m}} = 8\text{ m}$.

   La longueur du segment $[CA]$ est égale à 8 m.

2. À l'échelle 1 : 80, on obtient les les mesures suivantes :

Longueur en cm dans la réalité	1 250 cm	800 cm	750 cm	100 cm
Longueur en cm sur le plan	15,625 cm	10 cm	9,375 cm	1,25 cm

↓ ÷80



3. (a) Avec des mesures de longueur en mètres, on a :

Dans le triangle DCA rectangle en C, le théorème de Pythagore permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
DA^2 &= DC^2 + CA^2\\
DA^2 &= 6{,}5^2 + 8^2\\
DA^2 &= 42{,}25 + 64\\
DA^2 &= 106{,}25\\
DA &= \sqrt{106{,}25}
\end{aligned}$$

La longueur du segment $[AD]$ est égale à $\sqrt{106,25}$ m.

(b) Soit L la longueur de la bordure de la zone 1.
$L = AD + DC + CA = \sqrt{106,25}\text{ m} + 6{,}5\text{ m} + 8\text{ m} \approx 24{,}81$ m.
La bordure autour de la zone 1 est d'environ 25 m.

(c) $25\text{ m} = 7 \times 4\text{ m} - 3\text{ m}$. Il faudra donc sept rouleaux de bordures pour entourer la zone 1.

4. Les zones 1 et 2 sont des triangles (rectangles). Leur aire se calcule grâce à la formule $\mathcal{A} = \dfrac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}$.

   (a) $\mathcal{A}_1 = \dfrac{CD \times CA}{2} = \dfrac{6{,}5\text{ m} \times 8\text{ m}}{2} = 26\text{ m}^2$. La zone 1 a une aire de 26 m^2.

   (b) $\mathcal{A}_2 = \dfrac{EF \times EB}{2} = \dfrac{4\text{ m} \times 8\text{ m}}{2} = 16\text{ m}^2$. La zone 2 a une aire de 16 m^2.

   (c) Pour déterminer l'aire $\mathcal{A}_3$ de la zone 3, il faut soustraire les aires des zones 1, 2 et de l'entrée à l'aire totale.
   Aire de l'entrée : $\mathcal{A}_E = \dfrac{\pi \times R^2}{2} = \dfrac{\pi \times (1\text{ m})^2}{2} = \dfrac{\pi}{2}\text{m}^2$.
   $\mathcal{A}_3 = \mathcal{A}_{ABEC} - \mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2 - \mathcal{A}_E = 100\text{ m}^2 - 26\text{ m}^2 - 16\text{ m}^2 - \dfrac{\pi}{2}\text{m}^2 = \left(58 - \dfrac{\pi}{2}\right)\text{m}^2$.
   La zone 3 a une aire de $\left(58 - \dfrac{\pi}{2}\right)\text{m}^2 \approx 56{,}4\text{ m}^2$.

5. $6 \times \left(58 - \dfrac{\pi}{2}\right) \approx 338,6$. Dans la zone 3, on peut donc planter 338 pieds de fraisiers.
   Sachant qu'un pied donne 650 g de fraise, on a alors : $338 \times 650\text{ g} = 219\,700\text{ g} = 219{,}7\text{ kg}$
   Les élèves peuvent espérer récolter environ 220 kg de fraise en une année.

Partie B

1. On suppose ici que la confiture de fraise se prépare uniquement à partir de sucre et de fraises.
   Le sucre représente 55 % de la masse totale avant cuisson, ce qui veut dire que les fraises représentent 45 %.

   Méthode 1 : Le sucre et les fraises sont dans un ratio de 55 : 45, ou encore 11 : 9 ce qui veut dire que pour 9 kg de fraises, on a 11 kg de sucre.
   Donc, pour 25 kg de fraise, soit $\dfrac{25}{9}$ fois plus de fraise, on a $\dfrac{25}{9} \times 11\text{ kg} \approx 30{,}6$ kg de sucre.

   Méthode 2 : Si les 25 kg de fraises représentent 45 % de la masse totale, alors la masse totale est égale à
   $25\text{ kg} \times 100 \div 45 \approx 55{,}55$ kg.
   Et 55 % de cette masse totale est égal à $\dfrac{55}{100} \times 55{,}55\text{ kg} \approx 30{,}6$ kg.

   Le directeur devra acheter 31 kg de sucre pour cette recette.

2. Si 3 kg de fraises permettent de faire 4,8 L de confiture, 25 kg de fraises permettent de faire $\dfrac{25\text{ kg} \times 4{,}8\text{ L}}{3\text{ kg}} = 40$ L.
   Avec 25 kg de fraises, on peut faire 40 L de confiture.

3. Un pot cylindrique d'un diamètre de 8,4 cm, soit de rayon 4,2 cm et de hauteur 11 cm a pour volume :
   $\mathcal{V} = \text{aire de la base} \times \text{hauteur} = \pi \times (4{,}2\text{ cm})^2 \times 11\text{ cm} = 194,04\,\pi\text{ cm}^3$.
   Or, $194,04\,\pi\text{ cm}^3 = 0,19404\,\pi\text{ dm}^3 = 0,19404\,\pi$ L.
   Les pots étant remplis au 8/9 de leur capacité, la capacité de confiture qu'il est possible de mettre dans un pot est donc de $\dfrac{8}{9} \times 0,19404\,\pi\text{ L} \approx 0,17248\,\pi$ L.
   On a 40 L de confiture et $\dfrac{40\text{ L}}{0,17248\,\pi\text{ L}} \approx 73,82$. Pour 40 L de confiture, il faudra 74 pots.

Exercice n°5

Un enseignant souhaite décorer sa salle de classe avec une frise chronologique allant de la chute de l'Empire romain (476) à nos jours. Cette frise devra couvrir trois murs de la salle de classe rectangulaire en commençant par le coin nord-ouest et en tournant dans le sens des aiguilles d'une montre. La frise passe au-dessus de la porte et s'étend ainsi sur les murs nord, est et sud.

1. Pour effectuer cette frise l'enseignant prévoit d'assembler bord à bord des feuilles de format A4 ($21 \times 29{,}7$ cm) dans le sens de la longueur. Montrer qu'il faudra 83 feuilles pour réaliser la frise.
2. Par combien de centimètres est représentée une année sur cette frise chronologique ? Arrondir au millimètre.
3. L'enseignant a répertorié dans une feuille de calcul automatisé des dates importantes qu'il aimerait faire figurer sur cette frise.

D2	▼	f_x ∑ ▼ =	(C2/29,7)+1 ▼

	A	B	C	D
1		Année	Nombre de cm du début de la frise	
2	Fin de l'Antiquité/Début du Moyen-Âge	476	0	1
3	Fin du Moyen-Âge/Début de l'époque moderne	1492		
4	Fin de l'époque moderne/Début de l'époque contemporaine	1789		
5				

   (a) Proposer une formule à valider dans la cellule `C2`, pouvant être étirée vers le bas afin de trouver tous les résultats de la colonne `C`.
   (b) Sachant que la formule validée dans la cellule `D2` est « `=ENT(C2/29,7)+1` », déterminer à quoi correspondent les nombres de la colonne `D` au sein de la salle de classe.
   On rappelle que « ENT(x) » renvoie la partie entière du nombre x.

4. Sur quel mur de la classe se trouvera l'événement « l'accostage de Christophe Colomb sur le continent américain », marquant la fin du Moyen-Âge, si on le positionne sur la frise ?

---

1. La somme des mesures des trois murs qui porteront la frise est égale à : $2 \times 8{,}8\text{ m} + 7\text{ m} = 24{,}6\text{ m} = 2\,460\text{ cm}$.

   Une feuille au format A4 a une longueur de 29,7 cm. Or, $\dfrac{2\,460\text{ cm}}{29{,}7\text{ cm}} \approx 82,82$.

   Il faudra 83 feuilles pour réaliser la frise.

2. Entre la chute de l'Empire romain et l'année 2023, il y a 1547 années.

   Ces 1547 années doivent êtres représentées sur une frise de 2 460 cm. Or, $\dfrac{2\,460\text{ cm}}{1547} \approx 1{,}59$ cm.

   Une année sur la frise chronologique est représentée par environ 1,6 cm.

3. (a) Dans la cellule `C2`, on pourrait proposer `=(B2-476)*1,6`, ou `=(B2-476)*1,59` pour plus de précision.

   (b) La formule `ENT(C2/29,7)+1` donne le numéro de la feuille sur laquelle se trouvera la date en prenant comme origine de la numérotation la feuille n°1 qui se situe au coin du mur NO.

4. $1492 - 476 = 1016$. L'événement « accostage de Christophe Colomb sur le continent américain », daté de 1492 est à 1016 années de l'origine de la frise.

   Sachant qu'une année est représentée par 1,59 cm, 1016 années seront représentées par environ

   $1016 \times 1{,}59\text{ cm} = 1\,615{,}44\text{ cm} = 16{,}15\text{ m}$.

   Or, le coin au SE est à $8{,}8\text{ m} + 7\text{ m} = 15{,}8\text{ m}$ du départ de la frise.

   Cet événement est sur le mur sud.

Exercice n°6

Dans une école élémentaire de 150 élèves, 80 sont des filles. Le directeur veut mettre en place un « orchestre à l'école ». Il réalise une enquête auprès des familles de l'école afin de connaître les élèves qui pratiquent déjà un instrument de musique.
À l'issue de l'enquête, il apparaît que 24 % des élèves sont musiciens. Parmi ces élèves, 16 sont des garçons.

1. Reproduire et compléter le tableau suivant.

	Nombre d'élèves musiciens	Nombre d'élèves non-musiciens	Total
Nombre de filles			
Nombre de garçons			
Total			150

2. Dans cette question, on écrira les résultats sous forme de fractions irréductibles.
   On interroge un élève au hasard.
   (a) Quelle est la probabilité pour que ce soit un garçon ?
   (b) Quelle est la probabilité que ce soit une fille musicienne ?
   (c) Quelle est la probabilité que ce soit un élève non-musicien ?
3. L'élève interrogé est un garçon. Quelle est la probabilité qu'il soit musicien ?
4. 30 % des filles musiciennes jouent d'un instrument à vent.
   Quel pourcentage cela représente-t-il par rapport à l'effectif total de l'école ?

1. Tableau récapitulatif :

	Nombre d'élèves musiciens	Nombre d'élèves non-musiciens	Total
Nombre de filles	20	60	80
Nombre de garçons	16	54	70
Total	36	114	150

2. On interroge un élève au hasard. Il y a donc équiprobabilité entre tous les élèves.
   (a) $\mathcal{P}_{2a} = \dfrac{\text{nombre de garçons}}{\text{nombre total d'élèves}} = \dfrac{70}{150} = \dfrac{7}{15}$.
   La probabilité que l'élève choisi soit un garçon est de $\dfrac{7}{15}$.
   (b) $\mathcal{P}_{2b} = \dfrac{\text{nombre de filles musiciennes}}{\text{nombre total d'élèves}} = \dfrac{20}{150} = \dfrac{2}{15}$.
   La probabilité que l'élève choisi soit une fille musicienne est de $\dfrac{2}{15}$.
   (c) $\mathcal{P}_{2c} = \dfrac{\text{nombre d'élèves non-musiciens}}{\text{nombre total d'élèves}} = \dfrac{114}{150} = \dfrac{19}{25}$.
   La probabilité que l'élève choisi soit un élève non musicien est de $\dfrac{19}{25}$.
3. $\mathcal{P}_{3} = \dfrac{\text{nombre de garçons musiciens}}{\text{nombre de garçons}} = \dfrac{16}{70} = \dfrac{8}{35}$.
   La probabilité que l'élève choisi soit musicien, sachant que c'est un garçon est de $\dfrac{8}{35}$.
4. 30 % des 80 filles représentent $\dfrac{30}{100} \times 20$ filles $= 6$ filles.
   Il y a donc 6 filles qui jouent un instrument à vent sur un total de 150 élèves.
   $\dfrac{6}{150} \times 100 = 4$, cela représente un pourcentage de 4 %.
   4 % des élèves sont des filles jouant un instrument à vent.

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE
ET DE LA JEUNESSE
Liberté
Égalité
Fraternité

EST MAT 2

SESSION 2023

CONCOURS DE RECRUTEMENT DE PROFESSEURS DES ECOLES

Concours externe - Concours externe spécial langue régionale - Troisième concours
Second concours interne - Concours interne spécial langue régionale

Deuxième épreuve d'admissibilité

Épreuve écrite disciplinaire de mathématiques

L'épreuve est constituée d'un ensemble d'au moins trois exercices indépendants, permettant de vérifier les connaissances du candidat.

Durée : 3 heures

L'usage de la calculatrice est autorisé dans les conditions relevant de la circulaire du 17 juin 2021 BOEN du 29 juillet 2021.

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout document et de tout matériel électronique est rigoureusement interdit.

Il appartient au candidat de vérifier qu'il a reçu un sujet complet et correspondant à l'épreuve à laquelle il se présente.

Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous devez le signaler très lisiblement sur votre copie, en proposer la correction et poursuivre l'épreuve en conséquence. De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, vous devez la (ou les) mentionner explicitement.

NB : Conformément au principe d'anonymat, votre copie ne doit comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé consiste notamment en la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de la signer ou de l'identifier.
Le fait de rendre une copie blanche est éliminatoire.

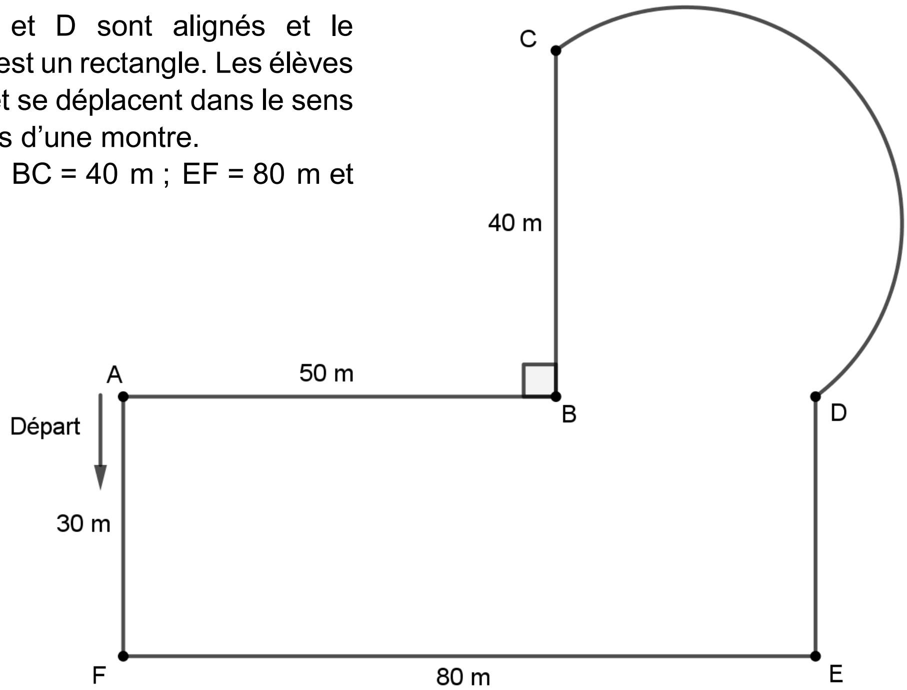
Tournez la page S.V.P

Ce sujet est composé de six exercices indépendants.

EXERCICE 1

Une directrice d’école primaire souhaite inscrire les élèves de l’école à une course solidaire d’action contre la faim afin de les sensibiliser à la sous-nutrition dans le monde.
Il s’agit pour chaque élève de faire le plus de tours possible d’un parcours prédéfini. Pour chaque tour effectué, l’élève récolte une somme d’argent fixe qui sera versée à l’association caritative.

La directrice décide de faire courir les élèves dans la cour de l’école, le long d’un parcours schématisé ci-dessous. Une partie du parcours est constituée d’un demi-cercle de diamètre [CD] et les longueurs sont données en mètre.
Les points A, B, et D sont alignés et le quadrilatère AFED est un rectangle. Les élèves partent du point A et se déplacent dans le sens inverse des aiguilles d’une montre.
On a : AB = 50 m ; BC = 40 m ; EF = 80 m et FA = 30 m.



1. Calculer la longueur du segment [CD].

2. Montrer que la longueur du parcours, arrondie au mètre, est 309 m.
On utilisera cette valeur dans la suite de l’exercice.

3. Construire un plan du parcours à l’échelle 1/800.

4. Killian a effectué un tour complet en 3 minutes.
À quelle vitesse moyenne Killian a-t-il couru ? On donnera le résultat en mètre par seconde arrondi au centième, puis en kilomètre par heure, arrondi au dixième.

5. On suppose que Sophia court à une vitesse constante de 7 km/h.
- **a.** Combien de tours complets pourrait-elle effectuer à cette vitesse en 18 minutes ?
- **b.** On désigne par S le point du parcours où Sophia se trouve au bout de 18 minutes de course. Placer le point S sur le plan réalisé à la question **3.**

6. L'école est composée de 325 élèves. Le tableau ci-dessous indique le nombre de tours complets effectués par les élèves.

Nombre de tours	2	3	4	5	6	7	8
Nombre d'élèves	52	52	78	65	39	26	13

a. Quel est le nombre moyen de tours complets effectués ?
b. Quelle est l'étendue de cette série statistique ?
c. Déterminer la médiane de cette série statistique.
d. Interpréter le résultat de la question **c.**
e. Déterminer le premier et le troisième quartile de cette série.
f. Quel pourcentage d'élèves a réussi à faire au moins 4 tours ?

EXERCICE 2

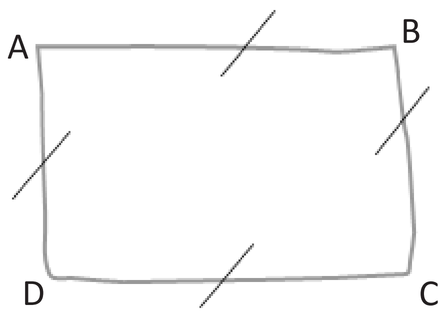
Un rectangle est défini dans le dictionnaire de la façon suivante :
« Un rectangle est un quadrilatère dont les quatre angles sont droits. »

1. Un quadrilatère qui possède deux angles droits est-il un rectangle ? Justifier.

2. Dans une classe de CE2, une enseignante demande à ses élèves de compléter la phrase suivante : « Un rectangle est un quadrilatère dont … ».
Voici deux réponses proposées :
Élève A : « Un rectangle est un quadrilatère dont les côtés opposés sont de même longueur ».
Élève B : « Un rectangle est un quadrilatère dont les diagonales sont de même longueur ».
   a. Préciser en quoi la réponse de l'élève A ne pourrait pas être admise comme définition mathématique du rectangle.
   b. Préciser en quoi la réponse de l'élève B ne pourrait pas être admise comme définition mathématique du rectangle.

3. Qu'elle est la nature d'un rectangle dont les diagonales sont perpendiculaires ?

4. En s'appuyant sur le codage du quadrilatère ci-après dessiné à main levée, préciser la nature du quadrilatère en question en justifiant la réponse.



Tournez la page S.V.P.

EXERCICE 3

Voici deux programmes de calcul :

Programme A

Programme B

Choisir un nombre
Prendre son double
Ajouter 5
Calculer le carré du résultat
Retourner le résultat trouvé

1. Montrer que si l'utilisateur saisit le nombre 2, alors le programme A retourne le nombre 54.

2. Calculer le résultat obtenu avec le programme A si le nombre saisi par l'utilisateur est 1,15.

3. Pour quel(s) nombre(s) de départ le programme A retourne-t-il le nombre 0 ?

4. **a.** Si l'utilisateur saisit le nombre 3, quel résultat le programme B retourne-t-il ?

b. Si l'utilisateur saisit le nombre $\frac{3}{4}$, quel résultat le programme B retourne-t-il ?

5. On détermine les résultats suivants retournés par le programme B à l'aide d'une feuille de calcul automatisé.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	
2	25	49	81	121	169	225	289	361	441	
3										

a. Quelle cellule du tableur permet de retrouver la réponse à la question **4.a.** ci-dessus ?

b. Quelle formule a pu être saisie dans la cellule A2 de la feuille de calcul automatisé afin de la copier-glisser sur la ligne 2 ?

6. **a.** Pour quel nombre de départ le programme B retourne-t-il le nombre zéro ?

b. Ce nombre de départ est-il rationnel ? Justifier.

c. Ce nombre de départ est-il décimal ? Justifier.

7. Pour quel(s) nombre(s) de départ le programme A retourne-t-il le même résultat que le programme B ?

EXERCICE 4

Deux élèves de CM2, Jeanne et Teddy, jouent à la bataille navale. Il s'agit d'un jeu de société, appelé également « touché-coulé ».

Les deux joueurs doivent commencer par placer quatre navires horizontalement ou verticalement (sans chevauchement) sur leur grille de 8 lignes et 8 colonnes, tenue secrète : 1 navire de deux cases, 2 navires de trois cases et 1 navire de quatre cases.

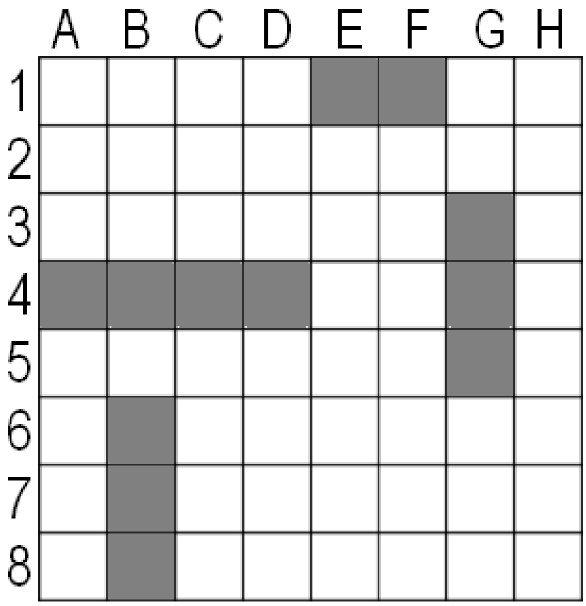
Ils doivent ensuite tenter de faire « couler » les navires adverses en « touchant » toutes les cases de chaque navire de l'autre joueur. Pour cela, chacun, à son tour, énonce une case de la grille, sous le format « lettre-nombre », par exemple C2.

Lorsqu'un joueur énonce une case, son adversaire répond :

- « À l'eau ! », si la case énoncée est vide ;
- « Touché ! », si la case énoncée est occupée par un morceau de navire et si les autres parties du navire n'ont pas encore toutes été touchées ;
- « Touché-coulé ! », si la case énoncée est occupée par un morceau de navire et si toutes les autres parties du navire ont déjà été touchées.

Le gagnant est le joueur qui fait « couler » chez son adversaire tous les navires (au sens de toucher toutes les cases de chacun d'eux) avant que les siens ne le soient.

Voici ci-dessous la grille de Teddy : les quatre bateaux sont schématisés par des rectangles gris.



On suppose qu'à chaque tir, Jeanne choisit au hasard et de manière équiprobable une case de la grille qu'elle n'a pas énoncée précédemment.

1. Au premier essai :

   a. Quelle est la probabilité que Jeanne touche un bateau ?

   b. Quelle est la probabilité que Jeanne ne touche aucun bateau ?

   c. Un des bateaux a une chance sur seize d'être touché. De combien de cases est-il composé ?

   d. Jeanne choisit une case de la colonne B. Quelle est la probabilité qu'elle touche un bateau ?

2. Au premier essai de la partie, Jeanne désigne la case « E1 ». Teddy annonce « Touché ! ». Jeanne souhaite couler le bateau touché et choisit une case adjacente à la case « E1 ». Quelle est la probabilité qu'elle coule le bateau au coup suivant ? Justifier.

3. Teddy annonce « À l'eau ! » pour les deux premiers essais de Jeanne. Quelle est la probabilité de toucher un bateau pour son troisième essai ?

EXERCICE 5

Pour choisir une unité de température, les physiciens se sont heurtés à l'absence de « température zéro » (le zéro absolu n'était pas connu à l'époque). Deux systèmes principaux ont été créés et restent utilisés : le degré Celsius (°C) et le degré Fahrenheit (°F).
Voici ci-dessous une formule permettant de passer de la mesure d'une température en degré Fahrenheit (notée F) vers la mesure de la même température en degré Celsius (notée C).

$$C = (F - 32) \times \frac{5}{9}$$

1. En utilisant cette formule, convertir 95°F en degré Celsius.

2. En utilisant cette formule, convertir 5°C en degré Fahrenheit.

3. Existe-t-il des températures pour lesquelles la mesure en degrés Celsius est égale à la mesure en degrés Fahrenheit ? Donner toutes les réponse possibles en justifiant.

EXERCICE 6

Un professeur des écoles d'une classe de CE1 présente à ses élèves une règle de calcul qui permet de déterminer avec ses dix doigts et ses dix orteils le produit de deux nombres entiers compris entre 5 et 10 en utilisant les résultats des tables appris précédemment. Il s'appuie sur l'exemple suivant :

Effectuons 6×7. *- Avec le pied et la main gauches, on lève les 5 orteils et 1 doigt, représentant ainsi le 6.* *- Avec le pied et la main droites, on lève les 5 orteils et 2 doigts, représentant ainsi le 7.* *Pour le calcul on ne regarde que les mains et on procède de la manière suivante : La somme du nombre de doigts levés nous indique un nombre de dizaines, le produit des doigts baissés nous indique un nombre d'unités. Ici on a :* $(1 + 2)$ *dizaines et* (4×3) *unités, soit encore* 3 *dizaines* et 12 *unités. On obtient donc le nombre* 42.

1. Appliquer cette règle pour calculer le produit 6×8.

2. On note *g* le nombre de doigts levés de la main gauche et *d* le nombre de doigts levés de la main droite.
   a. Que représentent dans ce contexte les nombres $(5 - g)$ et $(5 - d)$?
   b. Démontrer l'égalité : $(5 + g)(5 + d) = 10(g + d) + (5 - g)(5 - d)$.
   c. Conclure quant à la validité de la règle de calcul.

Information aux candidats

Les codes doivent être reportés sur les rubriques figurant en en-tête de chacune des copies que vous remettrez.

Épreuve écrite disciplinaire de mathématiques

Externe

	Concours	Épreuve	Matière
Public	**EXT PU**	**102**	**9418**
Privé	**EXT PR**	**102**	**9418**

Concours Externe - Spécial langue régionale

	Concours	Épreuve	Matière
Public	**EXT LR PU**	**102**	**9418**
Privé	**EXT LR PR**	**102**	**9418**

Troisième concours

	Concours	Épreuve	Matière
Public	**3ème PU**	**102**	**9418**
Privé	**3ème PR**	**102**	**9418**

Second concours interne

	Concours	Épreuve	Matière
Public	**2INT PU**	**102**	**9418**
Privé	**2INT PR**	**102**	**9418**

Concours interne - spécial langue régionale

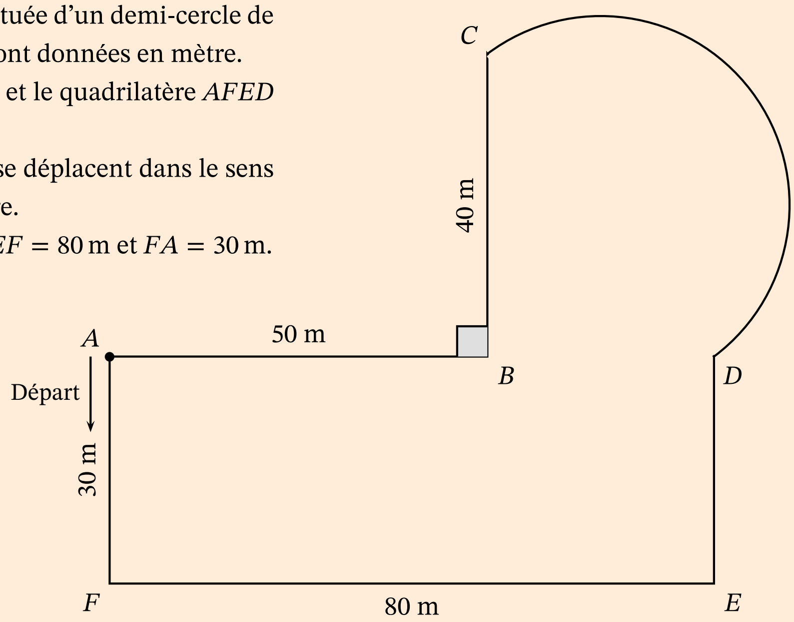
	Concours	Épreuve	Matière
Public	**2INT LR PU**	**102**	**9418**
Privé	**2INT LR PR**	**102**	**9418**

IMPRIMERIE NATIONALE – 23 0905 – D'après documents fournis

Exercice n°1

Une directrice d'école primaire souhaite inscrire les élèves de l'école à une course solidaire d'action contre la faim afin de les sensibiliser à la sous-nutrition dans le monde.
Il s'agit pour chaque élève de faire le plus de tours possible d'un parcours prédéfini. Pour chaque tour effectué, l'élève récolte une somme d'argent fixe qui sera versée à l'association caritative.
La directrice décide de faire courir les élèves dans la cour de l'école, le long d'un parcours schématisé ci-dessous.

Une partie du parcours est constituée d'un demi-cercle de diamètre $[CD]$ et les longueurs sont données en mètre.
Les points A, B, et D sont alignés et le quadrilatère $AFED$ est un rectangle.
Les élèves partent du point A et se déplacent dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.
On a : $AB = 50\,\text{m}$; $BC = 40\,\text{m}$; $EF = 80\,\text{m}$ et $FA = 30\,\text{m}$.



1. Calculer la longueur du segment $[CD]$.
2. Montrer que la longueur du parcours, arrondie au mètre, est $309\,\text{m}$.
   On utilisera cette valeur dans la suite de l'exercice.
3. Construire un plan du parcours à l'échelle 1/800.
4. Killian a effectué un tour complet en 3 minutes.
   À quelle vitesse moyenne Killian a-t-il couru ? On donnera le résultat en mètre par seconde arrondi au centième, puis en kilomètre par heure, arrondi au dixième.
5. On suppose que Sophia court à une vitesse constante de $7\,\text{km/h}$.

   (a) Combien de tours complets pourrait-elle effectuer à cette vitesse en 18 minutes ?
   (b) On désigne par S le point du parcours où Sophia se trouve au bout de 18 minutes de course.
   Placer le point S sur le plan réalisé à la question 3.

6. L'école est composée de 325 élèves. Le tableau ci-dessous indique le nombre de tours complets effectués par les élèves.

Nombre de tours	2	3	4	5	6	7	8
Nombre d'élèves	52	52	78	65	39	26	13

   (a) Quel est le nombre moyen de tours complets effectués ?
   (b) Quelle est l'étendue de cette série statistique ?
   (c) Déterminer la médiane de cette série statistique.
   (d) Interpréter le résultat de la question c.
   (e) Déterminer le premier et le troisième quartile de cette série.
   (f) Quel pourcentage d'élèves a réussi à faire au moins 4 tours ?

1. Le point B appartient à la droite (AD) puisque les points A, B et D sont alignés. Comme l'angle $\widehat{ABC}$ est droit, alors le triangle DBC est rectangle en B.

   $BC = 40\,\text{m}$ et $BD = AD - AB = FE - AB = 80\,\text{m} - 50\,\text{m} = 30\,\text{m}$.

   Dans le triangle DBC rectangle en B, le théorème de Pythagore permet d'écrire :

$$\begin{aligned} DC^2 &= DB^2 + BC^2 \\ DC^2 &= 30^2 + 40^2 \\ DC^2 &= 900 + 1\,600 \\ DC^2 &= 2\,500 \\ DC &= \sqrt{2\,500} \\ DC &= 50\,\text{m} \end{aligned}$$

   Le segment $[CD]$ mesure $50\,\text{m}$.

2. Soit ℓ la longueur du parcours.

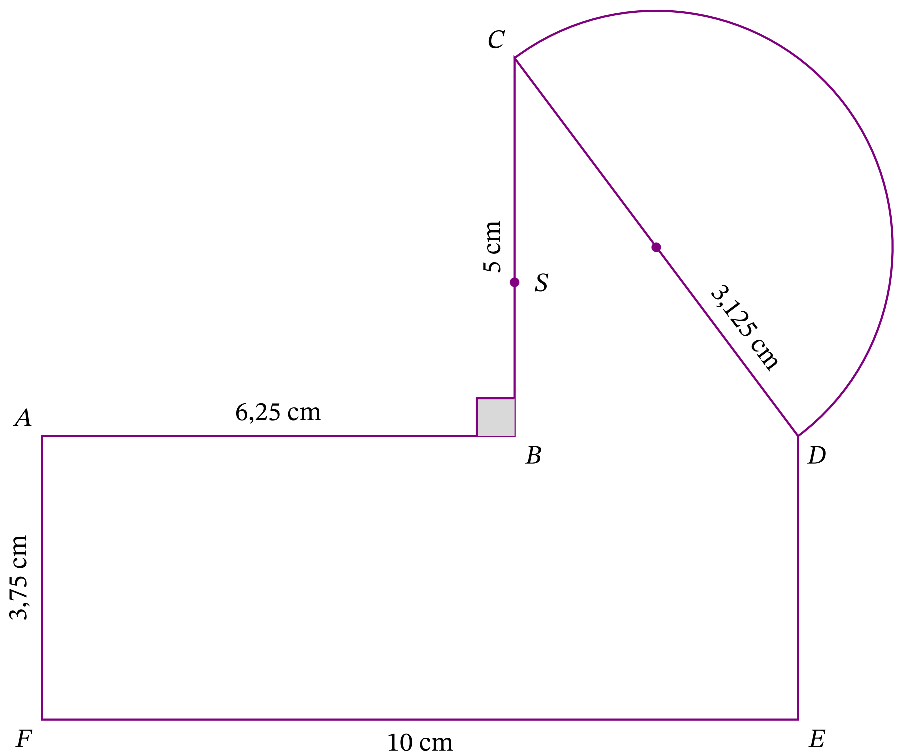
$$\begin{aligned} \ell &= AF + FE + ED + \overset{\frown}{DC} + CB + BA \\ &= 30\,\text{m} + 80\,\text{m} + 30\,\text{m} + \frac{1}{2} \times (2\pi \times 25\,\text{m}) + 40\,\text{m} + 50\,\text{m} \\ &= 230\,\text{m} + 25\pi\,\text{m} \\ &\approx 308{,}54\,\text{m} \end{aligned}$$

   Le parcours mesure environ $309\,\text{m}$.

3. À l'échelle 1 : 800, on obtient les les mesures suivantes :

Segment	AF, ED	FE	$\frac{1}{2}DC$	CB	BA	
Longueur en cm dans la réalité	3 000	8 000	2 500	4 000	5 000	$\downarrow \div 800$
Longueur en cm sur le plan	3,75	10	3,125	5	6,25	

   Ce qui donne :



4. Killian a effectué 309 m en 3 minutes, soit 180 secondes. Sa vitesse est donc de

$$v = \frac{d}{t} = \frac{309\,\text{m}}{180\,\text{s}} \approx 1{,}716\,7\,\text{m/s}$$

On peut également dire qu'il a effectué 0,309 km en $\frac{3}{60}$ heure = 0,05 heure. Sa vitesse est aussi de

$$v = \frac{d}{t} = \frac{0{,}309\,\text{km}}{0{,}05\,\text{h}} \approx 6{,}18\,\text{km/h}$$

Killian a couru a une vitesse d'environ 1,72 m/s, soit 6,2 km/h.

5. (a) À une vitesse de 7 km/h, Sophia va parcourir en 18 minutes une distance égale à

$$d = v \times t = 7\,\text{km/h} \times \frac{18}{60}\,\text{h} = 2{,}1\,\text{km} = 2\,100\,\text{m}$$

Or, $2\,100\,\text{m} \div 309\,\text{km} \approx 6,8$ donc,

Sophia va effecteur six tours complets en 18 minutes.

(b) Sophia a parcouru presque sept tours. Calculons la distance qui la sépare du point A de départ du parcours :

$7 \times 309\,\text{m} = 2\,163\,\text{m}$ et $2\,163\,\text{m} - 2\,100\,\text{m} = 63\,\text{m}$.

Par conséquent, Sophia se trouve à 63 m de A. Comme AB mesure 50 m, Sophia se trouve alors à 13 m de B, en partant vers A. À l'échelle 1 : 800, cela correspond à une mesure de $1\,300\,\text{cm} \div 800 = 1{,}625\,\text{cm}$.

6. (a) La somme des données de la série est :

$$52 \times 2 + 52 \times 3 + 78 \times 4 + 65 \times 5 + 39 \times 6 + 26 \times 7 + 13 \times 8 = 1\,417$$

L'effectif total de la série est :

$$52 + 52 + 78 + 65 + 39 + 26 + 13 = 325$$

Donc la moyenne de la série est égale à :

$$\frac{1\,417}{325} = 4{,}36$$

Les élèves ont effectué en moyenne 4,36 tours.

(b) L'étendue est égale à 8 tours − 2 tours = 6 tours.

L'étendue de cette série est de 6 tours.

(c) On commence par construire le tableau des effectifs croissants (E.C.C.) :

Nombre de tours	2	3	4	5	6	7	8
Nombre d'élèves	52	52	78	65	39	26	13
E.C.C.	52	104	182	247	286	312	325

Puis on détermine la médiane : l'effectif total est de 325 élèves. Or, $325 \div 2 = 162,5$.

La médiane est donc la 163$^{\text{e}}$ valeur. Par lecture du tableau :

La valeur de la médiane est de 4 tours.

(d) Cette valeur signifie que la moitié des élèves a fait 4 tours ou moins, et la moitié en a fait 4 ou plus.

(e) Premier quartile : $\frac{1}{4} \times 325 = 81,25$ donc, le premier quartile correspond à la 82$^{\text{e}}$ valeur, qui est 3.

Troisième quartile : $\frac{3}{4} \times 325 = 243,75$ donc, le troisième quartile correspond à la 244$^{\text{e}}$ valeur, qui est 5.

Le premier quartile est 3 et le troisième quartile est 5.

(f) Sur les 325 élèves, 104 ont fait moins de 4 tours.

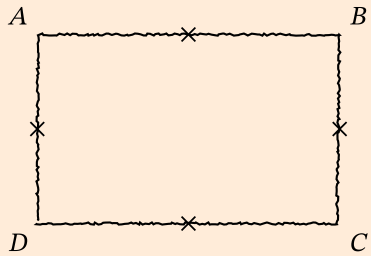
$325 - 104 = 221$. On a donc 221 élèves sur 325 qui ont fait au moins 4 tours.

$\frac{221}{325} \times 100 \approx 68$. Donc, environ 68 % des élèves ont fait au moins 4 tours.

Exercice n°2

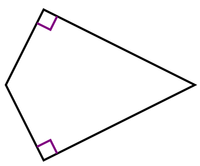
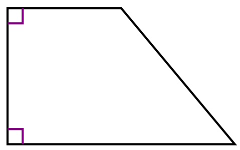
Un rectangle est défini dans le dictionnaire de la façon suivante :
« *Un rectangle est un quadrilatère dont les quatre angles sont droits.* »

1. Un quadrilatère qui possède deux angles droits est-il un rectangle ? Justifier.
2. Dans une classe de CE2, une enseignante demande à ses élèves de compléter la phrase suivante :
   « *Un rectangle est un quadrilatère dont ...* ». Voici deux réponses proposées :
   Élève A : « *Un rectangle est un quadrilatère dont les côtés opposés sont de même longueur* ».
   Élève B : « *Un rectangle est un quadrilatère dont les diagonales sont de même longueur* ».
   (a) Préciser en quoi la réponse de l'élève A ne pourrait pas être admise comme définition mathématique du rectangle.
   (b) Préciser en quoi la réponse de l'élève B ne pourrait pas être admise comme définition mathématique du rectangle.
3. Qu'elle est la nature d'un rectangle dont les diagonales sont perpendiculaires ?
4. En s'appuyant sur le codage du quadrilatère ci-après dessiné à main levée, préciser la nature du quadrilatère en question en justifiant la réponse.



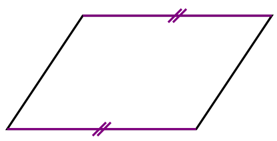
1. Un quadrilatère avec deux angles droits n'est pas nécessairement un rectangle.

   Les quadrilatères ci-contre, par exemple, possèdent deux angles droits sans être des rectangles.

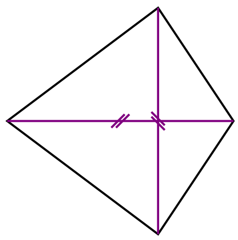
2. (a) Un quadrilatère dont les côtés opposés sont de même longueur peut être un parallélogramme.

   Le quadrilatère ci-contre, par exemple, possède deux côtés opposés de même longueur sans être un rectangle.

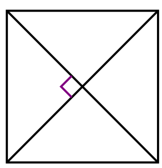


   (b) Un quadrilatère dont les diagonales sont de même longueur peut être un cerf-volant.

   Le quadrilatère ci-contre, par exemple, possède des diagonales de même longueur sans être un rectangle.



3. Un rectangle dont les diagonales sont perpendiculaires est un carré.

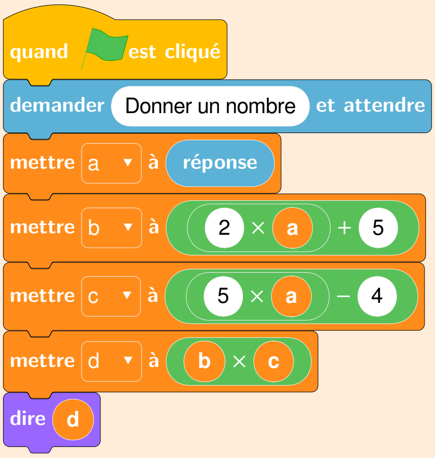


4. Le quadrilatère schématisé est un losange puisqu'il possède quatre côtés de même longueur.

Exercice n°3

Voici deux programmes de calcul :

`Programme A`



`Programme B`

Choisir un nombre
Prendre son double
Ajouter 5
Calculer le carré du résultat
Retourner le résultat trouvé

1. Montrer que si l'utilisateur saisit le nombre 2, alors le programme A retourne le nombre 54.
2. Calculer le résultat obtenu avec le programme A si le nombre saisi par l'utilisateur est 1,15.
3. Pour quel(s) nombre(s) de départ le programme A retourne-t-il le nombre 0 ?
4. (a) Si l'utilisateur saisit le nombre 3, quel résultat le programme B retourne-t-il ?
   (b) Si l'utilisateur saisit le nombre 4 , quel résultat le programme B retourne-t-il ?
5. On détermine les résultats suivants retournés par le programme B à l'aide d'une feuille de calcul automatisé.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	
2	25	49	81	121	169	225	289	361	441	
3										

   (a) Quelle cellule du tableur permet de retrouver la réponse à la question 4.(a) ci-dessus ?
   (b) Quelle formule a pu être saisie dans la cellule `A2` de la feuille de calcul automatisé afin de la copier-glisser sur la ligne 2 ?
6. (a) Pour quel nombre de départ le programme B retourne-t-il le nombre zéro ?
   (b) Ce nombre de départ est-il rationnel ? Justifier.
   (c) Ce nombre de départ est-il décimal ? Justifier.
7. Pour quel(s) nombre(s) de départ le programme A retourne-t-il le même résultat que le programme B ?

1. Si le nombre saisi est 2, on a successivement :

$$a = 2$$
$$b = 2 \times 2 + 5 = 9$$
$$c = 5 \times 2 - 4 = 6$$
$$d = 9 \times 6 = 54$$

Si l'utilisateur saisit 2, le programme A retourne le nombre 54.

2. Si le nombre saisi est 1,15, on a successivement :

$$a = 1,15$$
$$b = 2 \times 1,15 + 5 = 7,3$$
$$c = 5 \times 1,15 - 4 = 1,75$$
$$d = 7,3 \times 1,75 = 12,775$$

Si l'utilisateur saisit 1,15, le programme A retourne le nombre 12,775.

3. Pour un résultat nul, il faut avoir $d = 0$, c'est à dire $b \times c = 0$, soit $(2 \times a + 5)(5 \times a - 4) = 0$.

   C'est un produit nul donc l'un au moins des facteurs est nul :

$$\begin{aligned} 2a + 5 &= 0 \\ 2a &= -5 \\ a &= \frac{-5}{2} \end{aligned} \qquad \text{ou} \qquad \begin{aligned} 5a - 4 &= 0 \\ 5a &= 4 \\ a &= \frac{4}{5} \end{aligned}$$

   Si le nombre demandé est $-\frac{5}{2}$ ou $\frac{4}{5}$, le résultat est nul.

4. (a) Si on choisit le nombre 3, on a successivement : $3 \xrightarrow{\times 2} 6 \xrightarrow{+5} 11 \xrightarrow{^2} 121$

   Si le nombre choisi est 3, le nombre retourné est 121.

   (b) Si on choisit le nombre $\frac{3}{4}$, on a successivement : $\frac{3}{4} \xrightarrow{\times 2} \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \xrightarrow{+5} \frac{13}{2} \xrightarrow{^2} \frac{169}{4}$

   Si le nombre choisi est $\frac{3}{4}$, le nombre retourné est $\frac{169}{4}$.

5. (a) La cellule `D2` permet de retrouver le résultat de la question 4.(a).

   (b) Dans la cellule `A2`, on peut saisir la formule `=(A1*2+5)∧2`.

6. (a) Le programme B, appliqué à un nombre quelconque x donne :

   $x \xrightarrow{\times 2} 2x \xrightarrow{+5} 2x + 5 \xrightarrow{^2} (2x+5)^2$

   Or, $(2x+5)^2 = 0$ est équivalent à $2x + 5 = 0$ soit :

$$\begin{aligned} 2x + 5 &= 0 \\ 2x &= -5 \\ x &= \frac{-5}{2} \end{aligned}$$

   Si le nombre choisi est $-\frac{5}{2}$, le nombre retourné est 0.

   (b) $-\frac{5}{2}$ est un nombre écrit sous forme fractionnaire dans laquelle le numérateur et le dénominateur sont des nombres entiers relatif donc, le nombre $-\frac{5}{2}$ est un nombre rationnel.

   (c) $-\frac{5}{2} = -2,5 = -\frac{25}{10}$ qui est une fraction dont le dénominateur est 10 donc, le nombre $-\frac{5}{2}$ est un nombre décimal.

7. Soit x le nombre de départ choisi. On obtient les résultats suivants, en fonction de x :

   Pour le programme A : $(2x+5)(5x-4)$ Pour le programme B : $(2x+5)^2$

   Le résultat des deux programmes est le même si, et seulement si, $(2x+5)(5x-4) = (2x+5)^2$.

$$\begin{aligned} (2x+5)(5x-4) &= (2x+5)^2 \\ (2x+5)(5x-4) - (2x+5)^2 &= 0 \\ (2x+5)[(5x-4) - (2x+5)] &= 0 \\ (2x+5)(5x-4-2x-5) &= 0 \\ (2x+5)(3x-9) &= 0 \end{aligned}$$

   C'est un produit nul donc l'un au moins des facteurs est nul :

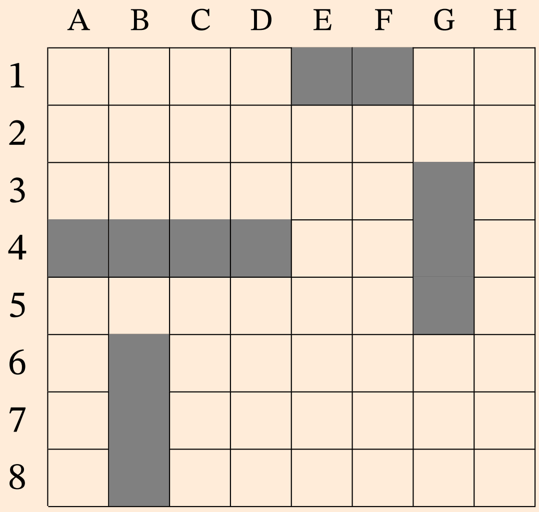
$$\begin{aligned} 2x + 5 &= 0 \\ 2x &= -5 \\ x &= \frac{-5}{2} \end{aligned} \qquad \text{ou} \qquad \begin{aligned} 3x - 9 &= 0 \\ 3x &= 9 \\ x &= \frac{9}{3} \\ x &= 3 \end{aligned}$$

   Si on entre les nombres $-\frac{5}{2}$ ou 3, les deux programmes retournent la même valeur.

Exercice n°4

Deux élèves de CM2, Jeanne et Teddy, jouent à la bataille navale. Il s'agit d'un jeu de société, appelé également « touché-coulé ».
Les deux joueurs doivent commencer par placer quatre navires horizontalement ou verticalement (sans chevauchement) sur leur grille de 8 lignes et 8 colonnes, tenue secrète : 1 navire de deux cases, 2 navires de trois cases et 1 navire de quatre cases.
Ils doivent ensuite tenter de faire « couler » les navires adverses en « touchant » toutes les cases de chaque navire de l'autre joueur. Pour cela, chacun, à son tour, énonce une case de la grille, sous le format « lettre-nombre », par exemple C2.
Lorsqu'un joueur énonce une case, son adversaire répond :
– « À l'eau ! », si la case énoncée est vide ;
– « Touché ! », si la case énoncée est occupée par un morceau de navire et si les autres parties du navire n'ont pas encore toutes été touchées ;
– « Touché-coulé ! », si la case énoncée est occupée par un morceau de navire et si toutes les autres parties du navire ont déjà été touchées.
Le gagnant est le joueur qui fait « couler » chez son adversaire tous les navires (au sens de toucher toutes les cases de chacun d'eux) avant que les siens ne le soient.

Voici ci-dessous la grille de Teddy : les quatre bateaux sont schématisés par des rectangles gris.



On suppose qu'à chaque tir, Jeanne choisit au hasard et de manière équiprobable une case de la grille qu'elle n'a pas énoncée précédemment.

1. Au premier essai :
   (a) Quelle est la probabilité que Jeanne touche un bateau ?
   (b) Quelle est la probabilité que Jeanne ne touche aucun bateau ?
   (c) Un des bateaux a une chance sur seize d'être touché. De combien de cases est-il composé ?
   (d) Jeanne choisit une case de la colonne B. Quelle est la probabilité qu'elle touche un bateau ?
2. Au premier essai de la partie, Jeanne désigne la case « E1 ». Teddy annonce « Touché ! ».
   Jeanne souhaite couler le bateau touché et choisit une case adjacente à la case « E1 ».
   Quelle est la probabilité qu'elle coule le bateau au coup suivant ? Justifier.
3. Teddy annonce « À l'eau ! » pour les deux premiers essais de Jeanne. Quelle est la probabilité de toucher un bateau pour son troisième essai ?

1. D'après l'énoncé, il y a équiprobabilité pour le choix d'une case.
   (a) $\mathcal{P}_{1a} = \dfrac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}} = \dfrac{2+2\times3+4}{8\times8} = \dfrac{12}{64} = \dfrac{3}{16}$.
   La probabilité que Jeanne touche un bateau est de $\dfrac{3}{16}$.
   (b) $\mathcal{P}_{1b} = 1 - \dfrac{3}{16} = \dfrac{13}{16}$.
   La probabilité que Jeanne ne touche aucun bateau est de $\dfrac{13}{16}$.
   (c) $\dfrac{1}{16} = \dfrac{1\times4}{16\times4} = \dfrac{4}{64}$.
   Un bateau ayant une chance de un sur seize d'être touché est installé sur quatre cases.
   (d) $\mathcal{P}_{1d} = \dfrac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}} = \dfrac{1+3}{8} = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$.
   La probabilité que Jeanne touche un bateau sachant qu'elle choisit la colonne B est de un demi.

2. Pour couler le bateau au coup suivant, Jeanne doit désigner la case F1. Or, elle a trois possibilités de choisir une case adjacente à la case E1 : il s'agit des cases D1, E2 et F1.
$\mathcal{P}_2 = \dfrac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}} = \dfrac{1}{3}$.
La probabilité que Jeanne coule le bateau au deuxième essai est de un tiers.

3. Les deux premiers essais ont été infructueux, il reste toujours les quatre bateaux à couler, composés au total de 12 cases sur un total de $(64-2)$ cases $= 62$ cases disponibles. D'où la probabilité :
$\mathcal{P}_3 = \dfrac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}} = \dfrac{12}{62} = \dfrac{6}{31}$.
La probabilité que Jeanne touche un bateau au troisième essai est de $\dfrac{6}{31}$.

Exercice n°5

Pour choisir une unité de température, les physiciens se sont heurtés à l'absence de « température zéro » (le zéro absolu n'était pas connu à l'époque). Deux systèmes principaux ont été créés et restent utilisés : le degré Celsius (°C) et le degré Fahrenheit (°F).
Voici ci-dessous une formule permettant de passer de la mesure d'une température en degré Fahrenheit (notée F) vers la mesure de la même température en degré Celsius (notée C).

$$C = (F-32)\times\frac{5}{9}$$

1. En utilisant cette formule, convertir 95°F en degré Celsius.
2. En utilisant cette formule, convertir 5°C en degré Fahrenheit.
3. Existe-t-il des températures pour lesquelles la mesure en degrés Celsius est égale à la mesure en degrés Fahrenheit ? Donner toutes les réponse possibles en justifiant.

1. Dans cette question, on nous donne $F = 95$ (en °F) et on cherche C (en °C).
$$C = (95-32)\times\frac{5}{9} = 63\times\frac{5}{9} = 35$$
95°F correspondent à une température de 35°C.

2. Dans cette question, on nous donne $C = 5$ (en °C) et on cherche F (en °F).
$$\begin{aligned} 5 &= (F-32)\times\frac{5}{9}\\ 5\times\frac{9}{5} &= F-32\\ 9+32 &= F\\ 41 &= F \end{aligned}$$
5°C correspondent à une température de 41°F.

3. Les deux températures sont égales si, et seulement si, $C = F$.
$$\begin{aligned} F &= (F-32)\times\frac{5}{9}\\ F\times\frac{9}{5} &= F-32\\ \frac{9}{5}F - F &= -32\\ \frac{4}{5}F &= -32\\ F &= \frac{5}{4}\times(-32)\\ F &= -40 \end{aligned}$$
Il existe une unique température pour laquelle les deux mesures sont égales, il s'agit de -40°C $= -40$°F

Exercice n°6

Un professeur des écoles d'une classe de CE1 présente à ses élèves une règle de calcul qui permet de déterminer avec ses dix doigts et ses dix orteils le produit de deux nombres entiers compris entre 5 et 10 en utilisant les résultats des tables appris précédemment. Il s'appuie sur l'exemple suivant :

> *Effectuons* 6×7.
> *– Avec le pied et la main gauches, on lève les 5 orteils et 1 doigt, représentant ainsi le 6.*
> *– Avec le pied et la main droites, on lève les 5 orteils et 2 doigts, représentant ainsi le 7.*
> *Pour le calcul on ne regarde que les mains et on procède de la manière suivante :*
> *la somme du nombre de doigts levés nous indique un nombre de dizaines, le produit des doigts baissés nous indique un nombre d'unités.*
> *Ici on a :* $(1+2)$ *dizaines et* (4×3) *unités, soit encore 3 dizaines et 12 unités.*
> *On obtient donc le nombre 42.*

1. Appliquer cette règle pour calculer le produit 6×8.
2. On note g le nombre de doigts levés de la main gauche et d le nombre de doigts levés de la main droite.
   (a) Que représentent dans ce contexte les nombres $(5-g)$ et $(5-d)$?
   (b) Démontrer l'égalité : $(5+g)(5+d) = 10\,(g+d) + (5-g)(5-d)$.
   (c) Conclure quand à la validité de la règle de calcul.

1. Application de la règle pour le produit de 6 par 8 :
   – Avec le pied et la main gauches, on lève les 5 orteils et 1 doigt, représentant ainsi le 6.
   – Avec le pied et la main droites, on lève les 5 orteils et 3 doigts, représentant ainsi le 8.
   La somme du nombre de doigts levés nous indique un nombre de dizaines, on a donc $(1+3)$ dizaines, soit 4 dizaines.
   Le produit des doigts baissés nous indique un nombre d'unités, on a donc (4×2) unités, soit 8 unites.
   On obtient alors le nombre 48.

2. (a) $(5-g)$ est égal à 5 (nombre de doigts d'une main) auquel on soustrait le nombre de doigts de la main gauche levés, $(5-g)$ représente le nombre de doigts de la main gauche baissés.
   Par un raisonnement analogue, $(5-d)$ représente le nombre de doigts de la main droite baissés.
   (b) On développe le premier terme de l'égalité :
   $$\begin{aligned}(5+g)(5+d) &= 5 \times 5 + 5 \times d + g \times 5 + g \times d\\ &= 25 + 5d + 5g + gd\end{aligned}$$
   On développe le deuxième terme de l'égalité :
   $$\begin{aligned}10\,(g+d) + (5-g)(5-d) &= 10 \times g + 10 \times d + 5 \times 5 + 5 \times (-d) + (-g) \times 5 + (-g) \times (-d)\\ &= 10g + 10d + 25 - 5d - 5g + gd\\ &= 25 + 5d + 5g + gd\end{aligned}$$
   Les deux membres de l'égalités sont égaux, on a donc bien
   $(5+g)(5+d) = 10\,(g+d) + (5-g)(5-d)$.
   (c) $(5+g)$ et $(5+g)$ correspondent respectivement aux deux facteurs du produit demandé, « 5 » étant le nombre d'orteils relevés. $(5+g)(5+d)$ représente donc le produit recherché.
   $10\,(g+d)$ est le nombre de doigts relevés, multiplié par 10, il s'agit donc du nombre de dizaines.
   D'après la question 2.(a), $(5-g)(5-d)$ correspond au produit du nombre de doigts baissés dans chaque main, il s'agit du nombre d'unités.
   Conclusion : L'égalité est vérifiée et est la traduction algébrique de la règle énoncée, cette règle est donc valide.

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE
ET DE LA JEUNESSE
Liberté
Égalité
Fraternité

EST MAT 3

SESSION 2023

CONCOURS DE RECRUTEMENT DE PROFESSEURS DES ECOLES

Concours externe

Deuxième épreuve d'admissibilité

Épreuve écrite disciplinaire de mathématiques

L'épreuve est constituée d'un ensemble d'au moins trois exercices indépendants, permettant de vérifier les connaissances du candidat.

Durée : 3 heures

L'usage de la calculatrice est autorisé dans les conditions relevant de la circulaire du 17 juin 2021 BOEN du 29 juillet 2021.

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout document et de tout matériel électronique est rigoureusement interdit.

Il appartient au candidat de vérifier qu'il a reçu un sujet complet et correspondant à l'épreuve à laquelle il se présente.

Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous devez le signaler très lisiblement sur votre copie, en proposer la correction et poursuivre l'épreuve en conséquence. De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, vous devez la (ou les) mentionner explicitement.

NB : Conformément au principe d'anonymat, votre copie ne doit comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé consiste notamment en la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de la signer ou de l'identifier.
Le fait de rendre une copie blanche est éliminatoire.

Tournez la page S.V.P

Ce sujet est composé de cinq exercices indépendants.

EXERCICE 1

1. L'entier 4 216 est-il un multiple de 17 ? Justifier.

2. Guillaume veut revoir sa leçon en prenant son petit déjeuner. Malheureusement, il a renversé son chocolat sur sa feuille. Le chiffre des unités et la justification de l'exemple du maître, sont illisibles...

a. Rappeler le critère de divisibilité par 3.

b. Donner toutes les valeurs possibles du chiffre des unités, caché par la tâche située à gauche.

3. On admet qu'un nombre entier *n* est divisible par 7 si et seulement si la différence entre son nombre de dizaines et le double de son chiffre des unités est un multiple 7, positif ou négatif.
Par exemple, 294 est divisible par 7 car 29 – 4 × 2 = 21, et 21 est divisible par 7.

a. En détaillant les étapes, vérifier que 413 est bien divisible par 7 en utilisant le critère indiqué ci-dessus.

b. Le nombre 5 292 est-il divisible par 7 ? Répondre en appliquant, plusieurs fois si nécessaire, le critère précédent.

c. Pour déterminer si 1 138 984 est divisible par 7, on utilise le critère précédent à l'aide d'un tableur. On rappelle que la fonction ENT renvoie la partie entière d'un nombre.

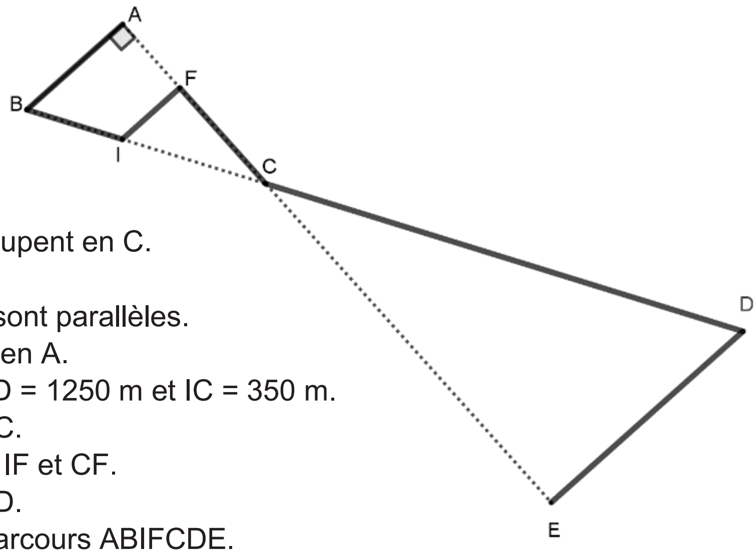
B1 | =ENT(A1/10)

	A	B	C	D
1	1138984	113898	4	113890
2	113890	11389	0	11389
3	11389	1138	9	1120
4	1120	112	0	112
5	112	11	2	7

Dans la cellule B1 on a saisi la formule : « = ENT(A1/10) ».
Observer la feuille de calcul puis indiquer des formules ayant pu être saisies dans les cellules C1 et D1 qui, étirées vers le bas de la feuille de calcul, permettent d'obtenir directement la feuille de calcul ci-dessus.

d. Le nombre 1 138 984 est-il divisible par 7 ? Justifier en interprétant les résultats fournis par la feuille de calcul.

EXERCICE 2



1. Nadia se prépare pour le cross organisé par son école dont le parcours, ABIFCDE, est représenté ci-contre.

Les droites (AE) et (BD) se coupent en C.

F ∈ [AC] et I ∈ [BC].

Les droites (AB), (FI) et (DE) sont parallèles.

ABC est un triangle rectangle en A.

AB = 300 m ; AC = 400 m ; CD = 1250 m et IC = 350 m.

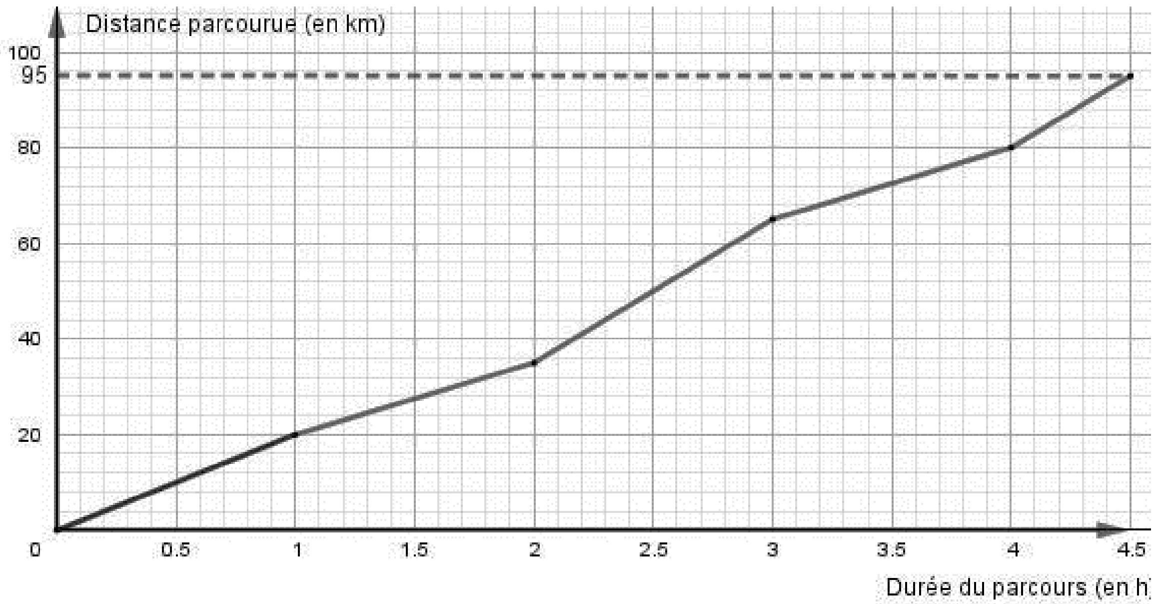
a. Déterminer la longueur BC.

b. Déterminer les longueurs IF et CF.

c. Déterminer la longueur ED.

d. Calculer la longueur du parcours ABIFCDE.

2. Quentin, un adolescent de 16 ans, fait du vélo. On a représenté ci-dessous la distance parcourue en fonction de la durée de parcours lors de sa dernière sortie.



a. La durée du parcours en heure est-elle proportionnelle à la distance parcourue en kilomètre ? Justifier.

Les réponses aux questions suivantes seront données avec la précision permise par le graphique.

b. Quelle distance a parcouru Quentin en 1h ?

c. Déterminer la vitesse moyenne de Quentin durant la première heure, en mètre par seconde, avec un arrondi au centième.

d. Quelle distance a parcouru Quentin en 1h45 ?

e. Estimer la vitesse de Quentin durant la troisième heure de son parcours, en kilomètre par heure.

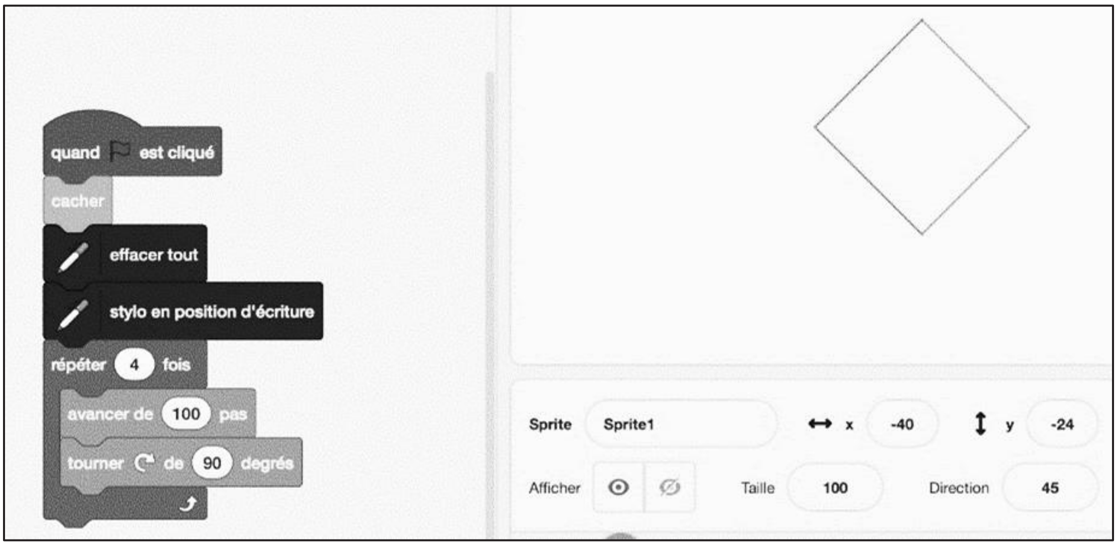
f. Peut-on affirmer que sa vitesse moyenne lors de la troisième heure est supérieure de plus de 40 % à sa vitesse moyenne lors de la première heure ? Justifier.

g. Quelle est la vitesse moyenne de Quentin lors de cette sortie, en kilomètre par heure, avec un arrondi au centième.

EXERCICE 3

Un enseignant de CM2 souhaite créer avec ses élèves des décorations pour la salle de classe.

1. Un premier groupe fabriquera une guirlande constituée d'un motif proposé par l'enseignant dans le script ci-contre.

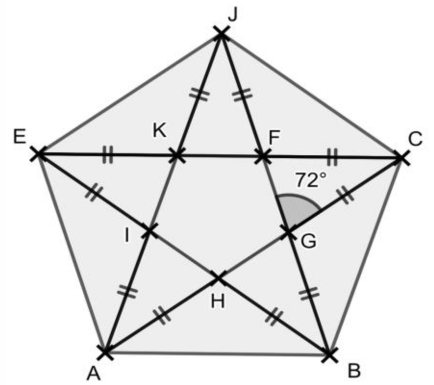


En voyant apparaître la figure,

- Pierre dit : « c'est un losange ».
- Ana dit : « ce n'est pas un rectangle ».
- Karim dit : « c'est un quadrilatère ».
- Lucie dit : « c'est un carré ».

En utilisant le script et les propriétés des quadrilatères, dire si chaque affirmation est vraie ou fausse en justifiant.

2. Un second groupe fabriquera des étoiles. L'enseignant leur a montré comment dessiner une étoile à cinq branches sur GeoGebra en utilisant un pentagone :



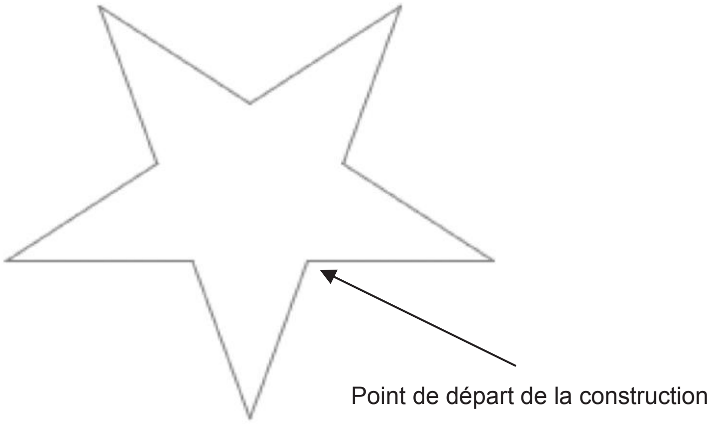
Pour pouvoir construire des pentagones avec la règle et le compas, il propose le programme de construction ci-dessous.

Tracer un segment [RS]. Placer le point O au milieu du segment [RS]. Tracer le cercle de diamètre [RS]. Soit L un point de ce cercle tel que (OL)⊥(RS). Placer le point I au milieu du segment [OS]. Le cercle de centre I et de rayon IL coupe le segment [RO] en D. LD est la longueur des côtés du pentagone régulier inscrit dans le cercle de diamètre [RS], placer les 5 sommets du pentagone sur le cercle. Construire le pentagone.

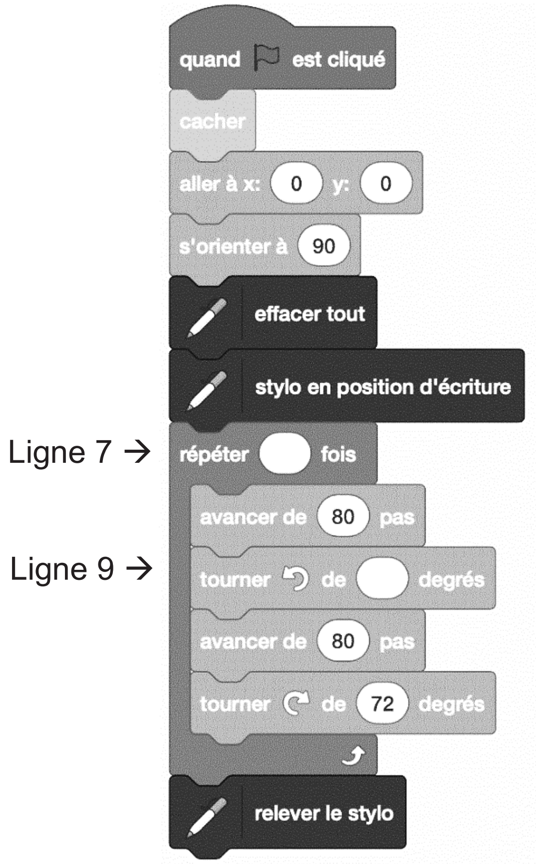
La longueur des côtés du pentagone obtenu est proportionnelle à la longueur du segment [RS] choisi au départ. En choisissant un segment [RS] de longueur 4 cm, on obtient un pentagone dont les côtés mesurent $\sqrt{10-2\sqrt{5}}$ cm.

a. Montrer que pour obtenir un pentagone dont les côtés mesurent 7 cm, il faut commencer par construire un segment [RS] mesurant environ 11,9 cm.
b. En utilisant le programme de construction précédent, construire un pentagone régulier LMNPQ dont les côtés mesurent 7 cm.

Puis, il leur montre l'étoile à cinq branches ci-contre, obtenue en utilisant le logiciel Scratch :



c. Recopier et compléter les lignes 7 et 9 du script utilisé pour construire l'étoile.
On rappelle que lorsque le lutin est orienté à 90° cela signifie qu'il va se déplacer vers la droite.



d. Quel est le périmètre, en pas, de cette étoile ?
e. L'enseignant souhaite doubler le périmètre de son étoile. Recopier les quatre lignes à l'intérieur du bloc « répéter », ligne 8 à 11, en apportant les modifications nécessaires pour obtenir cette nouvelle étoile.

EXERCICE 4

Dans une classe de Grande Section, l'enseignant propose à ses élèves le jeu suivant dans lequel il s'agit d'être le premier à avoir exactement 15 jetons (source : *Découvrir les maths GS* - Éditions Hatier).
Chaque élève lance deux dés bien équilibrés, identiques, à 6 faces numérotées de 1 à 6. Il considère les deux nombres indiqués sur les faces supérieures de chacun des dés.
Lorsque les deux dés indiquent le même nombre, l'élève prend autant de jetons que l'indique l'un des deux dés. Sinon, il prend autant de jetons que le plus grand des deux nombres ou le double de jetons du plus petit.
Après avoir lancé les dés, un élève a la possibilité de passer son tour. Dans ce cas, il ne prend aucun jeton.

1. Un élève lance les deux dés ; il obtient un 3 et un 2. Combien de jetons peut-il prendre ? Donner tous les cas possibles.

2. Dresser la liste des tirages permettant d'obtenir 3 jetons.

3. Un élève lance les deux dés.
- **a.** Montrer que la probabilité de l'événement « les nombres obtenus sont un 3 et un 2 » est $\frac{1}{18}$.
- **b.** Quelle est la probabilité de l'événement « au moins un des nombres obtenus est 3 »?
- **c.** Quelle est la probabilité de l'événement « les nombres obtenus permettent de prendre 4 jetons » ?

4. Après un nouveau lancer des deux dés, un élève a pris 3 jetons. Au lancer suivant, la probabilité qu'il prenne de nouveau 3 jetons augmente-t-elle, reste-t-elle identique ou diminue-t-elle par rapport à la probabilité d'avoir pris 3 jetons au tirage précédent ? Justifier.

5. En fin de partie, un élève possède 12 jetons. Lors de son lancer de dés, il obtient un 1 et un 4. Pourquoi est-il préférable pour lui de passer son tour ?

EXERCICE 5

Pour chaque affirmation, indiquer si elle est vraie ou fausse. Justifier.

Affirmation 1 : « 257 est un nombre décimal. »

Affirmation 2 : « $\frac{7}{3} - 8$ est un nombre rationnel. »

Affirmation 3 : « la somme de trois nombres entiers consécutifs est toujours un multiple de 3. »

Affirmation 4 : « l'équation $(x + 1)(x - 2) = (x - 3)(x + 4)$ admet un nombre entier comme solution. »

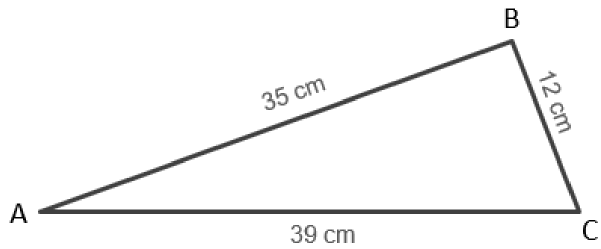
Affirmation 5 : « augmenter une quantité de 15% puis de 10% revient à l'augmenter de son quart. »

Affirmation 6 : « un quadrilatère ayant un angle droit est un rectangle. »

Affirmation 7 : « un triangle rectangle peut être équilatéral. »

Affirmation 8 : « par la fonction f définie par $f(x) = -3x + 1$, l'antécédent de 4 est -11. »

Affirmation 9 : « le triangle ABC, schématisé ci-dessous, est rectangle. »



Affirmation 10 : « si on multiplie par 3 les longueurs des côtés d'un rectangle, alors son aire est également multipliée par 3. »

Information aux candidats

Les codes doivent être reportés sur les rubriques figurant en en-tête de chacune des copies que vous remettrez.

Épreuve écrite disciplinaire de mathématiques

Externe

	Concours	Épreuve	Matière
Public	**EXT PO PU**	**102**	**9418**
Privé	**EXT PO PR**	**102**	**9418**

IMPRIMERIE NATIONALE – 23 0906 – D'après documents fournis

Exercice n°1

1. L'entier 4 216 est-il un multiple de 17 ? Justifier.
2. Guillaume veut revoir sa leçon en prenant son petit déjeuner. Malheureusement, il a renversé son chocolat sur sa feuille. Le chiffre des unités et la justification de l'exemple du maître, sont illisibles...

   2 29 est divisible par 3 car

   (a) Rappeler le critère de divisibilité par 3.
   (b) Donner toutes les valeurs possibles du chiffre des unités, caché par la tâche située à gauche.

3. On admet qu'un nombre entier n est divisible par 7 si et seulement si la différence entre son nombre de dizaines et le double de son chiffre des unités est un multiple 7, positif ou négatif.
   Par exemple, 294 est divisible par 7 car $29 - 4 \times 2 = 21$, et 21 est divisible par 7.

   (a) En détaillant les étapes, vérifier que 413 est bien divisible par 7 en utilisant le critère indiqué ci-dessus.
   (b) Le nombre 5 292 est-il divisible par 7 ? Répondre en appliquant, plusieurs fois si nécessaire, le critère précédent.
   (c) Pour déterminer si 1 138 984 est divisible par 7, on utilise le critère précédent à l'aide d'un tableur. On rappelle que la fonction `ENT` renvoie la partie entière d'un nombre.

   `B1` ▼ f_x $\sum$ ▼ = `ENT(A1/10)` ▼

	A	B	C	D
1	1138984	113898	4	113890
2	113890	11389	0	11389
3	11389	1138	9	1120
4	1120	112	0	112
5	112	11	2	7

   Dans la cellule `B1` on a saisi la formule : « `= ENT(A1/10)` ».
   Observer la feuille de calcul puis indiquer des formules ayant pu être saisies dans les cellules `C1` et `D1` qui, étirées vers le bas de la feuille de calcul, permettent d'obtenir directement la feuille de calcul ci-dessus.
   (d) Le nombre 1 138 984 est-il divisible par 7 ? Justifier en interprétant les résultats fournis par la feuille de calcul.

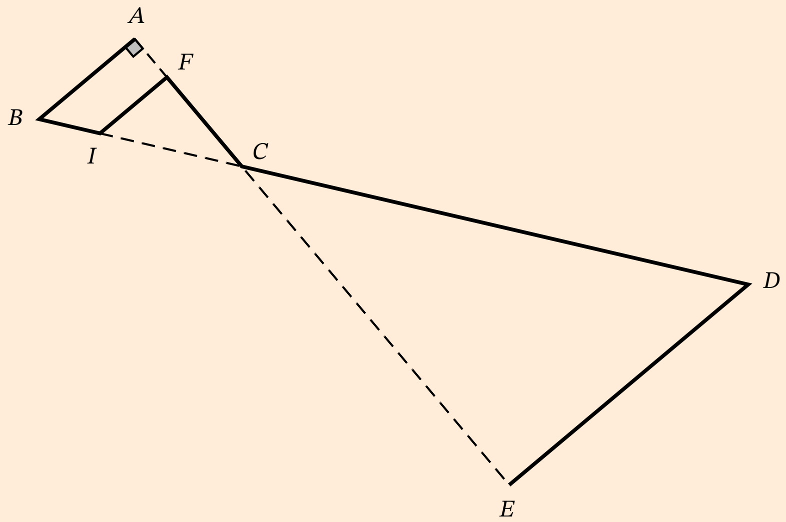
---

1. $4\,216 = 17 \times 248$ donc, l'entier 4 216 est un multiple de 17.
2. (a) Un nombre est divisible par 3 si, et seulement si, la somme de ses chiffres est divisible par 3 (ou multiple de 3).
   (b) $2 + 2 + 9 = 13$. Le chiffre des unités est un nombre entier compris entre 0 et 9, la somme des chiffres est donc un nombre entier entre 13 et 22. Les seuls entiers possibles divisibles par 3 sont 15, 18 ou 21.
   Le chiffre des unités peut être 2, 5 ou 8.
3. (a) Le nombre de dizaine de 413 est 41 car $413 = 41 \times 10 + 3$ et le chiffre des unités de 413 est 3.
   Or, $41 - 3 \times 2 = 35$ et $35 = 7 \times 5$ est divisible par 7. D'après le critère, 413 est divisible par 7.
   (b) Le nombre de dizaines de 5 292 est 529 et son chiffre des unités est 2. De plus, $529 - 2 \times 2 = 525$.
   Le nombre de dizaines de 525 est 52 et son chiffre des unités est 5. De plus, $52 - 5 \times 2 = 42$.
   Or, $42 = 7 \times 6$ est divisible par 7. D'après le critère, 5 292 est divisible par 7.
   (c) Dans la cellule `C1`, on a pu saisir la formule `=A1-10*B1`.
   Dans la cellule `D1`, on a pu saisir la formule `=B1-C1*2`.
   (d) Les nombres de colone D donnent successivement le résultat du critère cité ci-dessus.
   Le dernier nombre en `D5` donne 7. Or, $7 = 7 \times 1$ est divisible par 7 donc, le nombre 1 138 984 est divisible par 7.

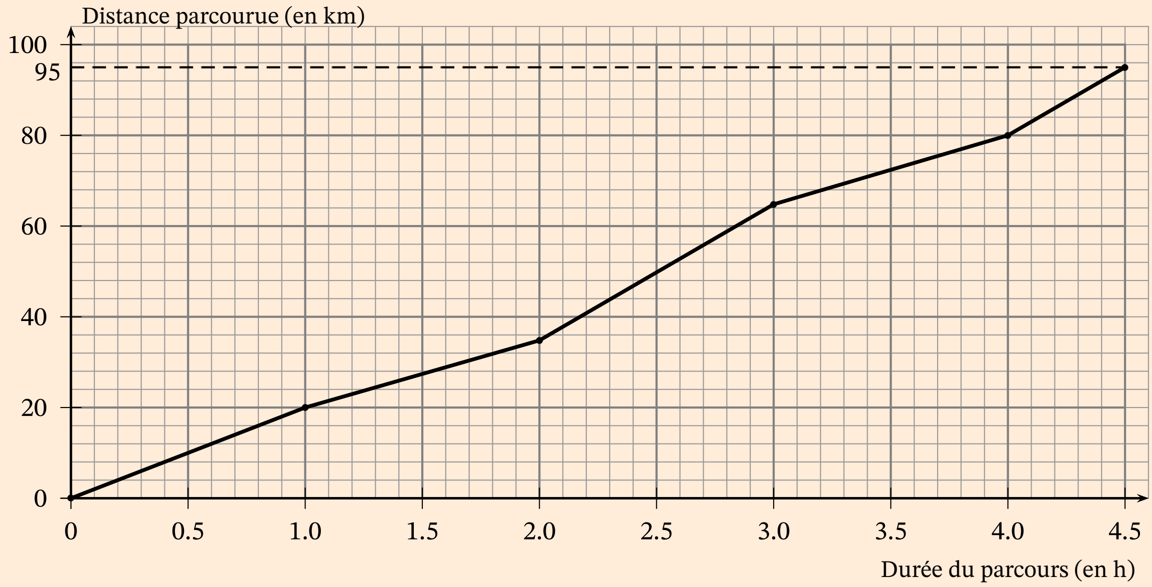
Exercice n°2

Nadia se prépare pour le cross organisé par son école dont le parcours, $ABIFCDE$, est représenté ci-dessous.

1. Les droites (AE) et (BD) se coupent en C. Les droites (AB), (FI) et (DE) sont parallèles.
   $F \in [AC]$ et $I \in [BC]$. ABC est un triangle rectangle en A.
   $AB = 300$ m ; $AC = 400$ m ; $CD = 1\,250$ m et $IC = 350$ m.
   (a) Déterminer la longueur BC.
   (b) Déterminer les longueurs IF et CF.
   (c) Déterminer la longueur ED.
   (d) Calculer la longueur du parcours $ABIFCDE$.



2. Quentin, un adolescent de 16 ans, fait du vélo. On a représenté ci-dessous la distance parcourue en fonction de la durée de parcours lors de sa dernière sortie.



   (a) La durée du parcours en heure est-elle proportionnelle à la distance parcourue en kilomètre ? Justifier.
   Les réponses aux questions suivantes seront données avec la précision permise par le graphique.
   (b) Quelle distance a parcouru Quentin en 1h ?
   (c) Déterminer la vitesse moyenne de Quentin durant la première heure, en mètre par seconde, avec un arrondi au centième.
   (d) Quelle distance a parcouru Quentin en 1h45 ?
   (e) Estimer la vitesse de Quentin durant la troisième heure de son parcours, en kilomètre par heure.
   (f) Peut-on affirmer que sa vitesse moyenne lors de la troisième heure est supérieure de plus de 40 % à sa vitesse moyenne lors de la première heure ? Justifier.
   (g) Quelle est la vitesse moyenne de Quentin lors de cette sortie, en kilomètre par heure, avec un arrondi au centième.

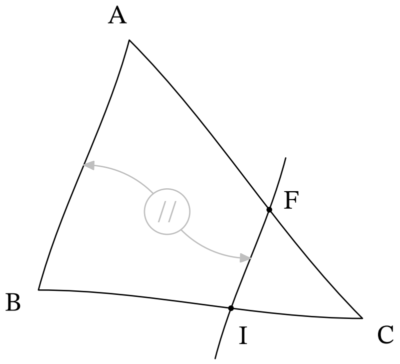
1. Dans toute cette question, les longueurs sont exprimées en mètre.

   (a) Dans le triangle BAC rectangle en A, le théorème de Pythagore permet d'écrire :

$$\begin{aligned} BC^2 &= BA^2 + AC^2 \\ BC^2 &= 300^2 + 400^2 \\ BC^2 &= 90\,000 + 160\,000 \\ BC^2 &= 250\,000 \\ BC &= \sqrt{250\,000} \\ BC &= 500\ \text{m} \end{aligned}$$

   La longueur BC est égale à 500 m.

   (b) *La figure est donnée à titre indicatif.*



Dans le triangle CAB, F est un point de la droite (CA), I est un point de la droite (CB).
Comme les droites (FI) et (AB) sont parallèles, alors le théorème de Thalès permet d'écrire :

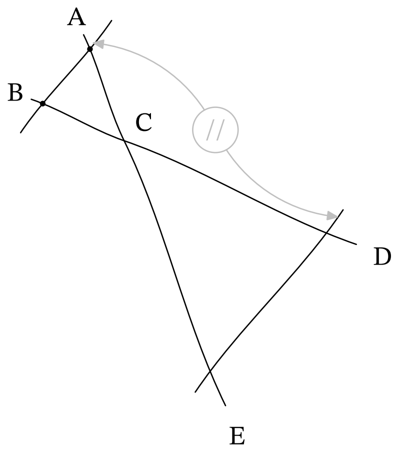
$$\frac{CF}{CA} = \frac{CI}{CB} = \frac{FI}{AB}$$

$$\frac{CF}{400} = \frac{350}{500} = \frac{FI}{300}$$

$$\begin{aligned} CF &= \frac{400 \times 350}{500} & FI &= \frac{300 \times 350}{500} \\ CF &= \frac{140\,000}{500} & FI &= \frac{105\,000}{500} \\ CF &= 280\ \text{m} & FI &= 210\ \text{m} \end{aligned}$$

   La longueur IF vaut 210 m et la longueur CF est égale à 280 cm.

   (c) *La figure est donnée à titre indicatif.*



Les droites (EA) et (DB) sont sécantes en C.
Comme les droites (AB) et (ED) sont parallèles, alors le théorème de Thalès permet d'écrire :

$$\frac{CA}{CE} = \frac{CB}{CD} = \frac{AB}{ED}$$

$$\frac{CE}{400} = \frac{1\,250}{500} = \frac{ED}{300}$$

$$\begin{aligned} ED &= \frac{300 \times 1\,250}{500} \\ ED &= \frac{375\,000}{500} \\ ED &= 750\ \text{m} \end{aligned}$$

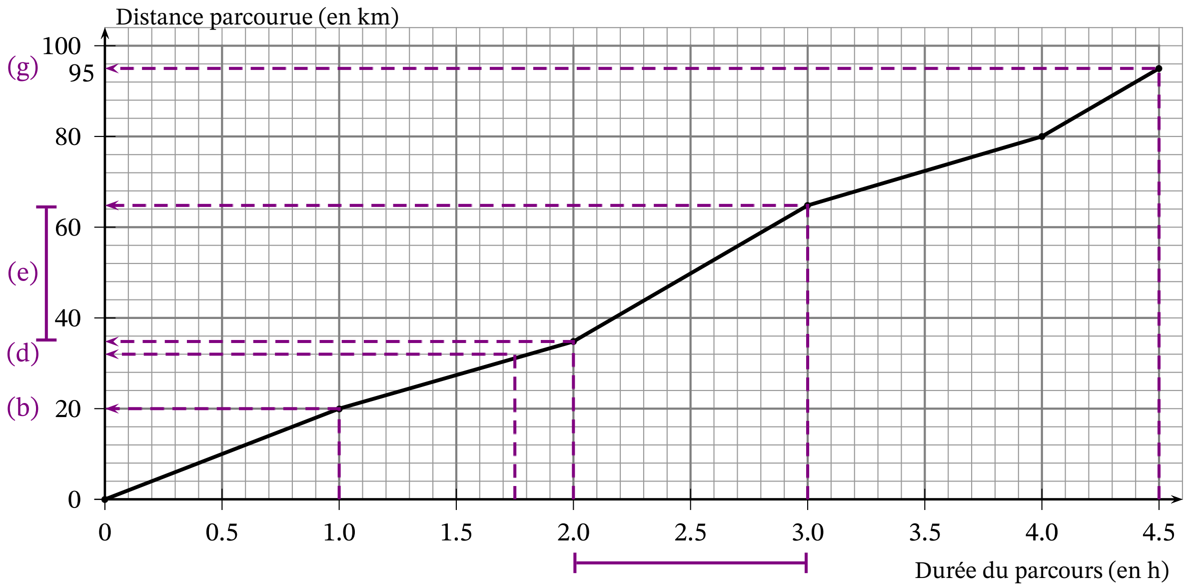
   La longueur ED vaut 750 m.

   (d) On note ℓ la longueur du parcours $ABIFCDE$.

$$\begin{aligned} \ell &= AB + BI + IF + FC + CD + DE \\ &= 300\ \text{m} + (500\ \text{m} - 350\ \text{m}) + 210\ \text{m} + 280\ \text{m} + 1\,250\ \text{m} + 750\ \text{m} \\ &= 2\,940\ \text{m} \end{aligned}$$

   Le parcours $ABIFCDE$ mesure 2 940 m, ou 2,94 km.

2. Graphique avec les traces de recherche.



(a) La distance parcourue en fonction de la durée est représentée par une fonction dont le support est une ligne brisée qui n'est pas une droite. Par conséquent :

la durée du parcours n'est pas proportionnelle à la distance parcourue.

(b) Le point d'abscisse 1 a pour ordonnée 20 donc, Quentin a parcouru 20 km en 1 h.

(c) Une distance de 20 km en une heure correspond a une distance de 20 000 m en 3 600 s.

$$v = \frac{d}{t} = \frac{20\,000\text{ m}}{3\,600\text{ s}} \approx 5{,}555\,6\text{ m/s}.$$

La vitesse moyenne de Quentin a été d'environ 5,56 m/s durant la première heure.

(d) 1 h 45 min est égal à 1,75 h. Pour une abscisse de 1,75, la fonction a pour ordonnée environ 32.

Quentin a parcouru environ 32 km en 1 h 45 min

(e) En 2 h, Quentin à parcouru environ 35 km.

En 3 h, Quentin à parcouru environ 65 km. Il a donc parcouru environ 30 km en 1 h,

ce qui fait une vitesse moyenne d'environ 30 km/h durant la troisième heure.

(f) La vitesse de Quentin durant la première heure est de 20 km/h alors qu'elle a été de 30 km/h lors de la troisième heure. Calculons le taux d'évolution :

$$t_e = \frac{v_f - v_i}{v_i} = \frac{30\text{ km/h} - 20\text{ km/h}}{20\text{ km/h}} = 0,5$$

Ce qui correspond à un pourcentage d'évolution de 50 %.

La vitesse moyenne de Quentin lors de la troisième heure est supérieure de plus de 40 % à sa vitesse moyenne lors de la première heure.

(g) Finalement, Quentin a parcouru 95 km en 4,5 h.

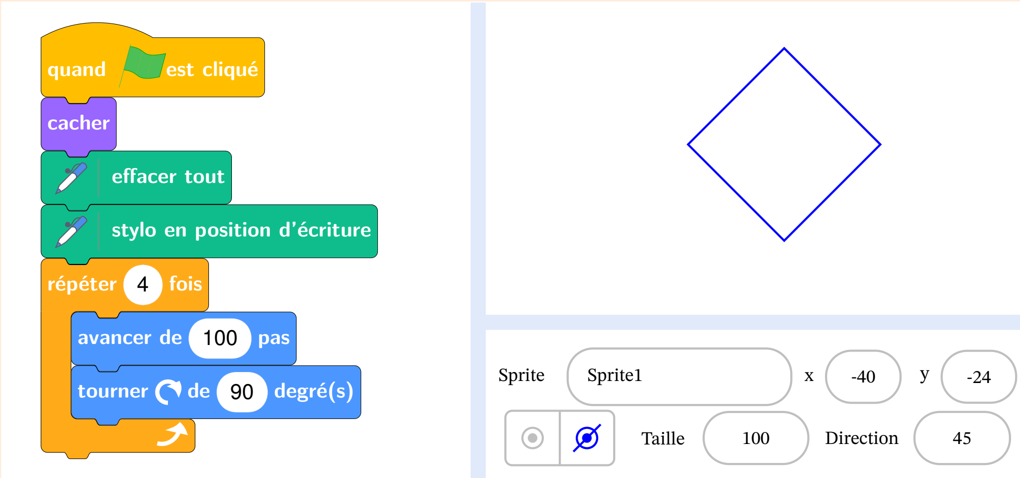
$$v = \frac{d}{t} = \frac{95\text{ km}}{4{,}5\text{ h}} \approx 21{,}111\,1\text{ m/s}.$$

La vitesse moyenne de Quentin a été d'environ 21,11 km/h durant sa sortie.

Exercice n°3

Un enseignant de CM2 souhaite créer avec ses élèves des décorations pour la salle de classe.

1. Un premier groupe fabriquera une guirlande constituée d'un motif proposé par l'enseignant dans le script ci-dessous.

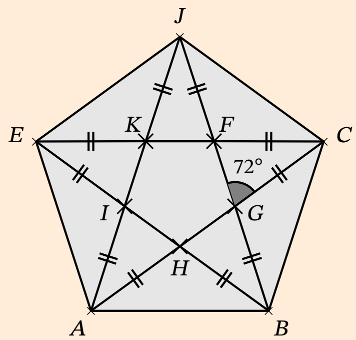


En voyant apparaître la figure,

- Pierre dit : « c'est un losange ».
- Ana dit : « ce n'est pas un rectangle ».
- Karim dit : « c'est un quadrilatère ».
- Lucie dit : « c'est un carré ».

En utilisant le script et les propriétés des quadrilatères, dire si chaque affirmation est vraie ou fausse en justifiant.

2. Un second groupe fabriquera des étoiles.
L'enseignant leur a montré comment dessiner une étoile à cinq branches sur GeoGebra en utilisant un pentagone :



Pour pouvoir construire des pentagones avec la règle et le compas, il propose le programme de construction ci-dessous.

> – Tracer un segment $[RS]$.
> – Placer le point O au milieu du segment $[RS]$.
> – Tracer le cercle de diamètre $[RS]$.
> – Soit L un point de ce cercle tel que $(OL) \perp (RS)$.
> – Placer le point I au milieu du segment $[OS]$.
> – Le cercle de centre I et de rayon IL coupe le segment $[RO]$ en D.
> – LD est la longueur des côtés du pentagone régulier inscrit dans le cercle de diamètre [RS], placer les 5 sommets du pentagone sur le cercle.
> – Construire le pentagone.

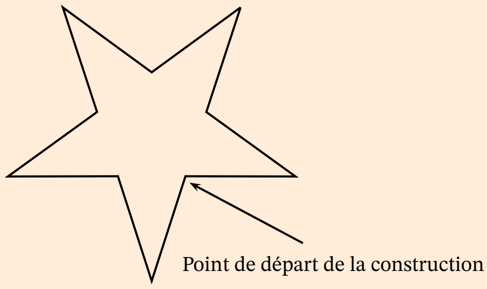
La longueur des côtés du pentagone obtenu est proportionnelle à la longueur du segment $[RS]$ choisi au départ. En choisissant un segment $[RS]$ de longueur 4 cm, on obtient un pentagone dont les côtés mesurent $\sqrt{10-2\sqrt{5}}$ cm.

(a) Montrer que pour obtenir un pentagone dont les côtés mesurent 7 cm, il faut commencer par construire un segment $[RS]$ mesurant environ 11,9 cm.

(b) En utilisant le programme de construction précédent, construire un pentagone régulier $LMNPQ$ dont les côtés mesurent 7 cm.

Exercice n°3

Puis, il leur montre l'étoile à cinq branches ci-contre, obtenue en utilisant le logiciel Scratch :



2. (c) Recopier et compléter les lignes 7 et 9 du script utilisé pour construire l'étoile.
On rappelle que lorsque le lutin est orienté à 90° cela signifie qu'il va se déplacer vers la droite.

(d) Quel est le périmètre, en pas, de cette étoile ?

(e) L'enseignant souhaite doubler le périmètre de son étoile. Recopier les quatre lignes à l'intérieur du bloc « répéter », ligne 8 à 11, en apportant les modifications nécessaires pour obtenir cette nouvelle étoile.

1. Remarquons tout d'abord que le script construit bien un polygone : en effet, il s'agit d'une ligne brisée à quatre segments et la somme des angles est égale à $4 \times 90° = 360°$. Donc, la ligne polygonale tracée est fermée.

Pierre : les quatre côtés sont égaux, c'est donc bien un losange. Pierre a raison.

Ana : le quadrilatère possède quatre angles droits, c'est donc un rectangle. Ana a tort.

Karim : la figure possède quatre côtés, c'est donc bien un quadrilatère. Karim a raison.

Lucie : la figure est un quadrilatère à quatre côtés égaux, c'est donc un losange et il possède de plus au moins un angle droit, c'est un carré. Lucie a raison.

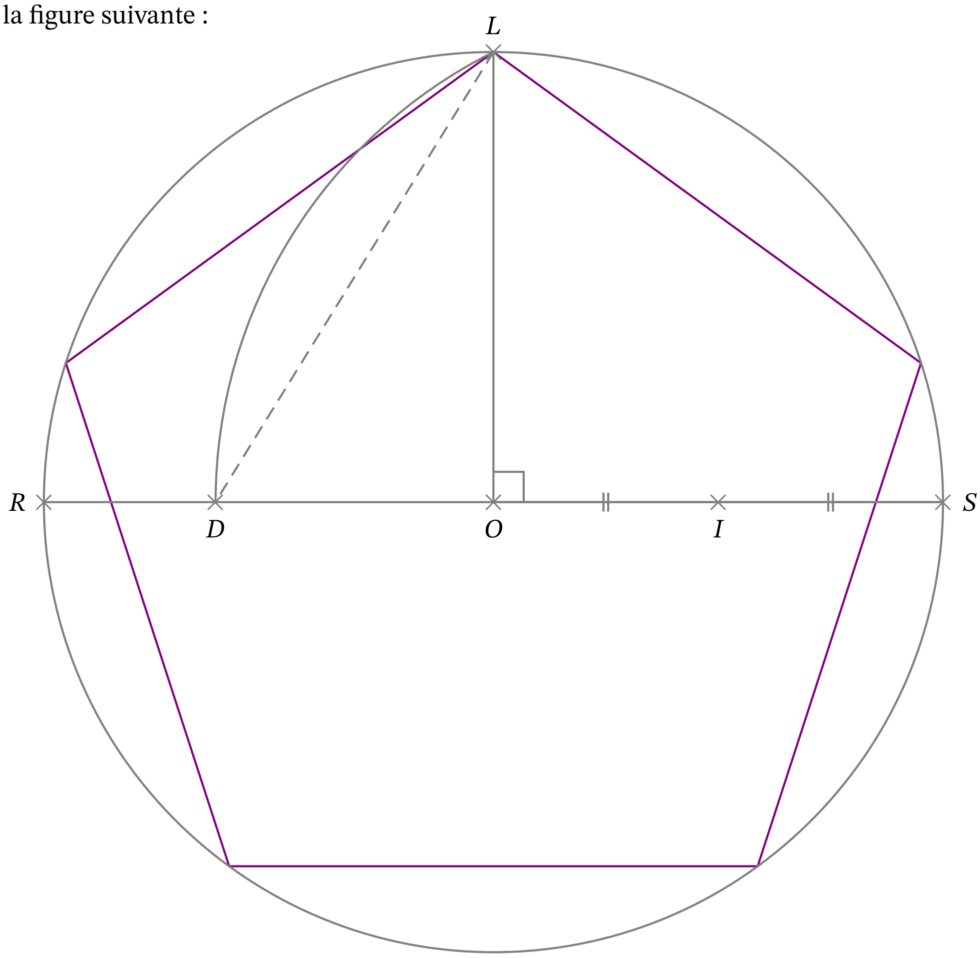
2. (a) Nous sommes dans uns situation de proportionnalité. Notons s la longueur du segment recherché.

Longueur du segment de départ en cm	4	s
Longueur du côté du pentagone en cm	$\sqrt{10-2\sqrt{5}}$	7

$$s = \frac{4\,\text{cm} \times 7\,\text{cm}}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}\text{cm}} \approx 11{,}909\,1\,\text{cm}$$

Pour construire un pentagone de côté 7 cm, il faut commencer par tracer un segment $[RS]$ d'environ 11,9 cm.

(b) On obtient la figure suivante :



(c) La partie de la boucle de répétition dessine une branche (constituée de deux segments) de l'étoile. Le nombre de répétition est donc de 4.

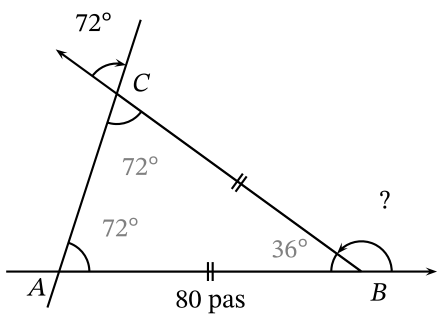
On considère, par exemple, la première branche.

– Arrivé en C, le script nous indique de tourner à droite d'un angle de 72°. L'angle $\widehat{ACB}$ lui est opposé par le sommet il mesure donc aussi 72°.

– $BA = BC$, le triangle ABC est isocèle en B. Par conséquent, ses angles à la base sont égaux, on a donc $\widehat{CAB} = \widehat{ACB} = 72°$.

– La somme des angles d'un triangle faisant 180°, l'angle $\widehat{ABC}$ mesure $180° - 2 \times 72° = 36°$.

– Enfin, l'angle recherché dans la ligne 9 est l'angle supplémentaire à $\widehat{ABC}$, il mesure $180° - 36° = 144°$.



Finalement, les lignes 7 et 9 peuvent être complétées ainsi :

Ligne 7 : 

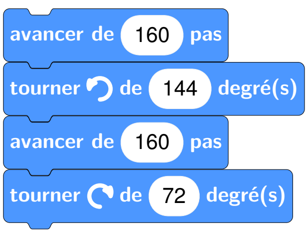
et ligne 9 : 

.

(d) Cette étoile comporte 5 fois 2 segments de 80 pas, soit 10×80 pas.

Le périmètre de l'étoile est de 800 pas.

(e) Doubler le périmètre revient à faire un agrandissement de la figure d'un facteur 2. Les longueurs sont alors multipliées par 2 mais les angles restent inchangés. On obtient donc les lignes 8 à 11 suivantes :



Exercice n°4

Dans une classe de Grande Section, l'enseignant propose à ses élèves le jeu suivant dans lequel il s'agit d'être le premier à avoir <u>exactement</u> 15 jetons (source : *Découvrir les maths GS - Éditions Hatier*).
Chaque élève lance deux dés bien équilibrés, identiques, à 6 faces numérotées de 1 à 6. Il considère les deux nombres indiqués sur les faces supérieures de chacun des dés.
Lorsque les deux dés indiquent le même nombre, l'élève prend autant de jetons que l'indique l'un des deux dés. Sinon, il prend autant de jetons que le plus grand des deux nombres ou le double de jetons du plus petit.
Après avoir lancé les dés, un élève a la possibilité de passer son tour. Dans ce cas, il ne prend aucun jeton.

1. Un élève lance les deux dés ; il obtient un 3 et un 2. Combien de jetons peut-il prendre ?
   Donner tous les cas possibles.
2. Dresser la liste des tirages permettant d'obtenir 3 jetons.
3. Un élève lance les deux dés.
   (a) Montrer que la probabilité de l'événement « les nombres obtenus sont un 3 et un 2 » est de $\dfrac{1}{18}$.
   (b) Quelle est la probabilité de l'événement « au moins un des nombres obtenus est 3 » ?
   (c) Quelle est la probabilité de l'événement « les nombres obtenus permettent de prendre 4 jetons » ?
4. Après un nouveau lancer des deux dés, un élève a pris 3 jetons. Au lancer suivant, la probabilité qu'il prenne de nouveau 3 jetons augmente-t-elle, reste-t-elle identique ou diminue-t-elle par rapport à la probabilité d'avoir pris 3 jetons au tirage précédent ? Justifier.
5. En fin de partie, un élève possède 12 jetons. Lors de son lancer de dés, il obtient un 1 et un 4. Pourquoi est-il préférable pour lui de passer son tour ?

1. Si l'élève choisit le dé marqué d'un 3, il choisit 3 jetons. S'il choisit le dé marqué d'un 2, il en choisit 4. S'il choisit de passer son tour, il prend aucun jeton.

   L'élève peut prendre 0, 3 ou 4 jetons.

2. Pour obtenir 3 jetons, il faut que le plus grand (au sens large) des deux jetons soit égal à 3, puisque c'est un nombre impair, impossible à obtenir avec un dé de valeur plus petite.

   Les tirages possibles pour obtenir un 3 sont : « obtenir 1 et 3 », « obtenir 2 et 3 » ou « obtenir 3 et 3 ».

3. On peut construire un tableau récapitulant toutes les issues possibles en indiquant le nombre de jetons qui peut être pris pour chacun des tirages et en distinguant les deux dés.

   Les dés sont équilibrés, il y a donc équiprobabilité de chaque « case » et 36 issues possibles. On notera $(d_1; d_2)$ une issue possible où d_1 est le résultat de l'un des dés et d_2 le résultat du deuxième.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	1	2	2 ou 3	2 ou 4	2 ou 5	2 ou 6
2	2	2	3 ou 4	4	4 ou 5	4 ou 6
3	2 ou 3	3 ou 4	3	4 ou 6	5 ou 6	6
4	2 ou 4	4	4 ou 6	4	5 ou 8	6 ou 8
5	2 ou 5	4 ou 5	5 ou 6	5 ou 8	5	6 ou 10
6	2 ou 6	4 ou 6	6	6 ou 8	6 ou 10	6

   (a) Il y a deux issues possibles à l'événement « les nombres obtenus sont un 3 et un 2 » :
   (2;3) ou (3;2)
   $\mathcal{P}_a = \dfrac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}} = \dfrac{2}{36} = \dfrac{1}{18}$.
   (b) Il y a onze issues possibles à l'événement « au moins un des nombres obtenus est 3 » :
   (3;1) ; (3;2) ; (3;3) ; (3;4) ; (3;5) ; (3;6) ; (1;3) ; (2;3) ; (4;3) ; (5;3) et (6;3).
   $\mathcal{P}_b = \dfrac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}} = \dfrac{11}{36}$.

(c) Il y a treize issues possibles à l'événement « es nombres obtenus permettent de prendre 4 jetons » :
(1;4) ; (2;3) ; (2;4) ; (2;5) ; (2;6) ; (3;2) ; (3;4) ; (4;1) ; (4;2) ; (4;3) ; (4;4) ; (5;2) et (6;2).
$\mathcal{P}_c = \dfrac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}} = \dfrac{13}{36}$.

4. Chaque lancer est indépendant du précédent, ce qui signifie que le résultat d'un lancer n'a aucune influence sur le suivant (on reprend les mêmes dés et on recommence identiquement).

   La probabilité qu'il puisse prendre trois jetons au lancer suivant un lancer où il a pu prendre trois jetons est la même.

5. Avec un 1 et un 4, il a trois choix :

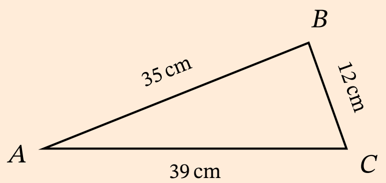
   – Il passe sont tour, et garde ses 12 jetons. Il devra donc encore récupérer 3 jetons lors des tours suivants.
   – Il choisit de doubler la valeur du plus petit dé et de prendre 2 jetons, ce qui lui en fait 14. Il devra donc récupérer 1 seul jeton lors des tours suivants. O, il n'y a qu'un cas possible pour cela qui est l'éventualité (1;1).
   – il choisit la valeur du plus grand dé et prend 4 jetons, ce qui lui en fait 16. Dans ce cas, il dépasse les 15 jetons demandés et a perdu.

   Étant donné que la probabilité de prendre 3 jetons au lancer d'après est plus élevée que celle d'en prendre un seul, il est préférable pour l'élève de passer son tour.

Exercice n°5

Pour chaque affirmation, indiquer si elle est vraie ou fausse. Justifier.

Affirmation 1 : « 257 est un nombre décimal. »
Affirmation 2 : « $\dfrac{7}{3} - 8$ est un nombre rationnel. »
Affirmation 3 : « la somme de trois nombres entiers consécutifs est toujours un multiple de 3. »
Affirmation 4 : « l'équation $(x+1)(x-2) = (x-3)(x+4)$ admet un nombre entier comme solution. »
Affirmation 5 : « augmenter une quantité de 15 % puis de 10 % revient à l'augmenter de son quart. »
Affirmation 6 : « un quadrilatère ayant un angle droit est un rectangle. »
Affirmation 7 : « un triangle rectangle peut-être équilatéral. »
Affirmation 8 : « par la fonction f définie par $f(x) = -3x + 1$, l'antécédent de 4 est -11. »
Affirmation 9 : « le triangle ABC schématisé ci-dessous est rectangle. »



Affirmation 10 : « si on multiplie par 3 les longueurs des côtés d'un rectangle, alors son aire est également multipliée par 3. »

1. 257 est un nombre entier naturel, ensemble inclus dans l'ensemble des nombres décimaux ($\mathbb{N} \in \mathbb{D}$), c'est donc un nombre décimal (on peut aussi l'écrire sous la forme d'une fraction décimale : $\dfrac{257}{10^0} = \dfrac{2570}{10^1}$ ...).

   L'affirmation 1 est vraie.

2. $\dfrac{7}{3} - 8 = \dfrac{7}{3} - \dfrac{24}{3} = -\dfrac{17}{3}$. Ce nombre, écrit en écriture fractionnaire, possède un numérateur et un dénominateur entiers, c'est donc bien un nombre rationnel.

   L'affirmation 2 est vraie.

3. Soit n un nombre entier quelconque. La somme de trois nombres entiers consécutifs s'écrit :

$$\begin{aligned} n + (n+1) + (n+2) &= n + n + 1 + n + 2 \\ &= 3n + 3 = 3(n+1) \quad \text{qui est bien un multiple de 3} \end{aligned}$$

   L'affirmation 3 est vraie.

4. On commence par développer les deux membres de l'équation avant de simplifier puis de résoudre l'équation.

$$\begin{aligned}(x+1)(x-2) &= (x-3)(x+4)\\ x^2-2x+x-2 &= x^2+4x-3x-12\\ \cancel{x^2}-x-2 &= \cancel{x^2}+x-12\\ -x-2 &= x-12\\ -2+12 &= x+x\\ 10 &= 2x\\ 5 &= x\end{aligned}$$

La solution de l'équation est $x = 5$ qui est un nombre entier.

L'affirmation 4 est vraie.

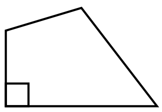
5. Une augmentation de 15 % correspond à un coefficient multiplicateur de $1 + \dfrac{15}{100} = 1,15$.

   Une augmentation de 10 % correspond à un coefficient multiplicateur de $1 + \dfrac{10}{100} = 1,10$.

   Donc, une augmentation de 15 % puis de 10 % correspond à un coefficient multiplicateur de $1,15 \times 1,10 = 1,265$, soit une augmentation de 26,5 %, supérieure à une augmentation d'un quart (25 %).

   L'affirmation 5 est fausse.

6. Une quadrilatère ayant un angle droit n'est pas nécessairement un rectangle (il faudrait pour cela qu'il en ait trois).

   Contre-exemple : 

   L'affirmation 6 est fausse.

7. Un triangle rectangle possède un angle droit (90°). Or, un triangle équilatéral possède trois angles égaux à 60°. Un triangle ne peut donc pas être à la fois rectangle et équilatéral.

   L'affirmation 7 est fausse.

8. L'antécédent de 4 est le nombre x tel que $f(x) = 4$.

$$\begin{aligned}-3x+1 &= 4\\ -3x &= 3\\ x &= \frac{3}{-3}\\ x &= -1\end{aligned}$$

   L'affirmation 8 est fausse.

9. Toutes les mesures de longueur sont en cm.

   Dans le triangle ABC, $[AC]$ est le plus grand côté.

$$\left.\begin{aligned} AC^2 &= 39^2 = 1\,521\\ \\ AB^2+BC^2 &= 12^2+35^2 = 144+1\,225 = 1\,369\end{aligned}\right\} AC^2 \neq AB^2+BC^2$$

   Comme $AC^2 \neq AB^2+BC^2$, alors le triangle ABC n'est pas rectangle d'après la contraposée du théorème de Pythagore. L'affirmation 9 est fausse.

10. Multiplier les longueur par 3 (c'est à dire faire un agrandissement de facteur 3), revient à multiplier son aire par $3^2 = 9$.

    L'affirmation 10 est fausse.

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE
ET DE LA JEUNESSE
Liberté
Égalité
Fraternité

EST MAT 4

SESSION 2023

CONCOURS DE RECRUTEMENT DE PROFESSEURS DES ECOLES

CRPE Supplémentaire : Créteil - Versailles

Concours externe

Deuxième épreuve d'admissibilité

Épreuve écrite disciplinaire de mathématiques

L'épreuve est constituée d'un ensemble d'au moins trois exercices indépendants, permettant de vérifier les connaissances du candidat.

Durée : 3 heures

L'usage de la calculatrice est autorisé dans les conditions relevant de la circulaire du 17 juin 2021 BOEN du 29 juillet 2021.

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout document et de tout matériel électronique est rigoureusement interdit.

Il appartient au candidat de vérifier qu'il a reçu un sujet complet et correspondant à l'épreuve à laquelle il se présente.

Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous devez le signaler très lisiblement sur votre copie, en proposer la correction et poursuivre l'épreuve en conséquence. De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, vous devez la (ou les) mentionner explicitement.

NB : Conformément au principe d'anonymat, votre copie ne doit comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé consiste notamment en la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de la signer ou de l'identifier.
Le fait de rendre une copie blanche est éliminatoire.

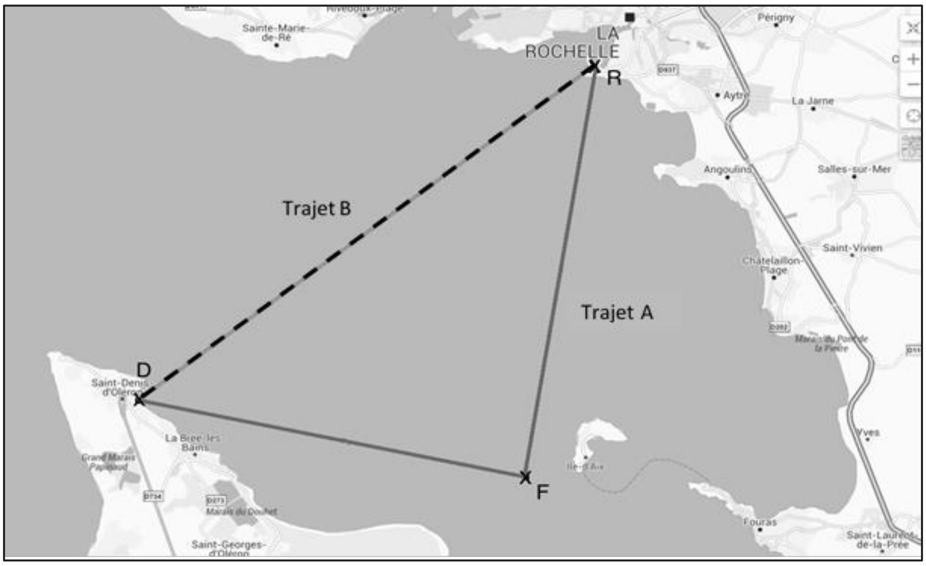
Tournez la page S.V.P

Ce sujet est composé de sept exercices indépendants.

EXERCICE 1

Une enseignante organise une sortie scolaire autour de La Rochelle. Le voyage s'effectue par navette maritime en deux étapes :

- un trajet aller, appelé trajet A, qui part du port de La Rochelle (point R), se rend autour du fort Boyard (point F), fait deux tours du fort puis se rend à St-Denis d'Oléron (point D) ;
- un trajet retour, appelé trajet B, qui part de Saint-Denis d'Oléron (point D) et se rend directement au port de La Rochelle (point R).



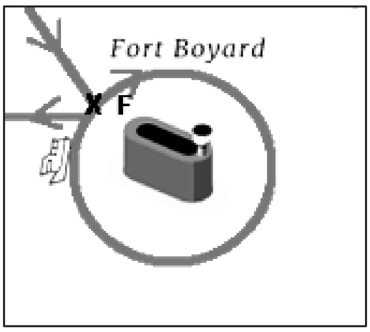
Partie A : étude des trajets

1. On donne DF = 13,80 km, DR = 23,41 km et RF = 18,91 km.
Démontrer que le triangle RDF est un triangle rectangle en F.

Le nœud est une unité de vitesse utilisée dans le domaine maritime. 1 nœud correspond à 1 852 mètres par heure.

2. Sachant que la vitesse moyenne de la navette sur le trajet B est de 10 nœuds, calculer la durée du trajet B, en minute, arrondie à l'unité.

3. Le trajet A prévoit un détour vers le Fort Boyard. La navette effectue deux fois le tour du fort avant de repartir. On modélise le tour du fort par un trajet circulaire, de rayon 500 m.



- **a.** Montrer que la longueur d'un tour du fort, ainsi modélisée, est d'environ 3142 m.
- **b.** Calculer la distance totale du trajet A. Donner le résultat en kilomètre, arrondi à l'unité.

4. Le trajet A dure au total 2 h. Calculer la vitesse moyenne de la navette, exprimée en nœuds et arrondie à l'unité.

Partie B : étude de tarifs

L'entreprise qui réalise ce trajet étudie le prix à fixer pour le voyage.
Une étude de marché montre qu'en fixant le prix d'une place sur la navette à 30 €, l'entreprise vendrait 450 places en moyenne par jour.
La même étude montre que :

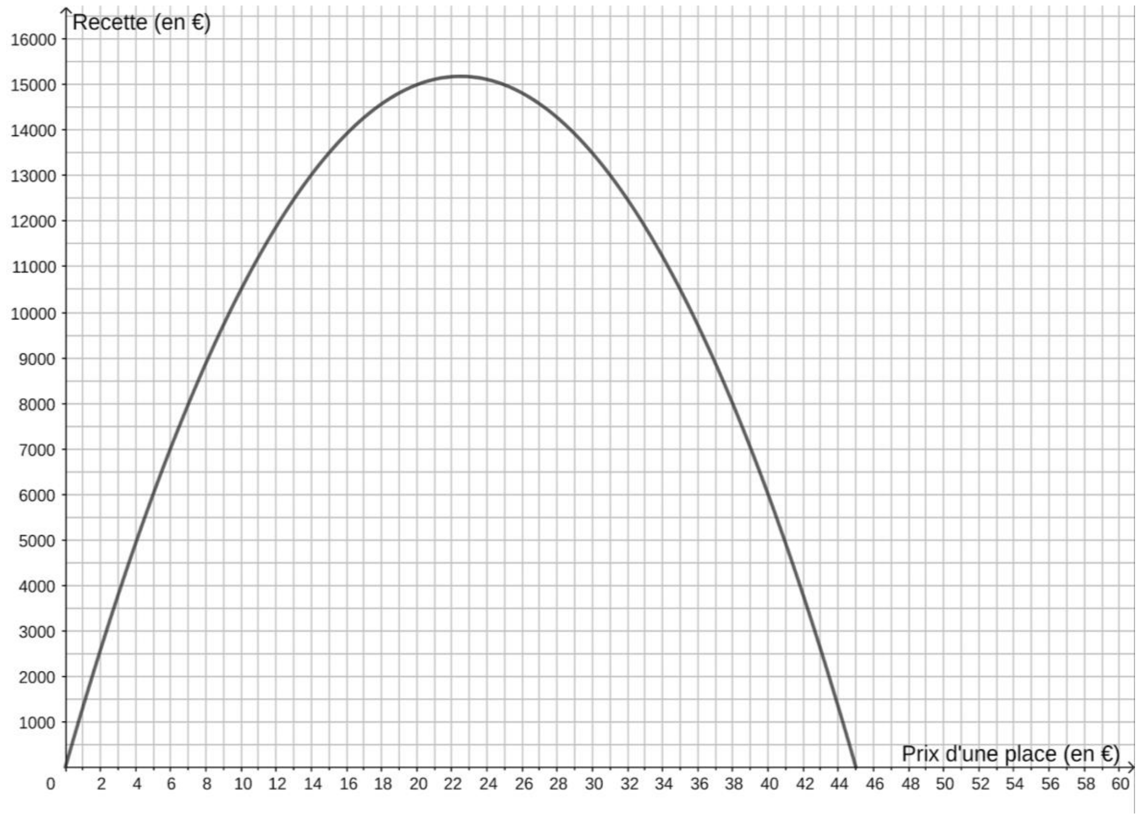
- à chaque augmentation de 10 centimes, l'entreprise vendra 3 places de moins ;
- à chaque diminution de 10 centimes, l'entreprise vendra 3 places de plus.

On appelle recette journalière moyenne de l'entreprise le montant récolté lors de la vente des places.

1. Calculer la recette journalière moyenne si l'entreprise fixe le prix d'une place à 30 €.

2. **a.** Montrer que si l'entreprise décide de fixer la place à 40 €, alors la recette journalière moyenne est de 6 000 €.
b. Calculer la recette journalière moyenne si l'entreprise décide de fixer la place à 10 €.

3. Le graphique suivant donne la recette journalière prévue par l'étude de marché en fonction du prix d'une place.

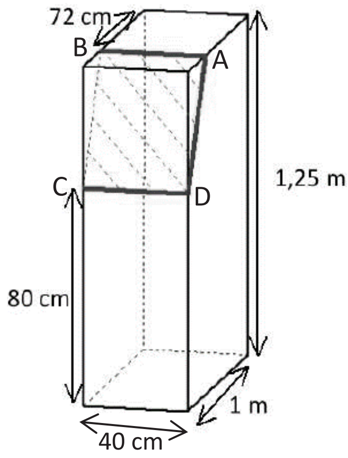


Répondre aux questions suivantes avec la précision permise par le graphique :

a. Donner la recette journalière pour un prix unitaire de 10 €.
b. Déterminer le(s) prix unitaire(s) correspondant à une recette journalière de 14 000 €.
c. Quel prix unitaire permet d'obtenir une recette journalière maximale ? Indiquer le montant de cette recette maximale.

EXERCICE 2

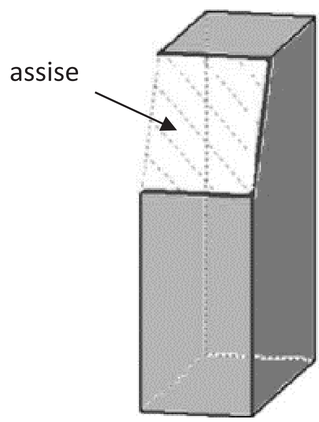
Une mairie souhaite végétaliser la cour de son école.
Sur un sol de copeaux de bois, la mairie souhaite installer des appuis conçus à partir de parallélépipèdes rectangles.
Les appuis sont obtenus à partir de blocs de bois éco-responsables, qui sont ensuite tronçonnés en partie de façon à obtenir une assise rectangulaire ABCD sur laquelle les élèves peuvent s'appuyer.



La mairie décide d'installer dans la cour de l'école trente de ces appuis.

1. Calculer, en mètre cube, le volume de bois nécessaire avant tronçonnage, à la fabrication des trente appuis.

2. Une fois tronçonnés, les blocs prennent donc la forme ci-contre.
   Les assises des appuis sont alors peintes en blanc.
   - **a.** Montrer que l'aire d'un rectangle à peindre en blanc est égale à 2120 cm².
   - **b.** Calculer l'aire totale des rectangles à peindre en blanc pour les 30 appuis en mètre carré.
   - **c.** D'après la fiche technique suivante, combien de pots de couleur blanche seront nécessaires ?



Fiche technique
- Peinture laque glycero aspect satiné
- Usage : intérieur, extérieur, monocouche
- Rendement : 10 m²/L
- Protège des UV et intempéries
- Conditionnement : 0,5 L

EXERCICE 3

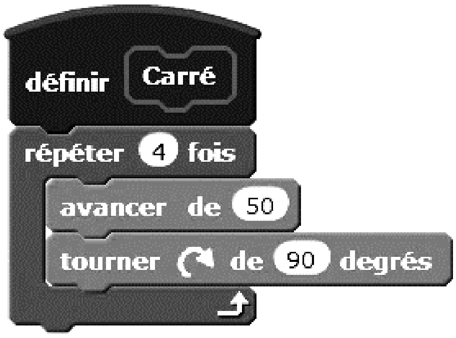
Une enseignante propose à ses élèves un jeu de 52 cartes. Le jeu contient 13 cartes (As, 2, 3, …, 10, Valet, Dame, Roi) de chacune des familles suivantes : carreau, cœur, pique, trèfle. Cœur et carreau sont des familles de couleur rouge. Pique et trèfle sont de couleur noire.

1. L'enseignante donne une carte, choisie au hasard, à Ana.
   - **a.** Quelle est la probabilité que la carte d'Ana soit rouge ?
   - **b.** Quelle est la probabilité que la carte d'Ana soit un pique ?
   - **c.** Quelle est la probabilité que la carte d'Ana soit un valet ?
   - **d.** Quelle est la probabilité que la carte d'Ana soit une dame de couleur rouge ?
   - **e.** Quelle est la probabilité que la carte d'Ana soit une carte de couleur rouge ou une dame ?

2. L'enseignante décide d'ajouter des cartes Joker à son jeu. Combien doit-elle ajouter de carte joker pour que la probabilité qu'Ana reçoive une carte Joker soit de $\frac{1}{14}$?

EXERCICE 4

On considère les deux scripts ci-dessous.

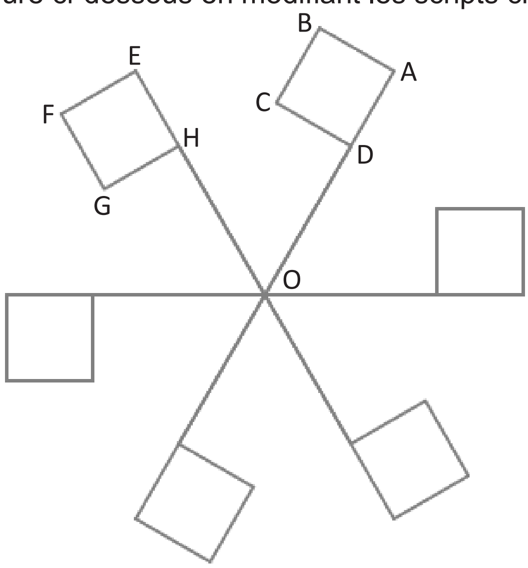
Script principal	Bloc Carré
Ligne A Ligne B  	Ligne C 

On rappelle que l'instruction 

signifie que l'on se dirige vers la droite.

1. Représenter sur la copie la figure réalisée par le script principal. Le lutin se déplace selon le nombre de pixels défini. On représentera 25 pixels par 1 cm.

2. On souhaite réaliser la figure ci-dessous en modifiant les scripts ci-dessus.



   a. Quelles modifications doit-on apporter aux lignes A, B et C pour obtenir cette figure ?
   b. Proposer une transformation géométrique, dont on donnera les caractéristiques, permettant de passer du carré ABCD au carré EFGH.

EXERCICE 5

Les effectifs et les salaires mensuels des différents employés d'une entreprise sont inscrits dans la feuille de calcul suivante :

	A	B	C	D	E	F
1	Fonction dans l'entreprise	Ouvrier	Technicien	Secrétaire	Cadre	Directrice
2	Effectif	4	5	2	3	1
3	Salaire brut (€)	1923	2307	2693	4200	5500
4	Charges (22%)					
5	Salaire net (€)					
6						

Dans la suite de l'exercice, on considère que les charges s'élèvent à 22% du salaire brut. Le salaire brut moins les charges est appelé salaire net.

1. Quelle est l'étendue des salaires mensuels bruts dans cette entreprise ?

2. Montrer que le salaire mensuel net de la directrice est de 4 290 €.

3. Le comptable souhaite calculer le salaire mensuel net des autres employés.
Quelle formule doit-il écrire dans la cellule B4 pour calculer les charges sociales d'un ouvrier ? Cette formule doit pouvoir être étendue pour calculer les charges dans toutes les colonnes.

4. Quelle formule entrer dans la cellule B5 pour calculer le salaire net de l'ouvrier ? Cette formule doit pouvoir être étendue pour calculer les salaires nets dans toutes les colonnes.

5. Calculer le salaire mensuel brut moyen dans cette entreprise. Arrondir à l'euro.

6. Déterminer la médiane des salaires mensuels bruts de cette entreprise.

7. L'entreprise envisage l'embauche d'un nouvel ingénieur. Celui-ci souhaite un salaire net de 3 200 €. À combien doit s'élever son salaire brut ? Arrondir à l'euro.

EXERCICE 6

On considère un nombre entier à deux chiffres et l'on appelle son « retourné » le nombre obtenu en permutant le chiffre des dizaines et celui des unités.

1. Recopier et compléter le tableau suivant :

Nombre choisi	43	57	52	60	16
Nombre retourné	34	75			
Différence entre le nombre choisi et son « retourné »	9	-18			

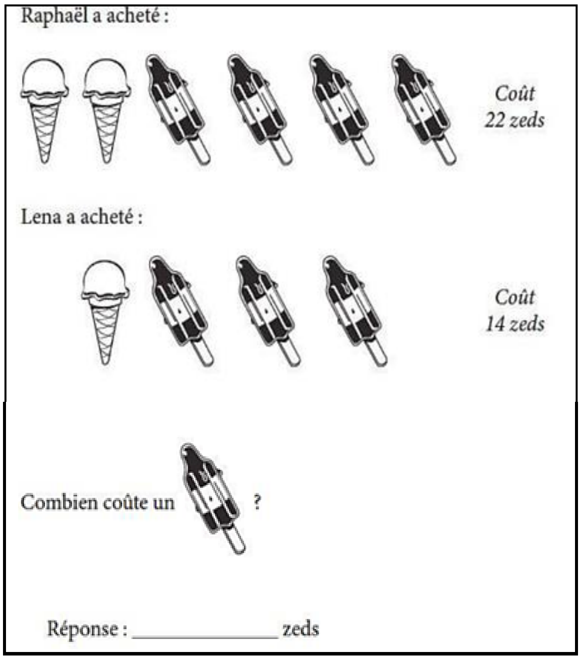
2. Quelle conjecture peut-on faire sur la différence entre un nombre et son retourné ?

3. On note N le nombre choisi, u son chiffre des unités et d son chiffre des dizaines.

- **a.** Exprimer N en fonction de d et u.
- **b.** Exprimer le « retourné » R du nombre choisi en fonction de d et u.
- **c.** Montrer que la différence $N - R$ est égale à $9(\mathrm{d} - \mathrm{u})$.
- **d.** En déduire que la différence entre un nombre et son retourné est un multiple de 9.
- **e.** Pour obtenir une différence $N - R$ égale à 63 quels nombres est-il possible de choisir au départ ? Donner l'ensemble des solutions.
- **f.** Pour obtenir une différence $N - R$ égale à 56 quels nombres est-il possible de choisir au départ ? Donner l'ensemble des solutions.

EXERCICE 7

Cet exercice est inspiré d'un problème proposé à des élèves de fin CM1 en 2015 aux évaluations internationales TIMSS.



1. Un élève propose la réponse suivante :

$$2 \times 14 - 22 = 6$$

Une glace fusée vaut 6 zeds.

Identifier l'erreur de l'élève.

2. On note x le prix en zed d'un cône et y le prix en zed d'une glace fusée.
Écrire les équations correspondantes au problème et en déduire le prix d'un cône et d'une glace fusée.

Information aux candidats

Les codes doivent être reportés sur les rubriques figurant en en-tête de chacune des copies que vous remettrez.

Épreuve écrite disciplinaire de mathématiques

Concours Externe - Créteil

	Concours	Épreuve	Matière
Public	**EXT CRE PU**	**102**	**9418**

Concours Externe - Versailles

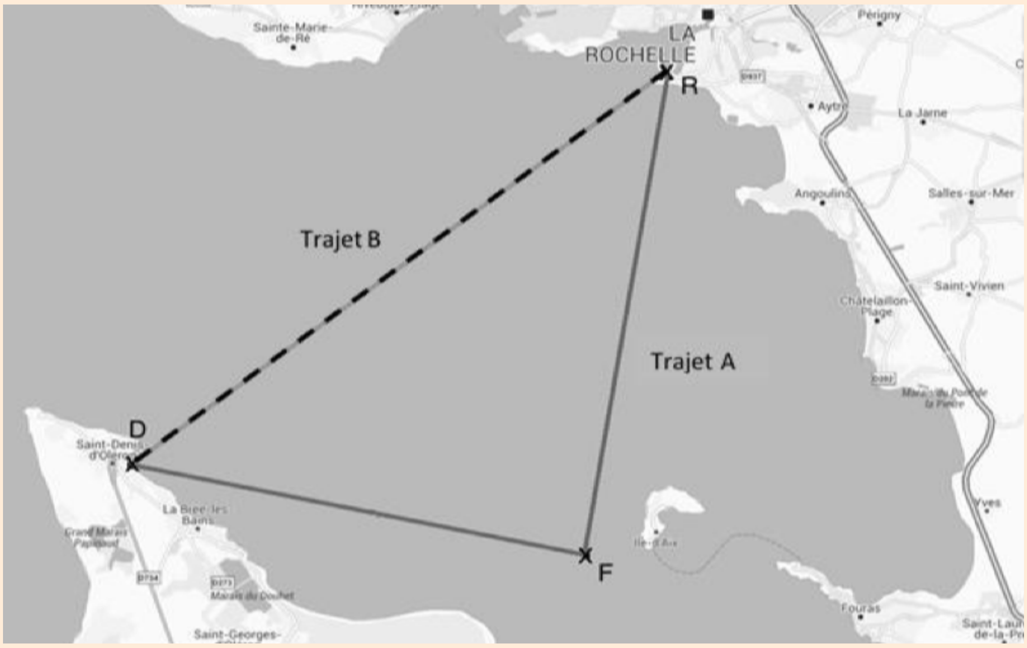
	Concours	Épreuve	Matière
Public	**EXT VER PU**	**102**	**9418**

IMPRIMERIE NATIONALE – 23 0907 – D'après documents fournis

Exercice n°1

Une enseignante organise une sortie scolaire autour de La Rochelle. Le voyage s'effectue par navette maritime en deux étapes :

- un trajet aller, appelé trajet A, qui part du port de La Rochelle (point R), se rend autour du fort Boyard (point F), fait deux tours du fort puis se rend à St-Denis d'Oléron (point D) ;
- un trajet retour, appelé trajet B, qui part de Saint-Denis d'Oléron (point D) et se rend directement au port de La Rochelle (point R).



Partie A : étude des trajets

1. On donne $DF = 13{,}80\,\text{km}$, $DR = 23{,}41\,\text{km}$ et $RF = 18{,}91\,\text{km}$.
   Démontrer que le triangle RDF est un triangle rectangle en F.

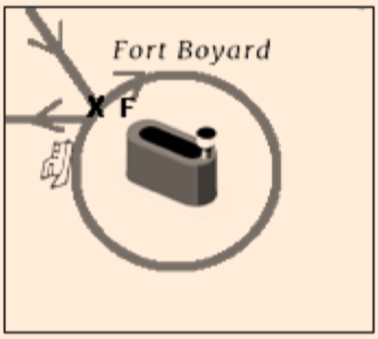
Le nœud est une unité de vitesse utilisée dans le domaine maritime. 1 nœud correspond à 1 852 mètres par heure.

2. Sachant que la vitesse moyenne de la navette sur le trajet B est de 10 nœuds, calculer la durée du trajet B, en minute, arrondie à l'unité.
3. Le trajet A prévoit un détour vers le Fort Boyard.

   La navette effectue deux fois le tour du fort avant de repartir. On modélise le tour du fort par un trajet circulaire, de rayon 500 m.

   (a) Montrer que la longueur d'un tour du fort, ainsi modélisée, est d'environ 3 142 m.

   (b) Calculer la distance totale du trajet A. Donner le résultat en kilomètre, arrondi à l'unité.



4. Le trajet A dure au total 2 h. Calculer la vitesse moyenne de la navette, exprimée en nœuds et arrondie à l'unité.

Exercice n°1

Partie B : étude de tarifs

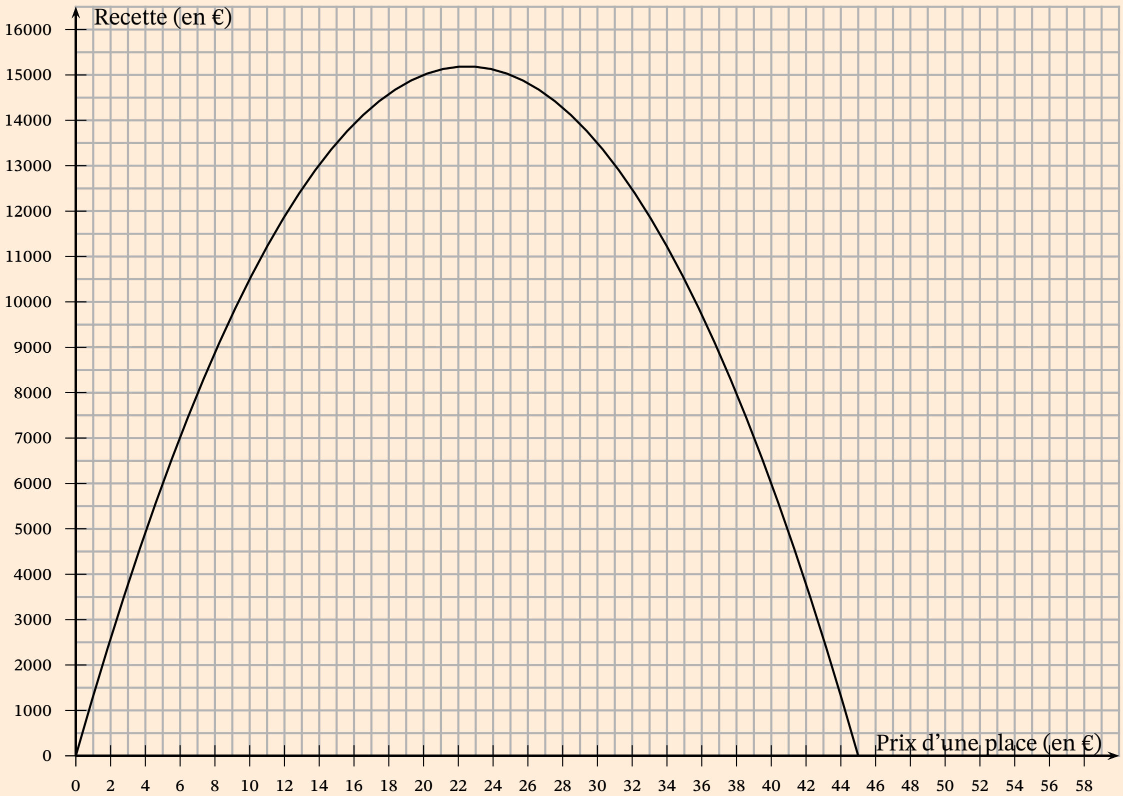
L'entreprise qui réalise ce trajet étudie le prix à fixer pour le voyage.
Une étude de marché montre qu'en fixant le prix d'une place sur la navette à 30 €, l'entreprise vendrait 450 places en moyenne par jour.

La même étude montre que :

- à chaque augmentation de 10 centimes, l'entreprise vendra 3 places de moins ;
- à chaque diminution de 10 centimes, l'entreprise vendra 3 places de plus.

On appelle recette journalière moyenne de l'entreprise le montant récolté lors de la vente des places.

1. Calculer la recette journalière moyenne si l'entreprise fixe le prix d'une place à 30 €.
2. (a) Montrer que si l'entreprise décide de fixer la place à 40 €, alors la recette journalière moyenne est de 6 000 €.
   (b) Calculer la recette journalière moyenne si l'entreprise décide de fixer la place à 10 €.
3. Le graphique suivant donne la recette journalière prévue par l'étude de marché en fonction du prix d'une place.



Répondre aux questions suivantes avec la précision permise par le graphique :

(a) Donner la recette journalière pour un prix unitaire de 10 €.
(b) Déterminer le(s) prix unitaire(s) correspondant à une recette journalière de 14 000 €.
(c) Quel prix unitaire permet d'obtenir une recette journalière maximale ? Indiquer le montant de cette recette maximale.

Partie A : étude des trajets

1. Dans le triangle RDF, $[RD]$ est le plus grand côté. Avec des mesures de longueurs en km, on a :

$$\left.\begin{array}{l} RD^2 = 23,41^2 = 548,02801 \\ RF^2 + FD^2 = 18,91^2 + 13,80^2 = 357,5881 + 190,44 = 548,0281 \end{array}\right\} RD^2 = RF^2 + FD^2$$

Comme $RD^2 = RF^2 + FD^2$, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle RDF est rectangle en F.

2. On a la formule $v = \dfrac{d}{t}$, soit $t = \dfrac{d}{v}$ si l'on veut calculer une durée.

$$t = \frac{23{,}41\,\text{km}}{10\text{ nœuds}} = \frac{23{,}41\,\text{km}}{10 \times 1\,852\,\text{m/h}} = \frac{23\,410\,\text{m}}{10 \times \frac{1852}{60}\text{m/min}} \approx 75{,}84\,\text{min}$$

Le trajet B a une durée d'environ 76 minutes.

3. (a) Le tour est modélisé par un cercle de rayon 500 m. Donc :

$$p = 2 \times \pi \times 500\,\text{m} = 1000\,\pi\,\text{m} \approx 3\,141{,}59\,\text{m}$$

La longueur du tour du fort est d'environ 3 142 m.

(b) Longueur du trajet A : longueur RF + deux tours du fort + longueur FD.

$$\ell = 18{,}91\,\text{km} + 2 \times \pi\,\text{km} + 13{,}80\,\text{km} \approx 38{,}98\,\text{km}$$

La longueur du trajet B est d'environ 39 km.

4. $v = \dfrac{d}{t} = \dfrac{39\,\text{km}}{2\,\text{h}} = 19{,}5\,\text{km/h}.$

Or, 1 nœud vaut 1 852 m/h, soit 1,852 km/h. On a $\dfrac{19,5}{1,852} \approx 10,53$.

La vitesse moyenne de la navette A est de 11 nœuds.

Partie B : étude de tarifs

1. Si l'entreprise fixe la place à 30 €, l'entreprise vend 450 places par jour. Ce qui fait une recette journalière de

$$450 \times 30\,€ = 13\,500\,€$$

À un prix de 30 €, la recette moyenne journalière est de 13 500 €.

2. (a) Un prix de 40 € correspond à une augmentation de 10 € = 1 000 centimes d'euro, soit 100 × 10 centimes.
Elle vendra donc 450 places − 100 × 3 places = 450 places − 300 places = 150 places.

$$150 \times 40\,€ = 6\,000\,€$$

À un prix de 40 €, la recette moyenne journalière est de 6 000 €.

(b) Un prix de 10 € correspond à une diminution de 20 € = 2 000 centimes d'euro, soit 200 × 10 centimes.
Elle vendra donc 450 places + 200 × 3 places = 450 places + 600 places = 1050 places.

$$1\,050 \times 10\,€ = 10\,500\,€$$

À un prix de 40 €, la recette moyenne journalière est de 6 000 €.

3. (a) Si on choisit 10 sur l'axe des abscisses, on lit 10 500 sur l'axe des ordonnées.
La recette journalière moyenne pour un prix de 10 € est de 10 500 €.

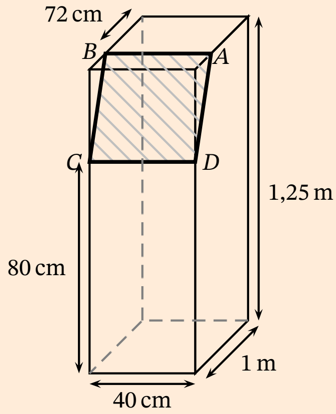
(b) Si on choisit 14 000 sur l'axe des ordonnées, on lit environ 16 et 29 sur l'axe des abscisses.
Une recette journalière moyenne de 14 000 € est atteinte pour les prix de vente de 16 € et de 29 €.

(c) Le prix unitaire maximal est atteint lorsque la courbe atteint son maximum, pour une abscisse égale à 22,5 et une ordonnée d'environ 15 200.
La recette journalière maximale est d'envion 15 200 €, pour un prix de vente de 22,50 €.

Exercice n°2

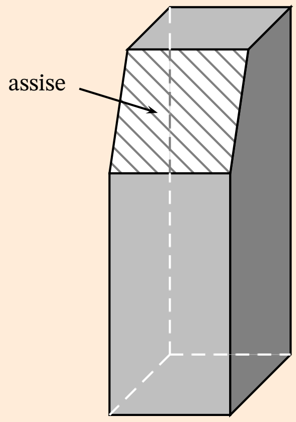
Une mairie souhaite végétaliser la cour de son école.

Sur un sol de copeaux de bois, la mairie souhaite installer des appuis conçus à partir de parallélépipèdes rectangles.
Les appuis sont obtenus à partir de blocs de bois écoresponsables, qui sont ensuite tronçonnés en partie de façon à obtenir une assise rectangulaire $ABCD$ sur laquelle les élèves peuvent s'appuyer.
La mairie décide d'installer dans la cour de l'école trente de ces appuis.



1. Calculer, en mètre cube, le volume de bois nécessaire avant tronçonnage, à la fabrication des trente appuis.
2. Une fois tronçonnés, les blocs prennent donc la forme ci-contre.
   Les assises des appuis sont alors peintes en blanc.
   (a) Montrer que l'aire d'un rectangle à peindre en assise blanc est égale à $2\,120\ \text{cm}^2$.
   (b) Calculer l'aire totale des rectangles à peindre en blanc pour les 30 appuis en mètre carré.
   (c) D'après la fiche technique suivante, combien de pots de couleur blanche seront nécessaires ?

   Fiche technique
   – Peinture laque glycero aspect satiné
   – Usage : intérieur, extérieur, monocouche
   – Rendement : $10\ \text{m}^2/\text{L}$
   – Protège des UV et intempéries
   – Conditionnement : 0,5 L



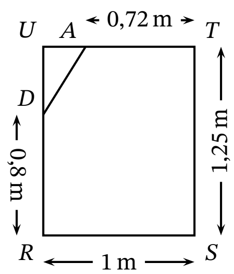
1. Volume d'un seul parallélépipède rectangle :

$$\mathcal{V} = L \times \ell \times h = 1\ \text{m} \times 40\ \text{cm} \times 1{,}25\ \text{m} = 1\ \text{m} \times 0{,}4\ \text{m} \times 1{,}25\ \text{m} = 0{,}5\ \text{m}^3$$

   Pour 30 appuis, on a donc besoin de $30 \times 0{,}5\ \text{m}^3 = 15\ \text{m}^3$.

   La mairie a besoin de $15\ \text{m}^3$ de bois pour construire ses appuis.

2. (a) La face du pavé droit où se situent les points A et D est un pentagone $ADRST$ que représenté ci-dessous.



   Dans cette configuration, étant donné que le quadrilatère $RSTU$ est un rectangle (c'est la face d'un pavé droit), que le point A appartient au segment $[TU]$ et que le point D appartient au segment $[UR]$, le triangle AUD est rectangle en U.
   $UA = UT - TA = 100\ \text{cm} - 72\ \text{cm} = 28\ \text{cm}$ et $UD = UR - RD = 125\ \text{cm} - 80\ \text{cm} = 45\ \text{cm}$.
   Dans le triangle AUD rectangle en U, le théorème de Pythagore permet d'écrire :

$$AD^2 = AU^2 + UD^2$$
$$AD^2 = 28^2 + 45^2$$
$$AD^2 = 784 + 2\,025$$
$$AD^2 = 2\,809$$
$$AD = \sqrt{2\,809}$$
$$AD = 53\ \text{cm}$$

   On peut ainsi calculer l'aire du rectangle $ABCD$: $\mathcal{A} = L \times \ell = CD \times AD = 40\ \text{cm} \times 53\ \text{cm} = 2\,120\ \text{cm}^2$.
   L'aire du rectangle à peindre est d'environ $2\,120\ \text{cm}^2$.

(b) Pour 30 appuis, l'aire totale à peindre est de :

$$30 \times 2\,120\,\mathrm{cm}^2 = 30 \times 0{,}212\,\mathrm{m}^2 = 6{,}36\,\mathrm{m}^2$$

L'aire totale à peindre en blanc est de $6{,}36\,\mathrm{m}^2$.

(c) Les données utiles de la fiche technique sont :

– la peinture s'applique en monocouche, ce qui veut dire qu'il n'y aura besoin que d'une couche ;

– le rendement est de $10\,\mathrm{m}^2/\mathrm{L}$, on a donc besoin d'un litre de peinture pour $10\,\mathrm{m}^2$ de surface à peindre ;

– le conditionnement est de 0,5 L, ce qui correspond à la capacité d'un pot de peinture.

La surface à peindre est de $6{,}36\,\mathrm{m}^2$. Or, le rendement est de $10\,\mathrm{m}^2/\mathrm{L}$, ou encore $5\,\mathrm{m}^2/0{,}5\,\mathrm{L}$.

Les pots étant vendus en conditionnement de 0,5 L, un seul pot ne suffira pas, mais 2 pots seront suffisants (il restera de la peinture).

La mairie aura beoisn de deux pots de peinture pour achever ses appuis.

Exercice n°3

Une enseignante propose à ses élèves un jeu de 52 cartes. Le jeu contient 13 cartes (As, 2, 3,..., 10, Valet, Dame, Roi) de chacune des familles suivantes : carreau, cœur, pique, trèfle. Cœur et carreau sont des familles de couleur rouge. Pique et trèfle sont de couleur noire.

1. L'enseignante donne une carte, choisie au hasard, à Ana.
   (a) Quelle est la probabilité que la carte d'Ana soit rouge ?
   (b) Quelle est la probabilité que la carte d'Ana soit un pique ?
   (c) Quelle est la probabilité que la carte d'Ana soit un valet ?
   (d) Quelle est la probabilité que la carte d'Ana soit une dame de couleur rouge ?
   (e) Quelle est la probabilité que la carte d'Ana soit une carte de couleur rouge ou une dame ?
2. L'enseignante décide d'ajouter des cartes Joker à son jeu. Combien doit-elle ajouter de cartes joker pour que la probabilité qu'Ana reçoive une carte Joker soit de $\frac{1}{14}$?

Les cartes sont tirées au hasard, on suppose qu'elle sont indiscernables au toucher, et donc qu'il y a équiprobabilité.

1. (a) Il y a 26 cartes rouges (2×13) sur un total de 52 cartes.

$$\mathcal{P}_{1a} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}} = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$$

La probabilité de tirer une carte rouge est $\frac{1}{2}$.

(b) Il y a 13 piques sur un total de 52 cartes.

$$\mathcal{P}_{1b} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}} = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

La probabilité de tirer un pique est $\frac{1}{4}$.

(c) Il y a 4 valet sur un total de 52 cartes.

$$\mathcal{P}_{1c} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

La probabilité de tirer un valet est $\frac{1}{13}$.

(d) Il y a 2 dames de couleur rouge sur un total de 52 cartes.

$$\mathcal{P}_{1d} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}} = \frac{2}{52} = \frac{1}{26}$$

La probabilité de tirer une dame rouge est $\frac{1}{26}$.

(e) Il y a 26 cartes rouges et 4 dames dont 2 rouges. Soit $26+4-2 = 28$ cartes qui sont rouges ou qui sont des dames sur un total de 52 cartes.

$$\mathcal{P}_{1e} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}} = \frac{28}{52} = \frac{7}{13}$$

La probabilité de tirer une carte rouge ou une dame est $\frac{7}{13}$.

2. Soit n le nombre de cartes joker à ajouter. Il y a donc n joker sur un total de $(52+n)$ cartes.

$$\mathcal{P}_{2} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}} = \frac{n}{52+n} = \frac{1}{14}$$

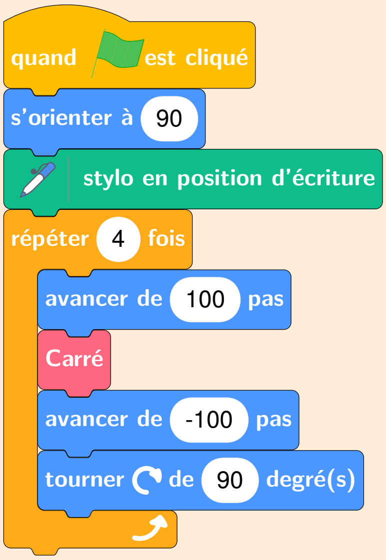
$$n \times 14 = 1 \times (52+n) \iff 14n = 52 + n$$

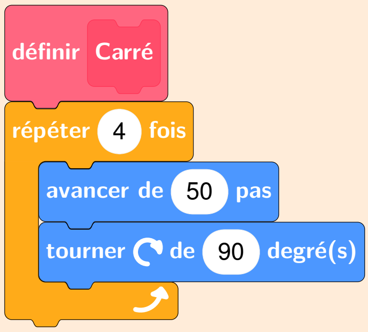
$$13n = 52 \iff n = \frac{52}{13} = 4$$

Il faut ajouter 4 jokers pour que la probabilité d'obtenir un joker soit de $\frac{1}{14}$.

Exercice n°4

On considère les deux scripts ci-dessous.

<table>
<tr><th>Script principal</th><th>Bloc Carré</th></tr>
<tr><td>
Ligne A
Ligne B


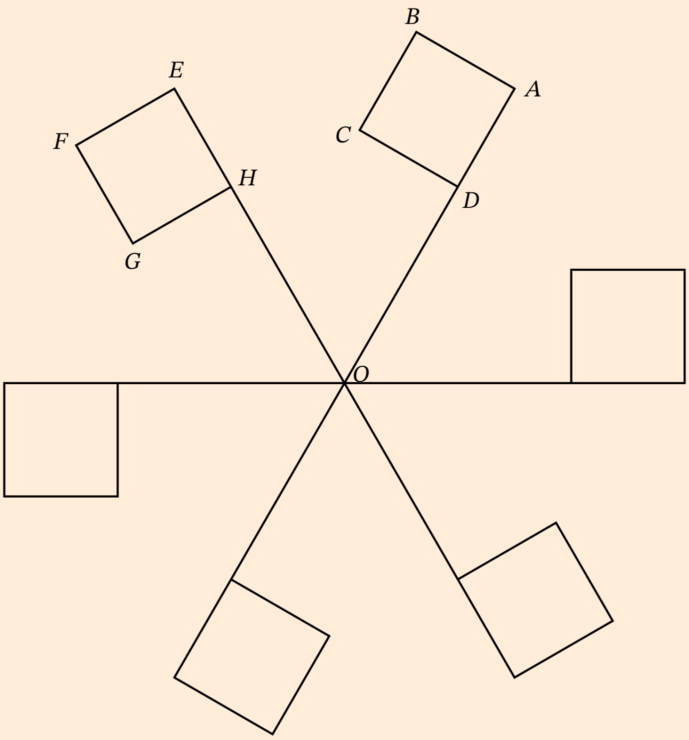
</td><td>
Ligne C


</td></tr>
</table>

On rappelle que l'instruction 

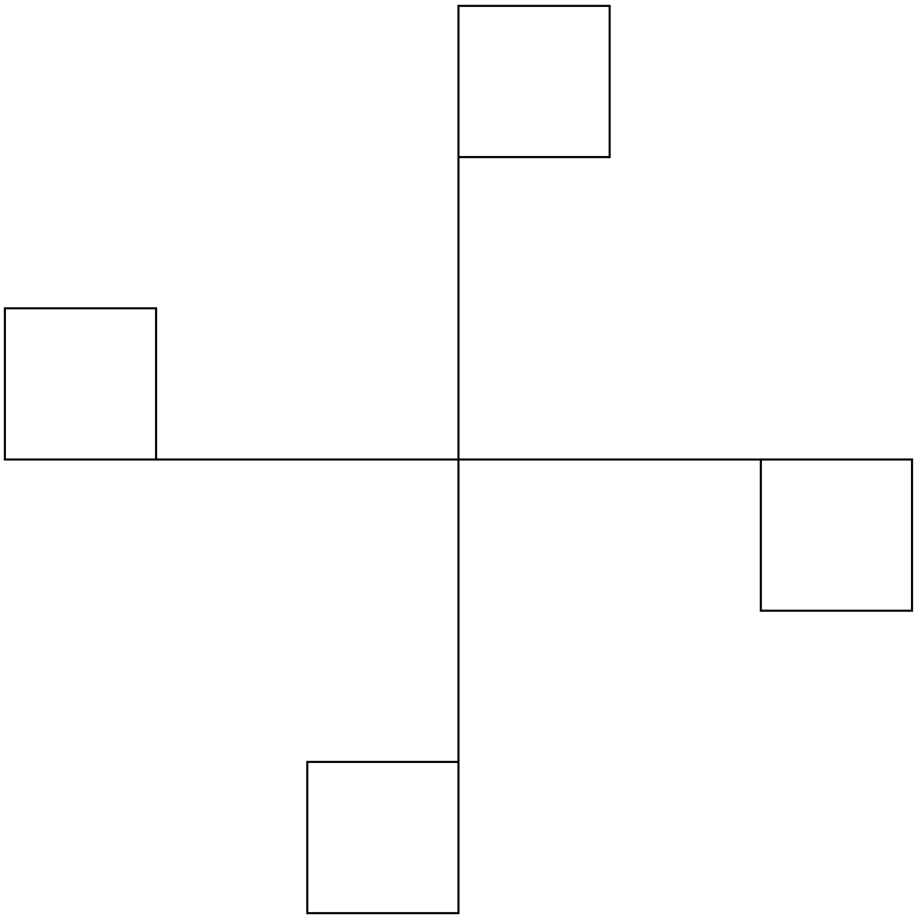
signifie que l'on se dirige vers la droite.

1. Représenter sur la copie la figure réalisée par le script principal. Le lutin se déplace selon le nombre de pixels défini. On représentera 25 pixels par 1 cm.
2. On souhaite réaliser la figure ci-dessous en modifiant les scripts ci-dessus.



   (a) Quelles modifications doit-on apporter aux lignes A, B et C pour obtenir cette figure ?
   (b) Proposer une transformation géométrique, dont on donnera les caractéristiques, permettant de passer du carré ABCD au carré EFGH.

1. Si 25 pixels sont représentés par 1 cm, alors 50 pixels sont représentés par 2 cm et 100 pixels sont représentés par 4 cm.



2. (a) Le motif « de base » est constitué d'un segment et d'un carré. Pour obtenir la figure demandée, ce motif doit être répété 6 fois, l'angle antre chacun étant de $360° \div 6 = 60°$.

   Pour la ligne A, il faut remplacer « 4 » par « 6 » : `répéter 6 fois`

   Pour la ligne B, il faut remplacer « 90 » par « 60 » : `tourner ↻ de 60 degré(s)`

   Pour la ligne C, il faut modifier le sens de rotation dans le carré : `tourner ↺ de 90 degré(s)`

   (b) La transformation permettant de passer du carré *ABCD* au carré *EFGH* est la rotation de centre *O* et d'angle 60° dans le sens direct.

Exercice n°5

Les effectifs et les salaires mensuels des différents employés d'une entreprise sont inscrits dans cette feuille de calcul.

	A	B	C	D	E	F
1	Fonction dans l'entreprise	Ouvrier	Technicien	Secrétaire	Cadre	Directrice
2	Effectif	4	5	2	3	1
3	Salaire brut (€)	1 923	2 307	2 693	4 200	5 500
4	Charges (22 %)					
5	Salaire net (€)					

Dans la suite de l'exercice, on considère que les charges s'élèvent à 22 % du salaire brut. Le salaire brut moins les charges est appelé salaire net.

1. Quelle est l'étendue des salaires mensuels bruts dans cette entreprise ?
2. Montrer que le salaire mensuel net de la directrice est de 4 290 €.
3. Le comptable souhaite calculer le salaire mensuel net des autres employés.
   Quelle formule doit-il écrire dans la cellule B4 pour calculer les charges sociales d'un ouvrier ?
   Cette formule doit pouvoir être étendue pour calculer les charges dans toutes les colonnes.
4. Quelle formule entrer dans la cellule B5 pour calculer le salaire net de l'ouvrier ?
   Cette formule doit pouvoir être étendue pour calculer les salaires nets dans toutes les colonnes.
5. Calculer le salaire mensuel brut moyen dans cette entreprise. Arrondir à l'euro.
6. Déterminer la médiane des salaires mensuels bruts de cette entreprise.
7. L'entreprise envisage l'embauche d'un nouvel ingénieur. Celui-ci souhaite un salaire net de 3 200 €.
   À combien doit s'élever son salaire brut ? Arrondir à l'euro.

1. L'étendue est la différence entre les salaires extrêmes :

$$e = \text{salaire max} - \text{salaire min} = 5\,500\,€ - 1\,923\,€ = 3\,577\,€$$

   L'étendue des salaires mensuels bruts est de 3 577 €.

2. On peut commencer par calculer les charges : $\dfrac{22}{100} \times 5\,500\,€ = 1\,210\,€$.
   Puis on en déduit le salaire net : $5\,500\,€ - 1\,210\,€ = 4\,290\,€$.
   Le salaire net mensuel de la directrice est de 4 290 €.

3. Le comptable peut entrer la formule `=22/100*B3` dans la cellule B4.

4. Le comptable peut entrer la formule `=B3-B4` dans la cellule B5.

5. Calcul du salaire brut moyen.

$$\overline{m} = \frac{4 \times 1\,923\,€ + 5 \times 2\,307\,€ + 2 \times 2\,693\,€ + 3 \times 4\,200\,€ + 1 \times 5\,500\,€}{4+5+2+3+1} = \frac{42\,713\,€}{15} \approx 2\,847{,}53\,€$$

   Le salaire brut moyen est d'environ 2 848 €.

6. Les salaires sont classés dans l'ordre croissant de leur valeur dans le tableur. Il y a au total 15 valeur, la médiane est donc la 8^{e} valeur. Selon le tableau, cette valeur se situe dans la colone C.
   La médiane des salaires bruts est de 2 307 €.

7. Le coefficient multiplicateur correspondant à une réduction de 22 % est de $1 - \dfrac{22}{100} = 0,78$.
   Soit s le salaire net de cet ingénieur, On a alors :

$$0,78 \times s = 3\,200\,€ \text{ soit } s = \frac{3\,200\,€}{0,78} \approx 4\,102{,}56\,€$$

   Le salaire brut de cet ingénieur devra être de 4 103 € à l'euro près.

Exercice n°6

On considère un nombre entier à deux chiffres et l'on appelle son « retourné » le nombre obtenu en permutant le chiffre des dizaines et celui des unités.

1. Recopier et compléter le tableau suivant :

Nombre choisi	43	57	52	60	16
Nombre retourné	34	75			
Différence entre le nombre choisi et son « retourné »	9	-18			

2. Quelle conjecture peut-on faire sur la différence entre un nombre et son retourné ?
3. On note N le nombre choisi, u son chiffre des unités et d son chiffre des dizaines.
   (a) Exprimer N en fonction de d et u.
   (b) Exprimer le « retourné » R du nombre choisi en fonction de d et u.
   (c) Montrer que la différence $N - R$ est égale à $9(d - u)$.
   (d) En déduire que la différence entre un nombre et son retourné est un multiple de 9.
   (e) Pour obtenir une différence $N - R$ égale à 63 quels nombres est-il possible de choisir au départ ? Donner l'ensemble des solutions.
   (f) Pour obtenir une différence $N - R$ égale à 56 quels nombres est-il possible de choisir au départ ? Donner l'ensemble des solutions.

1. Tableau complété :

Nombre choisi	43	57	52	60	16
Nombre retourné	34	75	25	06	61
Différence entre le nombre choisi et son « retourné »	9	-18	27	54	-45

2. On peut conjecturer que la différence entre un nombre et son retourné est un multiple de 9.

3. (a) Le nombre choisi peut s'écrire $N = 10d + u$.
   (b) Le nombre retourné peut s'écrire $R = 10u + d$.
   (c) On exprime $N - R$ en fonction de d et u :

$$\begin{aligned} N - R &= (10d + u) - (10u + d) \\ &= 10d + u - 10u - d \\ &= 9d - 9u \\ &= 9(d - u) \end{aligned}$$

   La différence $N - R$ est égale à $9(d - u)$.

   (d) $d - u$ est un nombre entier relatif puisque d et u sont des nombres entier. L'écriture de $N - R$ comme produit de 9 est d'un entier justifie que la différence entre un nombre et son retrouné est un multiple de 9.

   (e) On veut $N - R = 9(d - u) = 63$, c'est à dire $d - u = 7$. Le tableau suivant nous donne toutes les possibilités :

d	9	8	7
u	2	1	0

   si $d < 7$, u sera négatif ce qui n'est pas possible.

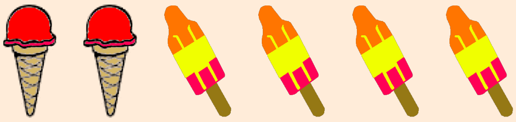
   Les nombres choisis au départ peuvent être 70, 81 ou 92.

   (f) On veut $N - R = 9(d - u) = 56$, c'est à dire $d - u = \frac{56}{9}$. d et u étant des nombres entiers, leur différence est également un entier. Or, $\frac{56}{9}$ n'est pas un entier donc, il n'est pas possible d'obtenir une différence égale à 56.

Exercice n°7

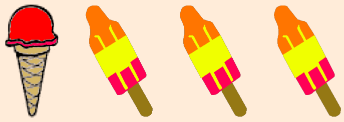
Cet exercice est inspiré d'un problème proposé à des élèves de fin CM1 en 2015 aux évaluations internationales TIMSS.

Raphaël a acheté :

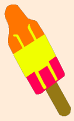


Coût
22 zeds

Lena a acheté :



Coût
14 zeds

Combien coûté un  ?

Réponse : ___________________ zeds

1. Un élève propose la réponse suivante :

   $2 \times 14 - 22 = 6$

   une glace fusée vaut 6 zeds.

   Identifier l'erreur de l'élève.
2. On note x le prix en zed d'un cône et y le prix en zed d'une glace fusée.

   Écrire les équations correspondantes au problème et en déduire le prix d'un cône et d'une glace fusée.

1. L'élève semble s'être aperçu qu'il y avait deux fois plus de cônes chez Raphaël que chez Lena.

   Il a donc doublé les quantités de glace de Lena, comme si elle avec acheté 2 cônes et 6 fusées, et a ainsi doublé le prix payé (2×14 zeds).

   Ensuite, il a soustrait le prix payé par Raphaël (22 zeds) pour obtenir le prix des fusées. Le résultat donne bien le prix des fusées, mais il en reste alors 2 ($2 \times 3 - 4$) alors que l'élève a considéré qu'il n'en restait qu'une.
2. Soit x le prix en zed d'un cône et y le prix en zed de la fusée. On a les équations suivantes :

$$\begin{cases} 2x + 4y & = 22 \quad (1) \\ x + 3y & = 14 \quad (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y & = 11 \quad (1) \div 2 \\ x + 3y & = 14 \quad (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y & = 11 \quad (1) \\ y & = 3 \quad (2) - (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x & = 11 - 2 \times 3 = 5 \\ y & = 3 \end{cases}$$

Un cône coûte 5 zeds et une glace fusée coûte 3 zeds.