Traitement de l'information chiffrée

I Proportion

1- Proportion d'une sous-population dans une population

Vocabulaire

Les éléments qui constituent une **population** sont **les individus** de cette population. Le nombre d'individus est appelé **l'effectif** de la population.

Une sous-population d'une population E de référence est une population dont tous les individus sont aussi des individus de la population E.

Définition :

La **proportion** $\boldsymbol{p}$ d'une sous-population A d'effectif n_A, dans une population E, d'effectif n_E est le rapport des effectifs $\boldsymbol{p = \frac{n_A}{n_E}}$.

Exemple : Dans une classe de 1ère année de BTS CG de 25 étudiants, 7 étudiants pratiquent le roller.

La proportion d'étudiants de cette classe pratiquant le roller est le rapport des effectifs $\frac{7}{25} = 0{,}28$

2- Comparaisons d'effectifs, de proportions

Propriété :

Pour des populations de référence différentes, les effectifs et les proportions ne sont pas forcément rangés dans le même ordre.

Exemple :

Dans une entreprise A, 40 salariés sur 80 sont des femmes. L'entreprise B compte quant à elle 36 femmes sur un total de 60 salariés.

En calculant la proportion des femmes dans chaque entreprise, on observe qu'elles représentent 50% de l'entreprise A contre 60% dans l'entreprise B. La proportion est donc supérieure dans la 2ème entreprise.

Pourtant, l'effectif de l'entreprise A est supérieur à celui de l'entreprise B.

Donc les effectifs et les proportions ne sont pas rangés dans le même ordre.

Application : Exercices 1 et 2

II Evolution

1- Taux d'évolution

Soit une quantité avec une valeur de départ notée V_D. Cette quantité va varier pour atteindre une valeur d'arrivée notée V_A

a) Variation absolue et variation relative

Définitions :

La variation absolue ΔV est donnée par $\Delta V = V_A - V_D$

La variation relative (ou taux d'évolution) $\boldsymbol{t}$ est donnée par $t = \frac{V_A - V_D}{V_D}$

Exemple : L'organisation mondiale du tourisme fournit chaque année le nombre de touristes étrangers (en millions) pour la France.

Année	2000	2009	2010	2012
Nombre de touristes étrangers	77,2	76,8	76,8	83,0

- Entre 2010 et 2012, le nombre de touristes étrangers en France est passé de 76,8 millions à 83 millions.
  La variation absolue est $83 - 76.8 = 6.2$ millions.
  La variation relative est $\frac{83-76.8}{76.8} \approx 0.08$
  Entre 2010 et 2012, le nombre de touristes étrangers en France a augmenté de 6,2 millions soit d'environ 8%.
- Entre 2009 et 2010, les variations absolue et relative sont nulles, le nombre de touristes étrangers étant resté constant (ou stable).
- Entre 2000 et 2009, la variation absolue est $76.8 - 77.2 = -0.4$ et la variation relative est $\frac{76.8-77.2}{77.2} \approx -0.005$
  Entre 2000 et 2009, le nombre de touristes étrangers en France a diminué de 0.4 million, c'est-à-dire 0.5%.

Remarque : Si la quantité augmente, les variations absolue et relative sont positives. Si la quantité diminue, elles sont négatives.

b) Coefficient multiplicateur

Propriété :

Soit t le taux d'évolution qui permet à une quantité de passer de V_D à V_A.

On a alors $V_A = (1 + t) \times V_D$

Définition :

$\boldsymbol{1 + t}$ est appelé **coefficient multiplicateur** associé au taux d'évolution t. On peut le noter CM. Par conséquent, $V_A = CM \times V_D$

Remarques :

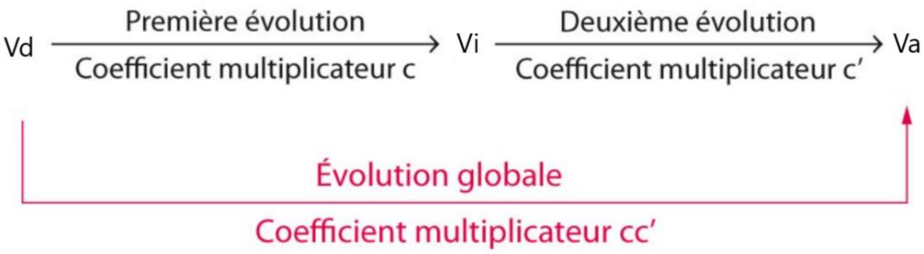
- Dans le cas d'une baisse, t est négatif et CM est un réel compris entre 0 et 1.
- Dans le cas d'une augmentation, t est positif et CM est un réel supérieur à 1.

Application : Exercice 3

2- Evolutions successives

Définition :

Deux **évolutions (hausses ou baisses) successives** de coefficients multiplicateurs c et c' correspondent à une évolution globale (hausse ou baisse) de coefficient multiplicateur cc'



Exemple : Une matière première a un prix unitaire $P_1 = 16\,\$$. Elle subit une première hausse de 25%.
Son prix unitaire devient alors $P_2 = \left(1 + \frac{25}{100}\right) P_1 = \left(1 + \frac{25}{100}\right) \times 16 = 20\,\$$

Elle subit ensuite une nouvelle hausse de 30% sur son prix P_2. Son prix unitaire devient alors $P_3 = \left(1 + \frac{30}{100}\right) P_2 = \left(1 + \frac{30}{100}\right) \times 20 = 26\,\$$

Les coefficients multiplicateurs correspondant aux 2 augmentations sont $CM_1 = 1 + \frac{25}{100} = 1{,}25$ et $CM_2 = 1 + \frac{30}{100} = 1{,}3$. On peut donc passer de P_1 à P_3 en faisant :

$$P_3 = 1{,}25 \times 1{,}3 \times P_1 = 1{,}25 \times 1{,}3 \times 16 = 26\,\$$$

Remarques :

- Si $cc' > 1$, l'évolution globale est une augmentation
- Si $cc' < 1$, l'évolution globale est une diminution
- Ce résultat se généralise même pour plus de deux évolutions successives.

Application : Exercices 4 et 5

3- Evolutions réciproques

Définition :

Deux évolutions (hausses ou baisses) sont **réciproques** si et seulement si leurs coefficients multiplicateurs c et c' sont tels que $cc' = 1 \; ou \; c' = \frac{1}{c}$

Exemple : Pour faire progresser son chiffre d'affaires, une entreprise décide d'appliquer une hausse de 15% sur le prix $P_1 = 20$ € de son produit phare.

Son prix unitaire devient alors $P_2 = \left(1 + \frac{15}{100}\right) P_1 = \left(1 + \frac{15}{100}\right) \times 20 = 23$ €

Les ventes chutent malheureusement suite à cette hausse de prix, à tel point que le chiffre d'affaires est inférieur à celui avant l'évolution. L'entreprise fait donc machine arrière et applique une baisse de 15% au prix P_2.

Son prix unitaire devient alors $P_3 = \left(1 - \frac{15}{100}\right) P_2 = \left(1 - \frac{15}{100}\right) \times 23 = 19{,}55$ €

ATTENTION : On remarque qu'**une baisse de 15% n'annule pas exactement l'effet d'une hausse de 15%.** Les évolutions ici ne sont pas réciproques mais opposées.

Ici, $c = 1{,}15$ donc $c' = \frac{1}{c} = \frac{1}{1.15} \approx 0{,}87$.

Donc $P_3 = 0.87 \times 23 = 20$ €

Application : Exercice 6

III Indice simple en base 100

1- Indice simple en base 100

Dans de nombreux domaines, notamment en économie mais aussi dans la vie courante, on utilise un indice pour mesurer l'évolution d'un phénomène.

Exemple :

La fédération française de basket-ball fournit les données suivantes du nombre de licences chaque saison.

Saison	2007-2008	2008-2009	2009-2010	2010-2011	2011-2012	2012-2013
Effectif	455 111	449 263	456 036	461 057	468 166	491 271

Choisissons 2007-2008 comme saison de référence et attribuons-lui la valeur 100.

Nous allons déterminer une suite de nombres proportionnels aux effectifs des cinq saisons suivantes.

Pour 2009-2010, le nombre x cherché vérifie :

$$\frac{x}{456036} = \frac{100}{455111} \Leftrightarrow x = 100 \times \frac{456036}{455111}$$

De même pour 2008-2009, le nombre x cherché vérifie :

$$\frac{x}{449263} = \frac{100}{455111} \Leftrightarrow x = 100 \times \frac{449263}{455111}$$

En faisant les calculs pour chaque saison, on obtient les valeurs suivantes appelées indices en base 100 pour le nombre de licences en basket :

Saison	2007-2008	2008-2009	2009-2010	2010-2011	2011-2012	2012-2013
Effectif	100	98.72	100.20	101.31	102.87	107.95

Définition :

Pour le phénomène étudié, **l'indice (simple) en base 100 à une date** est :

$$I = 100 \times \frac{y}{y_0}$$

où y est l'observation à cette date et y_0 l'observation à la date de référence.

Remarque :

- Un indice simple porte sur un seul élément, par opposition à un indice synthétique, comme l'indice des prix qui est calculé à partir de plusieurs articles.
- La notion d'indice simple permet de comparer, à partir d'une même date de référence, des évolutions portant sur des effectifs différents.

Application : Exercice 7

2- Lien entre taux d'évolution et indice

Définition :

L'indice I à une date différente de la date de référence est :

$$I = 100(1 + t)$$

où t est le taux d'évolution entre la date de référence dont l'indice est 100 et la date considérée.

Exemple : Pour le nombre de licences de basket, entre la saison de référence 2007-2008 et la saison 2010-2011, le taux d'évolution est $t = \frac{101.31-100}{100} = 1.31\%$

Si $t = \frac{101.31-100}{100} = \frac{1.31}{100} \Leftrightarrow 100t = 1.31$ et $I = 100 + 1.31$

alors $I = 100 + 100t = 100(1 + t)$

De l'égalité $I = 100(1 + t)$, on peut déduire que $\frac{I}{100} = 1 + t \Leftrightarrow \frac{I}{100} - 1 = t$

donc $t = \frac{I-100}{100}$

Propriété 1 :

Le taux d'évolution entre la date de référence où l'indice est 100 et une date où l'indice est I est :

$$t = \frac{I}{100} - 1 = \frac{I - 100}{100}$$

Remarques :

- Si $I > 100$ alors il s'agit d'une hausse.

- Si $I < 100$ alors il s'agit d'une baisse.

Propriété 2 :

Le taux d'évolution entre deux valeurs de la grandeur étudiée est égal au taux d'évolution entre les indices associés à ces deux valeurs.

Exemple :

Entre les saisons 2009-2010 et 2012-2013, le taux d'évolution du nombre de licences de basket est

$$t = \frac{491271 - 456036}{456036} \approx 0.0773 \approx 7.73\%$$

Or, les indices I_1 en 2009-2010 et I_2 en 2012-2013 sont $I_1 = 100.20$ et $I_2 = 107.95$

$$\frac{I_2 - I_1}{I_1} = \frac{107.95 - 100.20}{100.20} \approx 0.0773 \approx 7.73\%$$

Donc les deux taux d'évolution sont égaux.

Propriété 3 :

Le coefficient multiplicateur entre deux valeurs de la grandeur étudiée est égal au coefficient multiplicateur entre les indices associés à ces deux valeurs.

Application : Exercices 8 et 9

III Taux d'évolution moyen

1- Racine n-ième d'un nombre réel positif

Dans cette partie, on ne s'intéressera qu'aux solutions positives des équations considérées.

Définition :

La solution positive de l'équation $x^n = a$, où a est un réel positif et n est un entier naturel non nul, est **la racine n-ième de a**, notée $\sqrt[n]{a}$ ou $a^{\frac{1}{n}}$

Exemple : L'équation $x^4 = 3$ admet une solution positive $3^{\frac{1}{4}} \approx 1{,}316$.

2- Taux d'évolution moyen

Propriété :

t étant le taux d'évolution global pendant une certaine période, le **taux moyen d'évolution équivalent** $\boldsymbol{t_m}$ pendant une période n fois plus courte est défini par la relation :

$$\mathbf{1 + t_m = (1 + t)^{\frac{1}{n}}}$$

Exemple : Le chiffre d'affaires d'une start-up est passé en un an de $100\,000$ € à $129\,960$ €, soit un taux annuel d'évolution de $29{,}96\,\%$.

Le but est de chercher le taux semestriel d'évolution t_1 qui donne le même taux annuel d'évolution.

- Constatons d'abord qu'un taux semestriel de la moitié de $29{,}96\,\%$, c'est-à-dire $14{,}98\,\%$ ne convient pas : en effet, à la fin du premier semestre le chiffre d'affaires serait de $100(1+0{,}1498)=114\,980$ € et à la fin du second semestre, c'est-à-dire à la fin de l'année, il serait de $114\,980(1+0{,}1498)\approx 132\,204$ €

Le but est de chercher le taux mensuel d'évolution t_2 qui donne le même taux d'évolution.

- Par un raisonnement analogue, avec ici des évolutions successives sur 12 mois, nous cherchons t_2 tel que $100000(1+t_2)^{12}=129960$, c'est-à-dire :

$$(1+t_2)^{12}=1{,}2996 \Leftrightarrow (1+t_2)=1{,}2996^{\frac{1}{12}} \Leftrightarrow (1+t_2)\approx 1{,}002208 \Leftrightarrow t_2\approx 0{,}02208$$

Le taux mensuel $2{,}208\,\%$ est équivalent au taux annuel $29{,}96\,\%$

Application : Exercices 10 et 11

Résumé

Proportion d'une sous-population

- La **proportion** (ou fréquence) p d'une sous-population A dans une population E est le rapport des effectifs : $\boldsymbol{p=\frac{n_A}{n_E}}$.
- Une proportion peut être exprimée sous forme de fraction, sous forme décimale ou sous forme de pourcentage.

Taux d'évolution entre y_1 et y_2

- Le **taux d'évolution** ou variation relative, d'une quantité passant de la valeur y_1 à la valeur y_2 où y_1 et y_2 sont strictement positifs est : $\boldsymbol{t=\frac{y_2-y_1}{y_1}}$.
- t s'écrit sous forme de fraction, sous forme décimale ou sous forme de pourcentage.

Coefficients multiplicateurs

- Si t est le taux d'évolution de y_1 à y_2, alors $y_2=(1+t)y_1$.
- **$c=1+t$ est le coefficient multiplicateur de y_1 à y_2.**
- Dans le cas d'une **hausse** de $a\,\%$, $t=\frac{a}{100}$ est positif, et le coefficient multiplicateur $c=1+t$ est supérieur à 1.
- Dans le cas d'une **baisse** de $a\,\%$, $t=-\frac{a}{100}$ est négatif, et le coefficient multiplicateur $c=1+t$ est inférieur à 1.

Évolutions successives

- Deux **évolutions** (hausses ou baisses) **successives**, de coefficients multiplicateurs c et c', correspondent à une évolution globale (hausse ou baisse) de coefficient multiplicateur $c \cdot c'$. **(Pour deux évolutions successives, on multiplie les coefficients multiplicateurs.)**
- Le résultat précédent se généralise au cas de plus de deux évolutions successives.

Évolutions réciproques

- Deux évolutions (hausse et baisse, ou baisse et hausse) sont **réciproques** si et seulement si leurs coefficients multiplicateurs c et c' sont tels que $c \cdot c' = 1$.

Indice simple en base 100

- Pour un phénomène étudié, **l'indice simple en base 100** à une date est : $I = 100\dfrac{y}{y_0}$, où y est l'observation à cette date et y_0 l'observation à la date de référence.
- L'indice I à une date différente de la date de référence est $I = 100\,(1 + t)$, où t est le taux d'évolution entre la date de référence où l'indice est 100 et la date considérée.
- Le taux d'évolution entre deux valeurs de la grandeur étudiée est égal au taux d'évolution entre les indices associés à ces deux valeurs. (Même résultat avec les coefficients multiplicateurs.)

Racine *n*-ième d'un nombre réel positif

- **La solution positive de l'équation $x^n = a$**, où n est un nombre entier naturel non nul et a un nombre réel positif, est la **racine *n*-ième de *a*** notée $\sqrt[n]{a}$ ou $a^{\frac{1}{n}}$.

Taux d'évolution moyen

- t étant le taux d'évolution global pendant une certaine période, **le taux moyen d'évolution équivalent t_m** pendant une période n fois plus courte est défini par la relation :

$$1 + t_m = (1 + t)^{\frac{1}{n}}.$$

- **Le coefficient multiplicateur moyen $1 + t_m$ pendant une période *n* fois plus courte est la racine *n*-ième du coefficient multiplicateur global $1 + t$.**

Fonctions affines

I Définitions

Activité découverte :

Voici les tarifs d'entrée pour un stade de football :

Tarif 1 : 8 € l'entrée

Tarif 2 : 4 € l'entrée avec la carte demi-tarif qui coûte 40 €

Tarif 3 : L'abonnement pour la saison qui coûte 92 €

1/ Calculer pour chaque tarif, à l'aide du tableau suivant, la dépense pour 6 entrées, 11 entrées puis 15 entrées. Dans chaque cas, quel est le tarif le plus intéressant ?

x entrées	$x = 6$	$x = 11$	$x = 15$
Tarif 1			
Tarif 2			
Tarif 3			

2/ Soit x le nombre d'entrées. Exprimer en fonction de x la dépense pour la saison pour chaque tarif.

Définition :

Une **fonction affine** f est une fonction définie pour tout réel x par :

$f(x) = ax + b$

Le nombre a est le **coefficient directeur** (ou pente).

Le nombre b est **l'ordonnée à l'origine**.

Propriétés :

Si $a = 0$ alors la fonction est **constante** et s'écrit sous la forme $f(x) = b$

Si $b = 0$ alors la fonction est **linéaire** et s'écrit sous la forme $f(x) = ax$

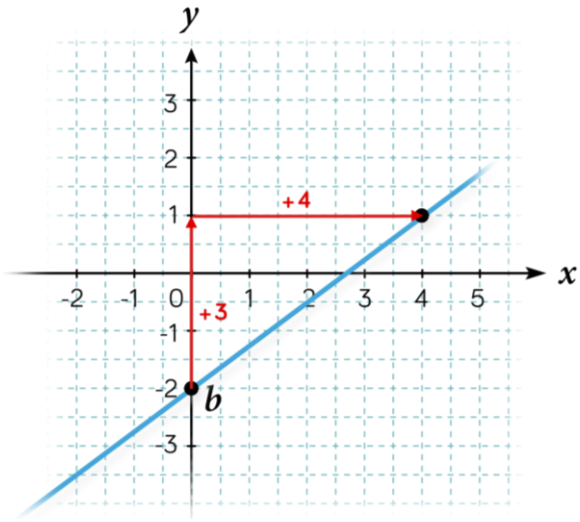
Propriété :

La représentation graphique d'une fonction affine est une droite.

II Déterminer l'équation réduite d'une fonction affine

Méthode : Déterminer graphiquement l'équation de la droite représentative d'une fonction affine

Exemple : Soit f une fonction affine dont la représentation graphique est donnée ci-contre.



- Pour déterminer b, il suffit de regarder le point d'intersection entre la droite et l'axe des ordonnées.
  Ici, $b = -2$
- Pour déterminer a, il faut observer le nombre de carreaux dont on se déplace horizontalement et verticalement pour partir de b et arriver à un point avec des coordonnées « entières ».
  $a = \dfrac{déplacement\ vertical}{déplacement\ horizontal} = \dfrac{3}{4}$

Méthode : Déterminer par le calcul l'équation de la droite représentative d'une fonction affine

Définition :

Soient $A(x_A\,;\,y_A)$ et $B(x_B\,;\,y_B)$ deux points distincts de la droite représentative d'une fonction affine f telle que $f(x) = ax + b$.

Le coefficient directeur a est égal à : $a = \frac{f(x_B)-f(x_A)}{x_B-x_A} = \frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$

Exemple : Soient $A(1\,;2)$ et $B(6\,;8)$ deux points d'une fonction affine f et d sa droite représentative. On veut déterminer par le calcul l'expression de la fonction f.

- On commence par la valeur du coefficient directeur de la fonction f :

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

$$a = \frac{8-2}{6-1}$$

$$a = \frac{6}{5}$$

Donc : $f(x) = \frac{6}{5}x + b$

- On peut ensuite déterminer b en remplaçant x et $f(x)$ dans l'expression de la fonction par les coordonnées d'un point appartenant à la droite d.

$$f(x_A) = \frac{6}{5}x_A + b$$
$$2 = \frac{6}{5} \times 1 + b$$
$$2 = \frac{6}{5} + b$$
$$2 - \frac{6}{5} = b$$
$$\frac{4}{5} = b$$

Donc : $f(x) = \frac{6}{5}x + \frac{4}{5}$

FONCTION DU SECOND DEGRE

Activité découverte

I Fonction polynôme du second degré

Définition :

Une fonction polynôme du second degré peut s'écrire sous la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$

avec a, b, et c des nombres réels et a $\neq 0$. Cette forme est appelée forme développée.

Exemple :

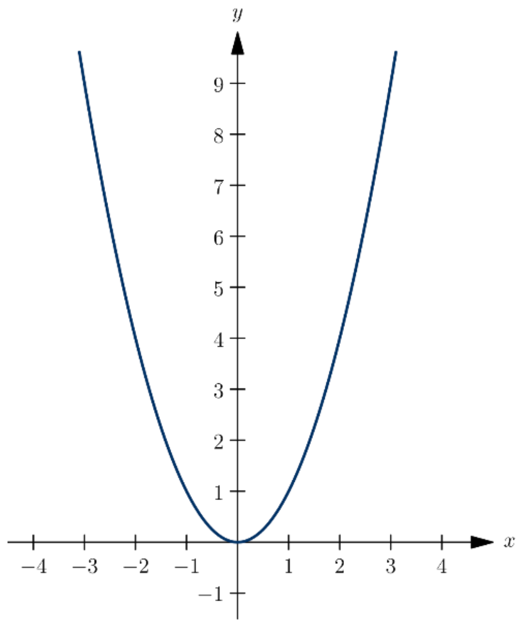
- La fonction f définie par $f(x) = 3x^2 - 2x + 7$ est une fonction du second degré avec $a = 3\,;\, b = -2\,;\, c = 7$
- La fonction g définie par $g(x) = x^2$ est une fonction du second degré avec $a = 1\,;\, b = 0\,;\, c = 0$

II Représentation graphique

On appelle **parabole** la courbe représentative d'une fonction du second degré.

La parabole a pour équation $y = ax^2 + bx + c$

Exemple : Soit la fonction f définie par $f(x) = x^2$



On détermine d'abord un tableau de valeurs de la fonction f,

pour ensuite reporter ces valeurs dans un repère orthonormé.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	9	4	1	0	1	4	9

Remarques :

1- L'allure de la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ dépend du signe de a.
Si a $> \mathbf{0}$, alors les branches de la parabole sont tournées vers le haut.
Si a $< \mathbf{0}$, alors les branches de la parabole sont tournées vers le bas.

2- Le **sommet S** de la parabole est le point de la parabole d'abscisse $x = -\frac{b}{2a}$

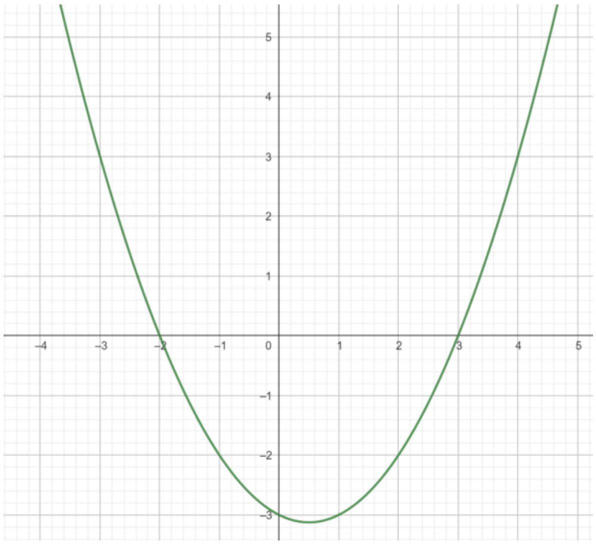
Application : Exercice 1

Propriété :

Soient a, x_1, x_2 des réels. La fonction f définie par $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ est une fonction polynôme du second degré. Cette écriture est la <u>forme factorisée</u>.

x_1 et x_2 sont appelées **racines** ou **solutions**. La parabole représentative de la fonction f coupe ainsi l'axe des abscisses aux valeurs x_1 et x_2

<u>Exemple</u> : Soit la fonction f définie par $f(x) = 0{,}5(x - 3)(x + 2)$



Propriété :

Une fonction polynôme du second degré peut aussi s'écrire sous la forme $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$.

Cette écriture est la <u>forme canonique</u>.

Les nombres α et β sont les coordonnées du sommet de la parabole, avec $\alpha = \frac{-b}{2a}$

<u>Application</u> : Exercice 2

III Sens de variation

On peut donner les variations d'une fonction du second degré par son <u>tableau de variation</u>.

- <u>Lorsque a est positif</u>

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	↘		↗

La valeur en laquelle le minimum est atteint est $x_{min} = -\frac{b}{2a}$. Le minimum vaut l'image de x_{min} soit $f(x_{min})$.

<u>Exemple</u> : Soit la fonction f définie sur l'intervalle [-1 ; 4] par $f(x) = x^2 - 3x + 1$

x	-1	$1{,}5$	4
$f(x)$	5 ↘	$-1{,}25$	↗ 5

Pour compléter entièrement le tableau de variation, il faut calculer $-\frac{b}{2a} = 1{,}5$; $f(-1) = 5$; $f(1{,}5) = -1{,}25$ et $f(4) = 5.$

On dit alors que f admet un minimum égal à $-1{,}25$ pour $x = 1{,}5.$

- <u>Lorsque a est négatif</u>

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	↗		↘

<u>Exemple</u> : Soit la fonction g définie sur l'intervalle [-2 ; 6] par $g(x) = -0{,}5x^2 + 2x + 3$

x	-2	2	6
$g(x)$	-3 ↗	5	↘ -3

Pour compléter entièrement le tableau de variation, il faut calculer $-\frac{b}{2a} = 2$; $g(-2) = -3$; $g(2) = 5$ et $g(6) = -3.$

On dit alors que g admet un maximum égal à 5 pour $x = 2.$

<u>Application</u> : Exercice 3

<u>IV Résolution d'une équation du second degré</u>

<u>Méthode :</u>

1/ Pour trouver les solutions à une équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ il faut calculer le <u>discriminant</u>.

Ce nombre se nomme Delta, il est noté Δ et on le calcule en utilisant la formule $\Delta = \boldsymbol{b^2 - 4ac}$

2/ Le nombre de solutions de l'équation dépend de Δ :

- <u>**Si $\Delta > 0$**</u> alors l'équation admet <u>deux solutions</u> :

  $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
- <u>**Si $\Delta = 0$**</u> alors l'équation admet <u>une unique solution</u> :

  $x_0 = -\frac{b}{2a}$
- <u>**Si $\Delta < 0$**</u> alors l'équation n'admet <u>aucune solution</u>

Exemple :

Soit la fonction f définie par $f(x) = 2x^2 - 3x - 2$

1/ On calcule d'abord le discriminant :

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 \times (-2)$

$\Delta = 9 + 16$

$\Delta = 25$

2/ On regarde le signe du discriminant.

$\Delta > 0$ puisque $\Delta = 25$

L'équation a donc deux solutions :

$x_1 = \frac{-(-3)-\sqrt{25}}{(2*2)} = \frac{3-5}{4} = -\frac{1}{2}$

$x_2 = \frac{-(-3)+\sqrt{25}}{(2*2)} = \frac{3+5}{4} = 2$

Les solutions de l'équation sont donc $-\frac{1}{2}$ et 2

Remarque : Graphiquement, les solutions d'une équation du second degré sont les abscisses des points d'intersection entre la courbe représentative de la fonction et l'axe des abscisses.

Application : Exercice 4

V Signe d'une fonction du second degré

Soit f une fonction du second degré définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec a, b, et c des nombres réels et a$\neq 0$.

On calcule son discriminant :

- Si $\Delta < 0$, alors $f(x)$ a le même signe que a.
- Si $\Delta = 0$, alors $f(x)$ a le même signe que a et s'annule en $-\frac{b}{2a}$
- Si $\Delta > 0$, alors $f(x)$ s'annule en deux réels distincts x_1 et x_2 et on obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		signe de a	0	signe de ($-a$)	0	signe de a	

Remarque : On dit que le signe de a est à l'extérieur des racines (solutions)

Exemple :

Soit $f(x) = -2x^2 + 4x + 6$

- On calcule son discriminant :
  $\Delta = b^2 - 4ac$
  $\Delta = 4^2 - 4 \times (-2) \times 6$
  $\Delta = 64$

- On peut alors calculer les solutions (racines) de la fonction :
  $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4+\sqrt{64}}{2\times(-2)} = -1$
  $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4-\sqrt{64}}{2\times(-2)} = 3$

- Enfin, on peut dresser le tableau de signes :

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Application : Exercice 5

Fonction logarithme népérien

I Définition et propriétés

1- Définition

Définition :

La fonction **logarithme népérien**, noté **ln**, est la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ qui a pour fonction dérivée la fonction qui a x associe $\frac{1}{x}$ et qui prend la valeur 0 pour $x = 1$.

Exemples :

Pour trouver la valeur approchée de $\ln x$, il suffit d'utiliser une calculatrice avec la touche $\boxed{ln}$. Ainsi :

$\ln 2 \approx 0{,}693$ / $\ln 3 \approx 1{,}099$ / $\ln 4 \approx 1{,}386$ …

Remarque : Avec un tableur, pour obtenir la valeur numérique de $\ln 3$ il suffit d'entrer $= LN(3)$

2- Propriétés

Propriétés :

Pour tous nombres réels strictement positifs a et b :

- $\ln(ab) = \ln a + \ln b$
- $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$
- $\ln a^n = n \ln a$
- $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln a$

Application : Exercice 1

II Sens de variation et signe

Le tableau de variation de la fonction ln est :

x	0		1		$+\infty$
$\ln x$	||	$-\infty$ $\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Concernant le signe de la fonction ln :

- Pour tout $x \in]1; +\infty[$, $\ln x > 0$.
- Pour tout $x \in]0; 1[$, $\ln x < 0$.

Plus généralement on en déduit le sens de variation de la fonction ln les équivalences suivantes :

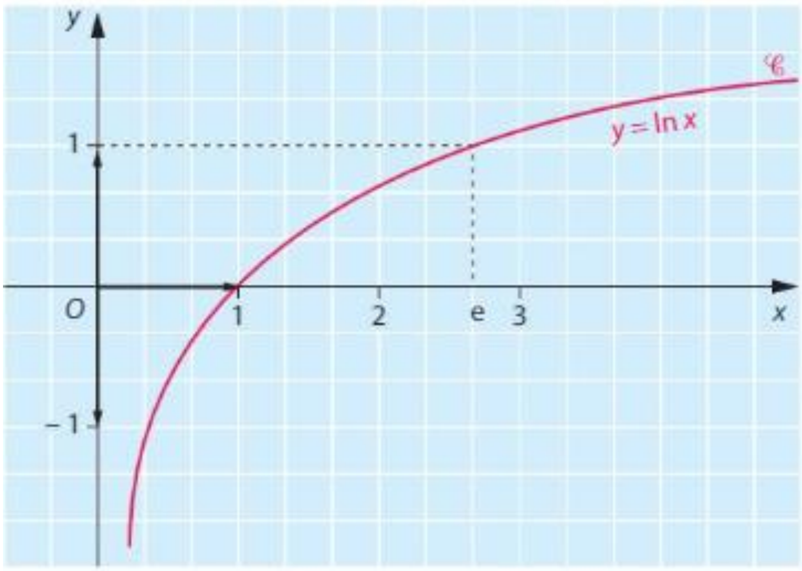
Pour tous nombres réels strictement positifs a et b :

- $\ln a = \ln b$ si et seulement si $a = b$

- $\ln a \leq \ln b$ si et seulement si $a \leq b$

III Courbe représentative

Pour tracer la courbe représentative de la fonction ln dans le plan muni d'un repère orthonormé, on détermine les coordonnées d'autant de points que l'on veut à l'aide de la calculatrice.



On observe graphiquement sur la figure qu'il existe un point unique de la courbe ayant pour ordonnée 1 et pour abscisse e. Ce nombre e équivaut environ à $2{,}718$…

Définition : e est le nombre réel défini par $\boldsymbol{ln\ e = 1}$

Remarque :

En appliquant le résultat $\ln a^n = n \ln a$ dans le cas où $a = e$, on a $\ln e^n = n \Leftrightarrow \ln e = n$ car $\ln e = 1$

Par conséquent, $\ln e^2 = 2$, $\ln e^3 = 3$…

Application : Exercice 2

IV Fonction logarithme décimal

Définition :

La fonction **logarithme décimal** est la fonction, notée **log**, définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$

Fonction exponentielle

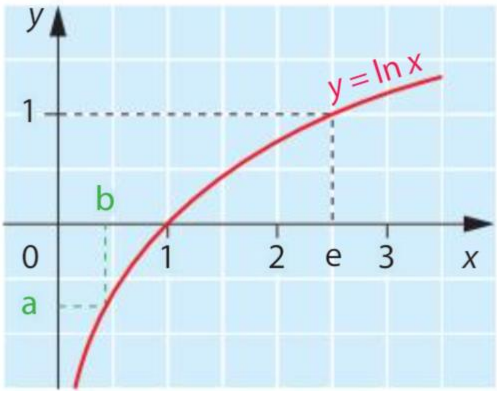
I Définition et propriétés

La démarche qui nous a permis d'introduire le nombre e dans le chapitre « logarithme népérien » peut être généralisée.

Si sur l'axe des ordonnées on prend un réel a quelconque, alors il existe un nombre réel b tel que $\ln b = a$.

Ainsi pour :

- $a = 1 \rightarrow b = e$.
- $a = 2 \rightarrow b = e^2$.
- $a = 3 \rightarrow b = e^3$.



Définition :

Le nombre b tel que $\ln b = a$ est appelé **exponentielle** de a et est noté e^a.

Définition :

La fonction exponentielle, notée exp, est la fonction qui à tout nombre réel x associe le nombre strictement positif unique y tel que $x = \ln y$

Propriété :

Pour tout nombre réel x et tout nombre réel strictement positif y :

$\boldsymbol{y = e^x}$ **si et seulement si** $\boldsymbol{x = \ln y}$

Remarques :

- Pour tout nombre réel x, $e^x > 0$
- Pour tout nombre réel $x, \ln(e^x) = x$
- Pour tout nombre réel de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, $e^{\ln x} = x$

Propriétés de calcul :

a) $e^0 = 1$ et $e^1 = e$

b) $e^{x+y} = e^x \times e^y$

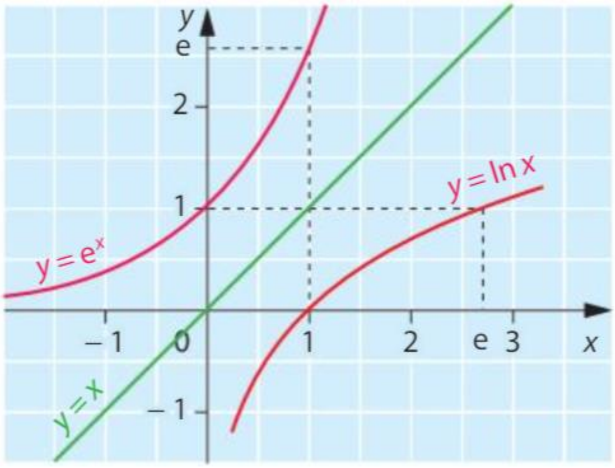
c) $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$

d) $(e^x)^n = e^{nx}$, avec n un entier relatif.

Application : Exercice 1

II Représentation graphique

Au niveau graphique, on admet que l'équivalence entre $y = e^x$ et $x = \ln y$ se traduit par la symétrie axiale par rapport à la droite d'équation $y = x$ entre la courbe d'équation $y = e^x$ et la courbe d'équation $y = \ln x$.



Remarque : La fonction exponentielle est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.

Statistiques

I Rappels

1 - Série statistique à une variable

Définition :

Une **série statistique à une variable** (x_i) est constituée d'une liste de valeurs x_1 ; x_2 ; … ; x_p avec les effectifs correspondants n_1 ; n_2 ; … ; n_p

Exemple : Les 31 élèves d'une classe de terminale ont obtenu les notes suivantes à une évaluation de mathématiques.

Valeurs x_i →

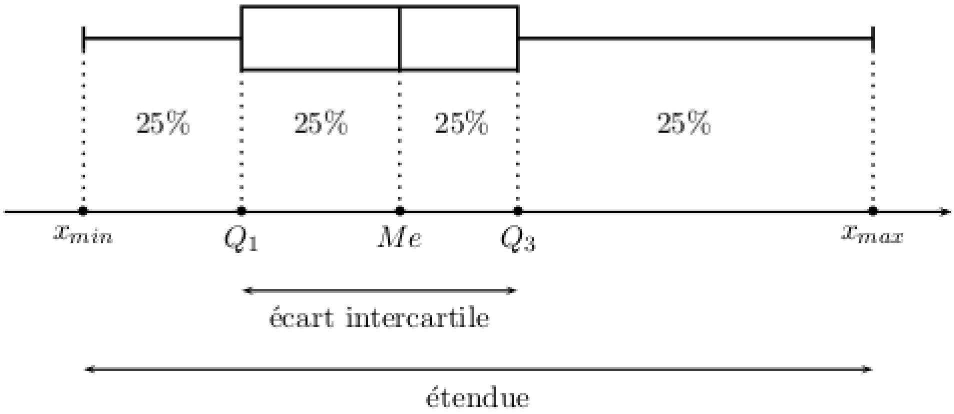
Notes	7	8	9	10	11	12	13	14
Total	1	5	4	12	5	3	0	1

← Effectifs n_i

Définition :

Les valeurs de la série étant rangées dans l'ordre croissant, les **quartiles** $\boldsymbol{Q_1}$ et $\boldsymbol{Q_3}$ et la **médiane** $\boldsymbol{Me}$ partagent la série ordonnée en quatre groupes de même effectif.

Schéma : On peut représenter cette répartition par un diagramme en boîte.



Paramètres d'une série statistique :

- **La moyenne** : $\overline{x} = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{N}$
- **La médiane** Me partage la série ordonnée en deux groupes de même effectif.
  Si l'effectif est impair, la médiane est la valeur située au milieu de la série.
  Si l'effectif est pair, la médiane est la moitié de la somme des deux valeurs au milieu.
- **L'étendue** : c'est la différence des valeurs extrêmes : $e = x_{max} - x_{min}$
- **L'écart-type** mesure la dispersion par rapport à la moyenne. On le note σ.
- **Les quartiles** $\boldsymbol{Q_1}$ **et** $\boldsymbol{Q_3}$
- **L'écart interquartile** $[\boldsymbol{Q_1}\ ;\ \boldsymbol{Q_3}]$

Application : Exercice 1

2- Fonction affine et équation réduite de droite

Définition :

Une **fonction affine** f est une fonction définie pour tout réel x par :

$$f(x) = ax + b$$

Le nombre a est le **coefficient directeur** (ou pente).

Le nombre b est **l'ordonnée à l'origine**.

Propriétés :

Si $a = 0$ alors la fonction est **constante** et s'écrit sous la forme $f(x) = b$

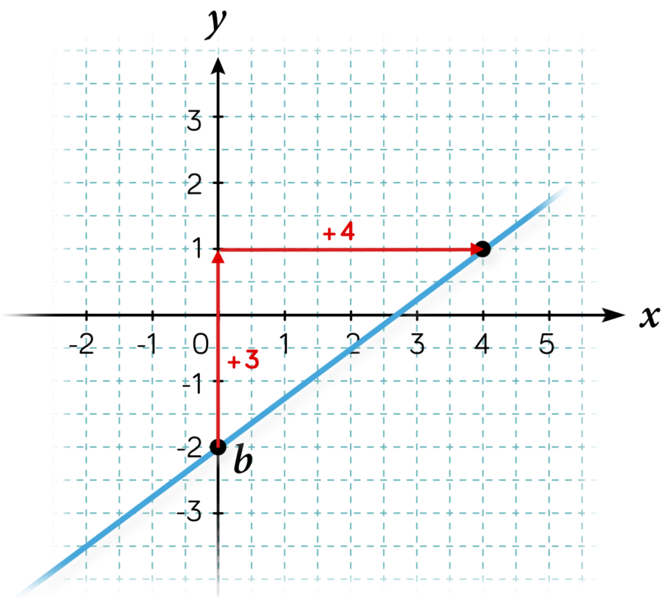
Si $b = 0$ alors la fonction est **linéaire** et s'écrit sous la forme $f(x) = ax$

Propriété :

La représentation graphique d'une fonction affine est une droite.

Méthode : Déterminer graphiquement l'équation de la droite représentative d'une fonction affine

Exemple : Soit f une fonction affine dont la représentation graphique est donnée ci-contre.



- Pour déterminer b, il suffit de regarder le point d'intersection entre la droite et l'axe des ordonnées. Ici, $b = -2$
- Pour déterminer a, il faut observer le nombre de carreaux dont on se déplace horizontalement et verticalement pour partir de b et arriver à un point avec des coordonnées « entières ».

$$a = \frac{déplacement\ vertical}{déplacement\ horizontal} = \frac{3}{4}$$

Définition :

Soient $A(x_A\ ;\ y_A)$ et $B(x_B\ ;\ y_B)$ deux points distincts de la droite représentative d'une fonction affine f telle que $f(x) = ax + b$.

Le coefficient directeur a est égal à : $a = \frac{f(x_B)-f(x_A)}{x_B-x_A} = \frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$

Méthode : Déterminer par le calcul l'équation de la droite représentative d'une fonction affine

Soient $A(1\,;2)$ et $B(6\,;8)$ deux points d'une fonction affine f et d sa droite représentative.

On veut déterminer par le calcul l'expression de la fonction f.

- On commence par la valeur du coefficient directeur de la fonction f :

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$
$$a = \frac{8-2}{6-1}$$
$$a = \frac{6}{5}$$

Donc : $f(x) = \frac{6}{5}x + b$

- On peut ensuite déterminer b en remplaçant x et $f(x)$ dans l'expression de la fonction par les coordonnées d'un point appartenant à la droite d.

$$f(x_A) = \frac{6}{5}x_A + b$$
$$2 = \frac{6}{5} \times 1 + b$$
$$2 = \frac{6}{5} + b$$
$$2 - \frac{6}{5} = b$$
$$\frac{4}{5} = b$$

Donc : $f(x) = \frac{6}{5}x + \frac{4}{5}$

Application : Exercice 2

II Série statistique à deux variables

1 - Définitions

Définition :

Une **série statistique à deux variables** $(x_i\,;\,y_i)$ est constituée d'une liste de n couples de valeurs $(x_1\,;\,y_1)\,;\,(x_2\,;\,y_2)\,;\ldots;(x_n\,;\,y_n)$.

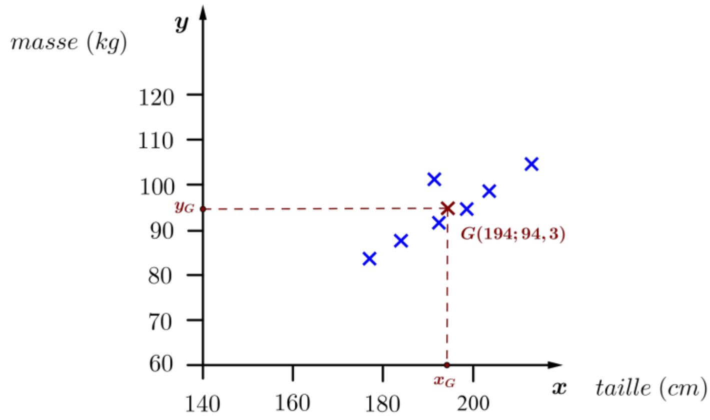
Le **nuage de points** de cette série est l'ensemble des points du plan de coordonnées $(x_1\,;\,y_1)\,;\,(x_2\,;\,y_2)\,;\ldots;(x_n\,;\,y_n)$.

Remarque : Le nuage de points permet de visualiser un lien possible entre deux variables ou de repérer des incohérences dans une série statistique à deux variables.

Exemple : Le tableau suivant regroupe la taille et la masse de sept joueurs

Taille (cm)	183	192	177	213	191	199	203
Masse (kg)	88	91	83	105	101	95	97

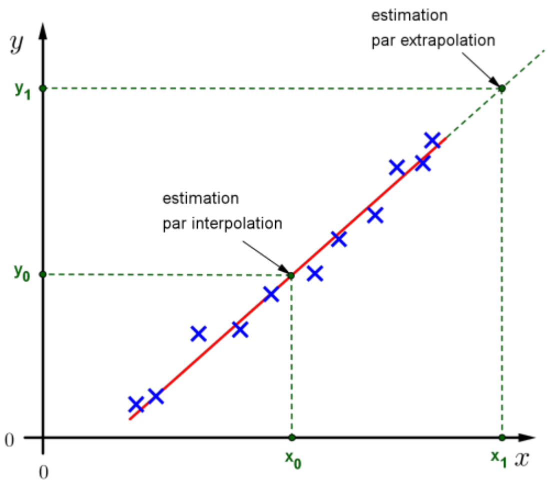
La représentation graphique est la suivante :



Les **coordonnées du point moyen *G*** sont $(\bar{x}\ ;\ \bar{y})$, moyenne des x_i, et moyenne des y_i.

Le nuage de points permet de constater qu'un des joueurs semble être en surcharge pondérale par rapport aux autres.

<u>Application</u> : Exercice 3

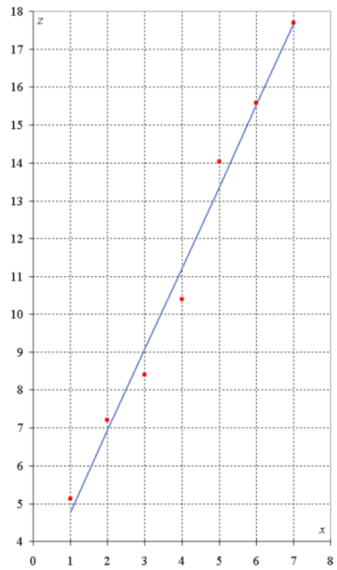


<u>Remarque</u> : Pour estimer une valeur inconnue dans une série statistique, on peut utiliser deux procédés :

- La méthode par interpolation quand le calcul est réalisé dans l'intervalle des valeurs prises par la série statistique.
- La méthode par extrapolation quand le calcul est réalisé en dehors des valeurs prises par la série statistique.

2- Droite d'ajustement

a- Méthode « au jugé »

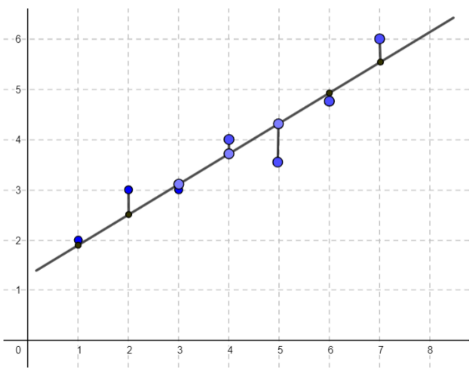


La méthode « au jugé » consiste à tracer une droite passant au plus près des différents points du nuage.

Après avoir tracé cette droite, on peut en déterminer son équation graphiquement ou par le calcul en déterminant les coordonnées de deux points appartenant à la droite (Méthodes précédentes).

<u>Application</u> : Exercice 4

b- Méthode des moindres carrés



L'équation de la droite d'ajustement peut être aussi déterminée à l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur, par la <u>**méthode des moindres carrés**</u>.

<u>Vidéo explicative et tutos Casio/TI</u>

<u>Tuto Numworks</u>

c- Méthode des points moyens (ou droite de Mayer)

Cette méthode consiste à déterminer deux points moyens du nuage de points et de déterminer par le calcul l'équation de la droite passant par ces deux points moyens.

Exemple : On considère la série statistique suivante

Superficie X	2	2	3	4	5	6	7	7,6
Nombre d'exploitations Y	14	26	31	29	44	40	54	50

Les valeurs du caractère X sont 8 au total. On va donc partager la série en deux séries de 4 valeurs :

Série 1

X	2	2	3	4
Y	14	26	31	29

Point moyen $G_1\ (\overline{X_1}\ ;\ \overline{Y_1})$:

$$\overline{X_1} = \frac{2+2+3+4}{4} = 2{,}75$$

$$\overline{Y_1} = \frac{14+26+31+29}{4} = 25$$

Série 2

X	5	6	7	7,6
Y	44	40	54	50

Point moyen $G_2\ (\overline{X_2}\ ;\ \overline{Y_2})$:

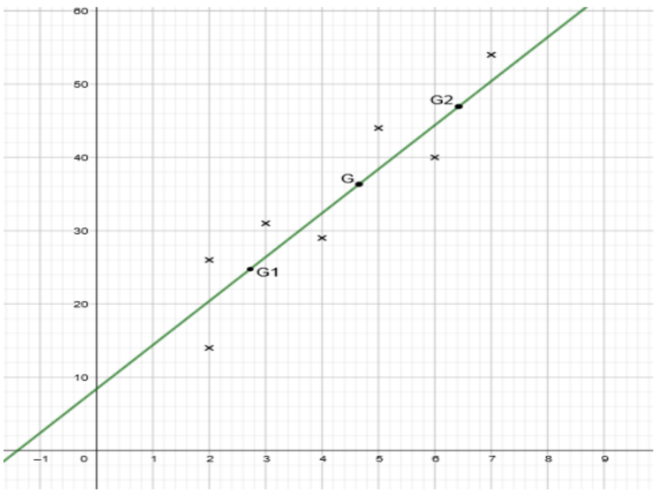
$$\overline{X_2} = \frac{5+6+7+7{,}6}{4} = 6{,}4$$

$$\overline{Y_2} = \frac{44+40+54+50}{4} = 47$$

On peut ensuite déterminer l'équation de la droite (G_1G_2) grâce à la méthode vue précédemment pour déterminer l'équation réduite d'une droite à l'aide des coordonnées des deux points G_1 et G_2 :

$$a = \frac{47-25}{6{,}4-2{,}75} \approx 6 \qquad b = 25 - 6 \times 2{,}75 = 8{,}4$$

Donc : l'équation de la droite d'ajustement (G_1G_2) est $y = 6x + 8{,}4$



Application : Exercice 5

3- Ajustement par changement de variable

Il arrive que le nuage de points ne soit pas modélisable par une droite. Il faut alors changer de variable pour réaliser un ajustement linéaire.

Exemple : Un centre d'appel comptait 66 employés en 2001. Le tableau ci-dessous donne l'évolution du nombre d'employés en fonction du range de l'année.

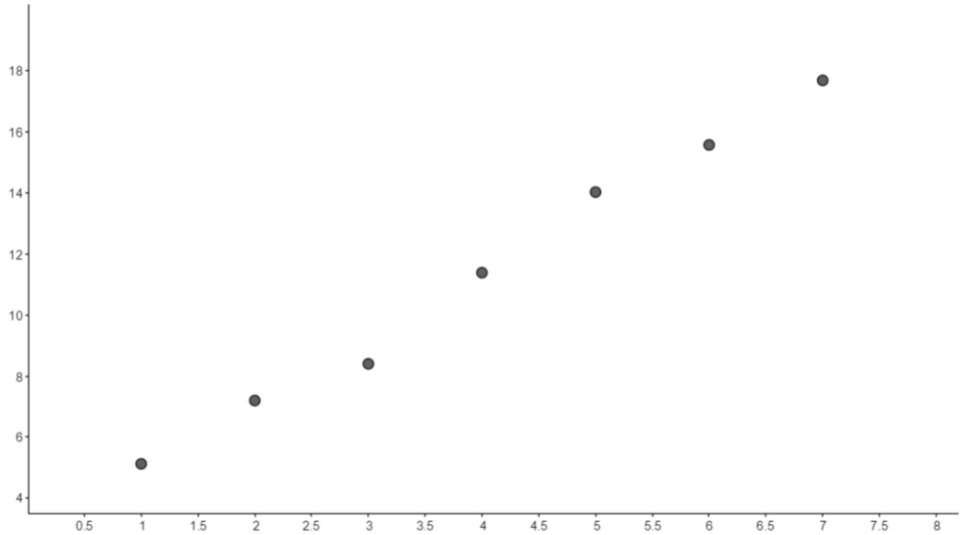
Année	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
Rang de l'année x_i	1	2	3	4	5	6	7
Nombre d'employés y_i	66	104	130	207	290	345	428

On cherche à étudier l'évolution du nombre y d'employés en fonction du rang x de l'année. Une étude graphique montre qu'un ajustement affine ne convient pas.

On pose alors $z = \sqrt{y} - 3$

Année	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
Rang de l'année x_i	1	2	3	4	5	6	7
Nombre d'employés y_i	66	104	130	207	290	345	428
z_i	5,12	7,2	8,4	11,39	14,03	15,57	17,69

On obtient le graphique suivant après le changement de variable. Les points semblent presque alignés, ce qui rend réalisable un ajustement affine (linéaire) par l'une des méthodes vues précédemment.



<u>Application</u> : Exercice 6

Calcul des propositions et des prédicats

L'objectif est d'introduire quelques éléments logiques en lien avec l'informatique.

Le langage formel informatique est, entre autres, constitué d'un alphabet qui lui est propre, tout comme les règles de formations des formules et des preuves constituées à partir de cet alphabet.

On est alors conduit à introduire des propositions et des prédicats.

I Calcul propositionnel

1- Proposition

Définition :

Une **proposition** a un sens dans la théorie où l'on se place.

A toute proposition, on peut associer une valeur de vérité, soit vrai (noté V ou 1), soit faux (noté F ou 0).

Exemple : Considérons les trois énoncés suivants A, B, C concernant des nombres entiers.

- A : $2^{10} = 1024$
- B : $5 < 4$
- C : 3 est un nombre impair.

Le contenu de A est vrai, celui de B est faux, et celui de C est vrai. A, B, et C sont trois exemples de propositions arithmétiques.

Remarque : En mathématiques, sauf exception, on n'écrit que des propositions vraies ; lorsqu'on est amené à considérer une proposition fausse, on le précise.

2- Négation

Définition :

A toute proposition P, on peut associer une nouvelle proposition, notée $\neg P$ ou $\bar{P}$, dont la valeur de vérité est donnée par la table ci-contre.

P	$\neg P$
1	0
0	1

$\neg P$ est la **négation** de P et se lit « non P »

$\neg$ est le **connecteur négation**.

Exemple : Reprenons les mêmes propositions A, B et C.

A partir de la proposition A : $2^{10} = 1024$ dont la valeur de vérité est V (ou 1), on peut définir la nouvelle proposition $2^{10} \neq 1024$ dont la valeur de vérité est F (ou 0).

De même, à partir de la proposition B : $5 < 4$ dont la valeur de vérité est F (ou 0), on peut définir la nouvelle proposition $5 \geq 4$ dont la valeur de vérité est V (ou 1).

Enfin, à partir de la proposition C : 3 est un nombre impair dont la valeur de vérité est V (ou 1), on peut définir la nouvelle proposition « 3 est un nombre pair » dont la valeur de vérité est F (ou 0).

Remarques :

- La négation est un **connecteur unaire** car elle agit sur une seule proposition.
- On peut définir des **connecteurs binaires** qui associent à deux propositions une nouvelle proposition.

3- Conjonction

Définition :

A tout couple de propositions (P, Q), la **conjonction** associe la proposition, notée $P \wedge \mathrm{Q}$, dont la valeur de vérité est donnée par la table ci-contre.

$P \wedge \mathrm{Q}$ se lit « P et Q »

P	Q	$P \wedge \mathrm{Q}$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Exemple : Reprenons les mêmes exemples A, B et C.

$A \wedge \mathrm{B} : 2^{10} = 1024$ et $5 < 4$ est une proposition fausse car B est faux.

$A \wedge \mathrm{C} : 2^{10} = 1024$ et 3 est un nombre impair est une proposition vraie car A est vrai et C est vrai.

Remarque : En français le mot « et » exprime parfois une succession d'évènements dans le temps. Il peut être remplacé par « puis ».

Cette extension du sens du mot n'est pas valable en logique mathématique et en informatique.

4- Disjonction

Définition :

A tout couple de propositions (P, Q), la **disjonction** associe la proposition, notée $P \vee \mathrm{Q}$, dont la valeur de vérité est donnée par la table ci-contre.

$P \vee \mathrm{Q}$ se lit « P ou Q »

P	Q	$P \vee \mathrm{Q}$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Exemple : Reprenons les mêmes exemples A, B et C.

$A \vee \mathrm{B} : 2^{10} = 1024$ ou $5 < 4$ est une proposition vraie car A est vrai.

$A \vee \mathrm{C} : 2^{10} = 1024$ ou 3 est un nombre impair est une proposition vraie.

Remarque : Le « ou » est inclusif, c'est-à-dire l'un ou l'autre est possible pour que ce soit vrai.

5- Implication

Définition :

A tout couple de propositions (P, Q), la **disjonction** associe la proposition, notée $P \Rightarrow Q$, dont la valeur de vérité est donnée par la table ci-contre.

$P \Rightarrow Q$ se lit « P implique Q »

P	Q	$P \Rightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Exemple : Reprenons les mêmes exemples A, B et C.

$A \Rightarrow B : 2^{10} = 1024 \Rightarrow 5 < 4$ est une proposition fausse car A est vrai et B est faux.

$A \Rightarrow C : 2^{10} = 1024 \Rightarrow$ 3 est un nombre impair est une proposition vraie car A est vrai et C est vrai.

Remarque : Généralement en mathématiques, on utilise l'implication pour des raisonnements du type « Si P est vrai, alors Q … », où P est l'hypothèse et Q est la conclusion. On peut également faire des raisonnements par l'absurde « Si P est faux, alors Q… »

6- Equivalence

Définition :

A tout couple de propositions (P, Q), **l'équivalence** associe la proposition, notée $P \Leftrightarrow Q$, dont la valeur de vérité est donnée par la table ci-contre.

$P \Leftrightarrow Q$ se lit « P équivaut à Q »

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Exemple : Reprenons les mêmes exemples A, B et C.

$A \Leftrightarrow B : 2^{10} = 1024 \Leftrightarrow 5 < 4$ est une proposition fausse car A est vrai mais B est faux.

$A \Leftrightarrow C : 2^{10} = 1024 \Leftrightarrow$ 3 est un nombre impair est une proposition vraie car A et C sont vrais.

7- Premières propriétés des connecteurs

a- Commutativité de $\vee$ et $\wedge$

Propriétés :

Pour toutes propositions (P, Q),

$$P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$$

$$P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$$

Démonstration : Si l'on permute l'ordre des propositions dans $P \wedge Q$, alors on permute la 2ème et la 3ème ligne de la table de vérité de la conjonction, ce qui ne change rien sur la colonne de droite.

Les propositions $P \wedge Q$ et $Q \wedge P$ ont donc la même valeur de vérité et sont donc équivalentes.

La démonstration est analogue pour la disjonction.

b- Double distributivité

Propriétés :

Pour toutes propositions (P, Q, R),

$$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$$

$$P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$

Application : Exercice 3

Démonstration : Construisons la table de vérité des propositions situées de part et d'autre de l'équivalence.

P	Q	R	$Q \wedge R$	$P \vee (Q \wedge R)$	$P \vee Q$	$P \vee R$	$(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Les deux propositions ont donc la même valeur de vérité et sont donc équivalentes.

La démonstration est analogue pour la seconde équivalence.

c- Elément neutre

Propriété :

Soit $\mathcal{V}$ une proposition toujours vraie, et $\mathcal{F}$ une proposition fausse.

Pour toute proposition P, $P \vee \mathcal{F} \Leftrightarrow P$ et $P \vee \mathcal{V} \Leftrightarrow P$

P	$\mathcal{F}$	$P \vee \mathcal{F}$
1	0	1
0	0	0

P	$\mathcal{V}$	$P \vee \mathcal{V}$
1	1	1
0	1	0

Remarque : Une proposition vraie quel que soit ses composants est appelée une **tautologie**.

d- Tiers exclu et non-contradiction.

Propriétés :

Pour toute proposition P,

$P \vee (\neg P) \Leftrightarrow \mathcal{V}$,

$P \wedge (\neg P) \Leftrightarrow \mathcal{F}$,

où $\mathcal{V}$ est une proposition toujours vraie et $\mathcal{F}$ une proposition toujours fausse.

P	$\neg P$	$P \vee (\neg P)$
1	0	1
0	1	1

P	$\neg P$	$P \wedge (\neg P)$
1	0	0
0	1	0

e- Implication et équivalence

Propriétés :

Pour toutes propositions P, Q,

$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee Q)$,

$(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow \big((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)\big)$,

$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$.

La première équivalence permet de définir l'implication à partir des deux connecteurs négation et disjonction.

La deuxième équivalence justifie que certaines équivalences sont démontrables par une double implication. C'est le cas des théorèmes directs et de leurs réciproques.

La combinaison des deux permet d'obtenir la troisième équivalence.

f- Loi de Morgan

Propriétés :

Pour toutes propositions P, Q,

$\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow (\neg P) \wedge (\neg Q)$,

$\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow (\neg P) \vee (\neg Q)$,

$\neg(\neg P) \Leftrightarrow P$.

Ces trois propriétés sont démontrables en utilisant les tables de vérités des connecteurs de négation, disjonction et conjonction.

Application : Exercice 4

II Calcul des prédicats

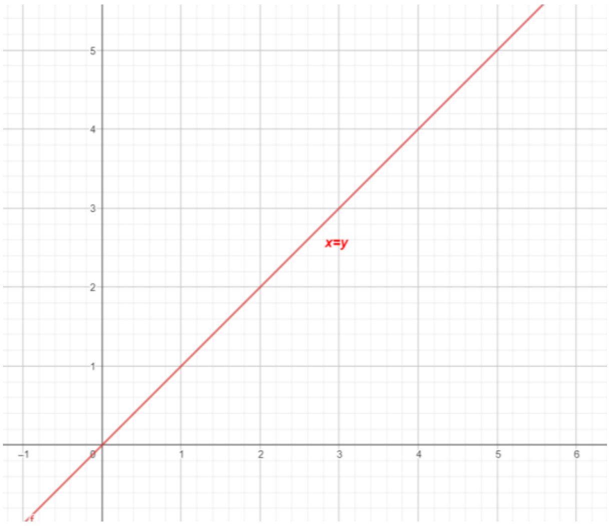
1- Variable, constante

Exemples :

- Dans la proposition $5 < 4$, les deux nombres situés de part et d'autre du symbole $<$ sont des **constantes**.
  En mathématiques on rencontre des expressions du type $x < 4$. Ici, x peut varier, dans $\mathbb{R}$ par exemple.

Pour $x = 5$, $x < 4$ s'écrit $5 < 4$. Cette proposition a bien évidemment une valeur de vérité qui est fausse (F).
Pour $x = 0$, $x < 4$ s'écrit $0 < 4$. Cette proposition a bien évidemment une valeur de vérité qui est vraie (V).
Plus généralement, pour toute valeur numériquement fixée de x, $x < 4$ devient une proposition dont la valeur de vérité est V si la valeur de x appartient à $]-\infty\,;4[$ et F, si celle-ci appartient à $[4\,;\,+\infty[$
On note $p(x)$ une expression telle que $x < 4$ dans laquelle figure une **variable** x. A toute valeur numérique de x choisie dans $\mathbb{R}$, le **prédicat p à une variable** associe la proposition obtenue en remplaçant dans $p(x)$, x par sa valeur numérique.

- Avec $x < y$, où x et y sont tous deux variables dans $\mathbb{R}$, on peut définir de la même façon, un **prédicat q à deux variables**. Dans ce cas, $q(x, y)$ est $x < y$.
  Pour $x = 5$ et $y = 4$, $q(5,4)$ est faux.
  Pour $x = 0$ et $y = 4$, $q(0,4)$ est vrai.
  Pour $x = -1$ et $y = 2$, $q(-1,2)$ est vrai.
  Plus généralement, $q(x, y)$ est une proposition vraie lorsque le couple (x, y) appartient au sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ dont la représentation graphique est au-dessus de la droite ci-contre :



On peut définir de la même manière un prédicat à trois variables.

Remarque : Un prédicat est parfois appelé **fonction propositionnelle**.

2- Quantificateurs

Dans le cas où $p(x)$ est $x < 4$, où x est variable dans $\mathbb{R}$ on peut définir deux nouvelles propositions :

- **Proposition 1** : « Il existe x tel que $x < 4$ (soit vrai) »
  En mathématiques, cela s'écrit $\exists x, x < 4$.
  Le symbole $\exists$ s'appelle **quantificateur existentiel**.
  En mathématiques, on a l'habitude de rappeler l'ensemble dans lequel la variable prend ses valeurs : $\exists x \in \mathbb{R}, x < 4$. Dans cet exemple, la proposition est vraie.

- **Proposition 2** : « Pour tout x, on a $x < 4$ »
  En mathématiques, cela s'écrit $\forall x, x < 4$.
  Le symbole $\forall$ s'appelle **quantificateur universel**.
  En mathématiques, on a l'habitude de rappeler l'ensemble dans lequel la variable prend ses valeurs : $\forall x \in \mathbb{R}, x < 4$. Dans cet exemple, la proposition est fausse.

- Plus généralement, p étant un **prédicat à une variable**, on peut définir les deux propositions suivantes :

$$\exists x, p(x)$$

$$\forall x, p(x)$$

La proposition « 3 est un nombre impair » peut ainsi s'écrire : $\exists k \in \mathbb{N}, 3 = 2k + 1$

Elle est vraie car $k = 1$ convient.

- Avec un **prédicat à deux variables**, on peut, de même définir de nouvelles propositions. Par exemple, lorsque $p(x, y)$ est $x < y$ où x et y sont des variables réelles, on peut définir les propositions suivantes :
  - $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x < y \longrightarrow$ est une proposition vraie
  - $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x < y \longrightarrow$ est une proposition fausse
  - $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x < y \longrightarrow$ est une proposition fausse
  - $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x < y \longrightarrow$ est une proposition vraie

Remarque : Dans une proposition comportant deux quantificateurs différents, il ne faut pas modifier l'ordre des quantificateurs sous peine de changer la véracité de la proposition.

3- Négation d'une proposition commençant par un quantificateur

Propriétés :

La **négation** de $\exists x, p(x)$ est $\forall x, \neg p(x)$

La **négation** de $\forall x, p(x)$ est $\exists x, \neg p(x)$

La négation d'une proposition commençant par un quantificateur existentiel est une proposition commençant par un quantificateur universel, et vice versa.

Les suites arithmétiques et géométriques

I Les suites arithmétiques

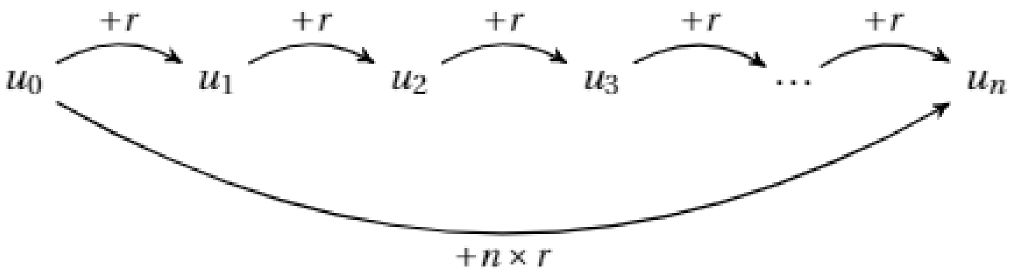
1 - Définition et propriétés

Définition :

Une suite (U_n) est **une suite arithmétique** s'il existe un réel r tel que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = U_n + r$.

Le réel r est appelé **raison** de la suite arithmétique.

Schématiquement, on peut représenter une suite arithmétique de la façon suivante :



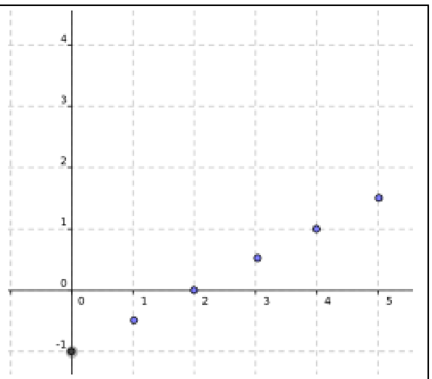
Dans une suite arithmétique, on passe donc d'un terme au suivant en ajoutant le même nombre r.

Exemple : La suite des entiers naturels pairs est une suite arithmétique de raison $r = 2$ et de premier terme $U_0 = 0$

Propriété :

Soit (U_n) une suite arithmétique de raison r.

La représentation graphique de (U_n) correspond à un nuage de points alignés de coordonnées $(n ; U_n)$.



Remarque : la représentation graphique d'une suite arithmétique est la même que celle d'une fonction affine.

Propriété :

Une expression de la somme de n termes consécutifs d'une suite arithmétique est :

$$U_1 + U_2 + \cdots + U_n = n \times \frac{U_1 + U_n}{2}$$

Propriété :

Pour une somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique, on applique la formule suivante :

$$(Somme\ de\ termes\ successifs) = (Nombre\ de\ termes) \times \frac{(Premier\ terme) + (Dernier\ terme)}{2}$$

2- Sens de variation

Propriété :

Soit (U_n) une suite arithmétique de raison r.

- Si $r > 0$, alors la suite (U_n) est strictement croissante.

- Si $r < 0$, alors la suite (U_n) est strictement décroissante.

- Si $r = 0$, alors la suite (U_n) est constante.

Démonstration : La suite (U_n) étant arithmétique de raison r, on peut écrire, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = U_n + r$.

Ainsi on en déduit que $U_{n+1} - U_n = r$

- Si $r > 0$ alors $U_{n+1} - U_n > 0$. La suite (U_n) est donc croissante.
- Si $r < 0$ alors $U_{n+1} - U_n < 0$. La suite (U_n) est donc décroissante.
- Si $r = 0$ alors $U_{n+1} = U_n$. La suite (U_n) est donc constante

II Les suites géométriques

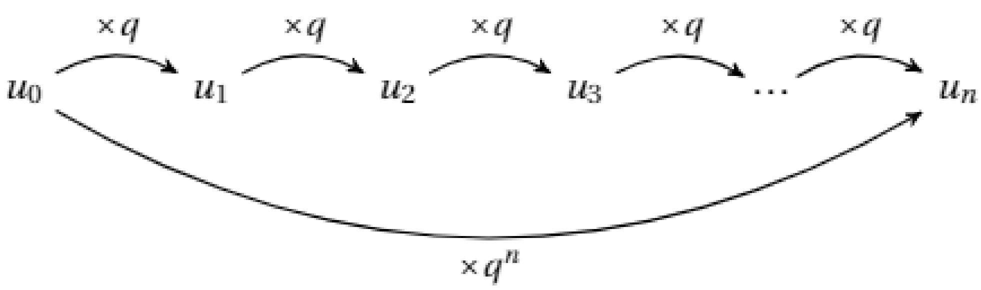
1- Définition et représentation

Définition :

Une suite (U_n) est **une suite géométrique** s'il existe un réel q tel que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = q \times U_n$.

Le réel q est appelé **raison** de la suite géométrique.

Schématiquement, on peut représenter une suite géométrique de la façon suivante :



Dans une suite géométrique, on passe donc d'un terme au suivant en multipliant par le même nombre q.

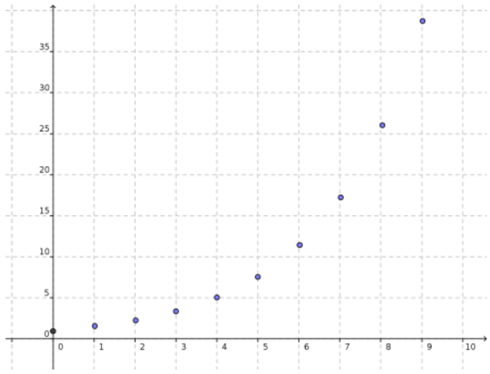
Exemple : La suite définie par $U_{n+1} = 2 \times U_n$ avec $U_0 = 1$ est une suite géométrique de raison $q = 2$.
Les premiers termes de cette suite sont 1, 2, 4, 8…

Propriété :

Soit (U_n) une suite géométrique de raison q.

La représentation graphique de (U_n) correspond à un nuage de points de coordonnées $(n\,;U_n)$.

Pour une suite géométrique, on parle de **croissance (ou décroissance) exponentielle**.



Propriété :

Une expression de la somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique est :

$$U_1 + U_2 + \cdots + U_n = U_1 \times \frac{1-q^n}{1-q}$$

Propriété :

Pour une somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique, on applique la formule suivante :

$$(Somme\ de\ termes\ successifs) = (Premier\ terme) \times \frac{1-(raison)^{nombre\ de\ termes}}{1-raison}$$

2- Sens de variation

Propriété :

Soit (U_n) une suite géométrique de raison q.

- Si $q > 1$, alors la suite (U_n) est strictement croissante.
- Si $0 < q < 1$, alors la suite (U_n) est strictement décroissante.
- Si $q = 1$, alors la suite (U_n) est constante.

Démonstration : La suite (U_n) étant géométrique de raison q, on peut écrire, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = \ q \times U_n$.

Ainsi on en déduit que $\frac{U_{n+1}}{U_n} = q$

- Si $q > 1$ alors $\frac{U_{n+1}}{U_n} > 1 \Leftrightarrow U_n < U_{n+1}$. La suite (U_n) est donc croissante.
- Si $0 < q < 1$ alors $\frac{U_{n+1}}{U_n} < 1 \Leftrightarrow U_{n+1} < U_n$. La suite (U_n) est donc décroissante.
- Si $q = 1$ alors $\frac{U_{n+1}}{U_n} = 1 \Leftrightarrow U_{n+1} = U_n$. La suite (U_n) est donc constante.

Probabilités

I Généralités et rappels

Définition :

Une expérience est aléatoire lorsqu'on ne peut pas prévoir à l'avance son résultat. Les différents résultats sont appelés issues de l'expérience.

Exemple : L'expérience aléatoire consistant à lancer un dé non truqué à six faces possède six issues : 1, 2, 3, 4, 5 et 6.

Notations :

Si A est un évènement, alors la probabilité qu'il soit réalisé est notée $p(A)$. Ce nombre est un réel compris entre 0 et 1.

Lorsque A est impossible, alors $p(A) = 0$.

Lorsque A est certain, alors $p(A) = 1$.

Exemple : On lance une fois un dé non truqué à six faces. Si on note A l'évènement « Obtenir un nombre plus grand que 2 », alors A est réalisé par les issues 3, 4, 5 et 6. Chacune de ces issues ayant une probabilité de $\frac{1}{6}$, $p(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Définition :

Si A est un évènement, alors on note $\bar{A}$ l'évènement contraire de A.

On a alors $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$.

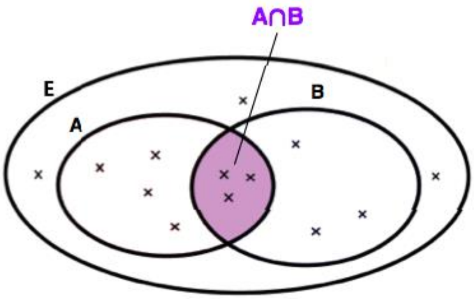
Application : Exercices 1 et 2

II Intersection et réunion

L'intersection de A et de B est la sous-population des individus qui appartiennent à la sous-population A ET à la sous-population B.

Elle est notée $A \cap B$ et se lit A inter B.

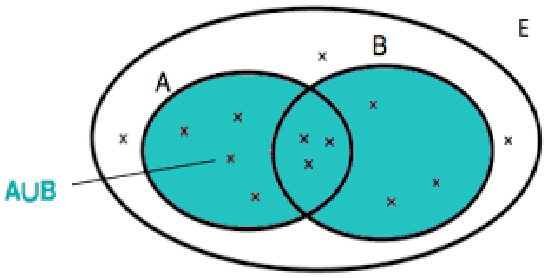
La proportion de cette intersection est égale à : $P_{A\cap B} = \frac{n_{A\cap B}}{n_E}$



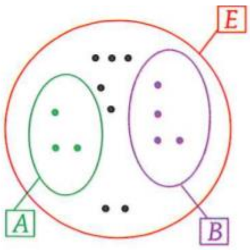
La réunion de A et de B est la sous-population des individus qui appartiennent à la sous-population A OU à la sous-population B. Elle est notée $A \cup B$ et se lit A union B.

La proportion de cette réunion est égale à :

$P_{A\cup B} = P_A + P_B - P_{A\cap B}$



<u>Cas particulier : Sous-populations disjointes</u>



Deux sous-populations A et B d'une même population E, sont dites disjointes lorsqu'elles n'ont aucun individu en commun, c'est-à-dire quand $A \cap B = \emptyset$ et par conséquent quand $P_{A\cap B} = 0$

<u>Application</u> : Exercice 3

III Probabilités marginales et conditionnelles

1- Cardinal

<u>Définition</u> :

Soient A et B deux variables étudiées sur une même population.

On peut croiser ces deux variables à l'aide d'un tableau croisé.

Dans chaque case, on retrouve le cardinal du caractère concerné, c'est-à-dire le nombre d'éléments de ce caractère.

	B	$\bar{B}$	Total
A	$\text{card}(A \cap B)$	$\text{card}(A \cap \bar{B})$	$\text{card}(A)$
$\bar{A}$	$\text{card}(\bar{A} \cap B)$	$\text{card}(\bar{A} \cap \bar{B})$	$\text{card}(\bar{A})$
Total	$\text{card}(B)$	$\text{card}(\bar{B})$	$\text{card}(E)$

2- Probabilités marginales et conditionnelles

La probabilité marginale se lit en marge du tableau.

	Hommes	Femmes	Total
Cadres	27	18	**45**
Ouvriers, techniciens	189	126	315
Total	216	144	**360**

Dans cet exemple, on compte 360 salariés au total dont 45 cadres.

La probabilité marginale de cadres est donc de $\frac{45}{360} = 0.125 = 12.5\%$. Elle correspond à la probabilité d'être un cadre dans cette société parmi les 360 salariés.

La probabilité conditionnelle se lit sur une colonne ou une ligne intérieure du tableau.

	Hommes	Femmes	Total
Cadres	27	18	**45**
Ouvriers, techniciens	**189**	126	315
Total	**216**	144	**360**

Dans cet exemple, on ne prend en compte que les hommes parmi tous les salariés qui sont au nombre de 216.

La probabilité conditionnelle d'être un ouvrier ou un technicien sachant que c'est un homme est donc de : $\frac{189}{216} = 0.875 = 87.5\%$

Elle est notée $P_{homme}(ouvriers) = \frac{189}{216} = 0.875$

Application : Exercices 4 et 5

IV Arbre pondéré

Il est parfois utile de représenter une situation de probabilités par un arbre et de savoir utiliser cet arbre pour faire des calculs de probabilités.

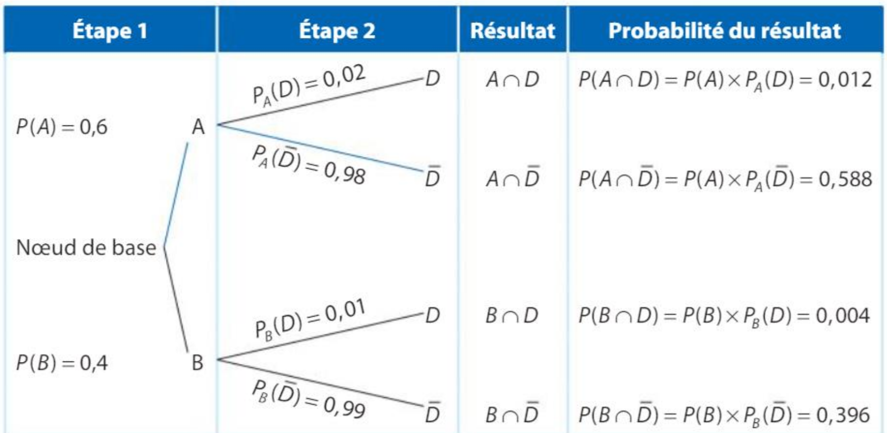
Exemple : Dans une entreprise, pour une production de $10\ 000$ paires de chaussures, on a obtenu le tableau suivant :

	Chaussures sans défaut	Chaussures défectueuses	Total
Chaussures produites dans l'atelier 1	5 880	120	6 000
Chaussures produites dans l'atelier 2	3 960	40	4 000
Total	9 840	160	10 000

On considère les évènements suivants :

- A : « la paire de chaussures prélevée provient de l'atelier 1 »
- B : « la paire de chaussures prélevée provient de l'atelier 2 »
- D : « la paire de chaussures prélevée est défectueuse »

Un arbre pondéré représentant la situation serait le suivant :



Propriété 1 :

La probabilité d'un « résultat » est égale au produit des probabilités inscrites sur les branches qui conduisent à ce résultat.

Propriété 2 :

La probabilité d'un évènement apparaissant à l'issue de l'étape 2 est égale à la somme des probabilités des résultats dans lesquels cet évènement figure.

V Indépendance de deux évènements

Définition :

Deux évènements de probabilités non nulles A et B sont **indépendants** si et seulement si :

$P_B(A) = P(A)$ ce qui est équivalent à $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

Exemple : Considérons le tirage au hasard d'une carte d'un jeu de 32 cartes.

Soit A l'évènement « tirer un as », et B l'évènement « tirer un cœur ».

On a :

- $P(A) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$
- $P(B) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$

$A \cap B$ est donc l'évènement « tirer l'as de cœur » et sa probabilité sera $P(A \cap B) = \frac{1}{32}$

Or : $P(A) \times P(B) = \frac{1}{8} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{32}$

Donc : Les évènements A et B sont indépendants.

Application : Exercice 6

VI Epreuve et schéma de Bernoulli

Définition :

On appelle épreuve de Bernoulli une expérience aléatoire n'ayant que 2 issues possibles : l'une est appelée « **succès** » notée S et l'autre appelée « **échec** » notée $\bar{S}$.

Pour simplifier l'écriture, dans une épreuve de Bernoulli, on note p la probabilité de succès, donc $p(S) = p$ et $p(\bar{S}) = 1 - p$

Exemple : On lance un dé non truqué à six faces et on note S l'évènement « Obtenir un 6 ». L'évènement $\bar{S}$ est alors « Ne pas obtenir un 6 ». C'est une épreuve de Bernoulli où $p = \frac{1}{6}$ et $p(\bar{S}) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

Application : Exercice 7

Définition :

On dit que deux expériences aléatoires sont indépendantes si le résultat de l'une n'a pas d'influence sur le résultat de l'autre.

Exemple : Si on effectue deux tirages successifs avec remise dans une urne, alors les deux tirages sont indépendants.

Définition :

On appelle schéma de Bernoulli la répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, de probabilité de succès p pour chacune d'entre elles.

Le nombre entier n et le nombre réel p sont les paramètres du schéma de Bernoulli.

Exemple : On lance un dé non truqué à six faces trois fois de suite et on note S l'évènement « Obtenir un 6 ». Puisque les lancés sont identiques et indépendants, c'est un schéma de Bernoulli, de paramètres $n = 3$ et $p = p(S) = \frac{1}{6}$

Méthode :

On peut modéliser un schéma de Bernoulli par un arbre pondéré de probabilité en appliquant les règles suivantes :

1/ La probabilité d'un évènement représenté par un chemin de l'arbre est égale au produit des probabilités rencontrées au cours du chemin.

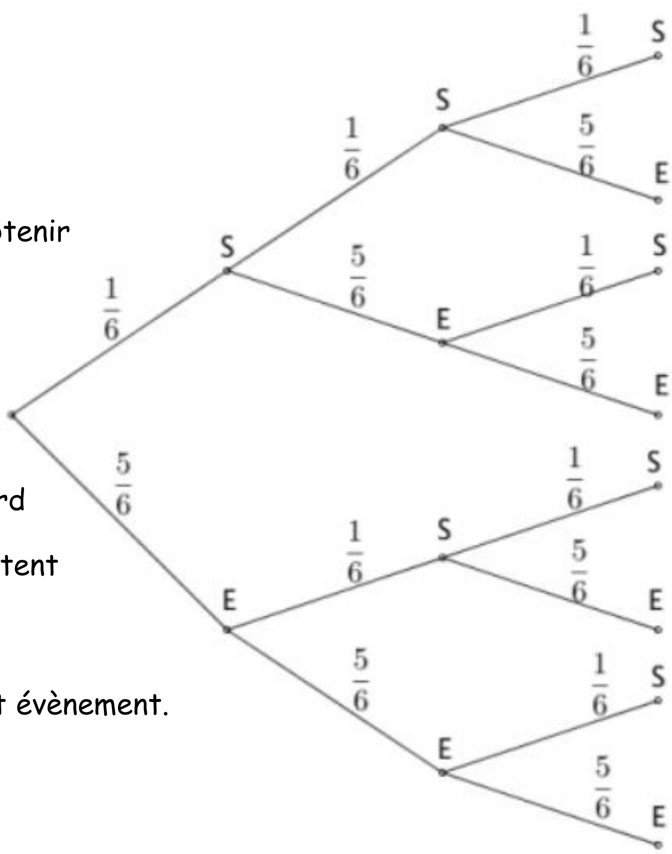
2/ Si un évènement est constitué de plusieurs chemins distincts de l'arbre, alors sa probabilité est obtenue en additionnant les probabilités de chacun de ces chemins.

Dans l'exemple précédent, on peut réaliser l'arbre pondéré ci-contre :

1/ Si l'on cherche la probabilité de l'évènement « Obtenir 3 succès », on obtient $p(S/S/S)\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{216}$

2/ Si l'on cherche la probabilité de l'évènement « Obtenir un succès et deux échecs », on doit d'abord calculer la probabilité d'un des chemins qui représentent cet évènement, soit $\frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{25}{216}$

On constate ensuite que 3 chemins représentent cet évènement.



Il faut donc additionner les probabilités de chacun de ces chemins, soit

$$\frac{25}{216}+\frac{25}{216}+\frac{25}{216}=\frac{75}{216}$$

<u>Application</u> : Exercice 8

Variables aléatoires

I Variables aléatoires

Définition :

Une variable aléatoire X associe un nombre réel à chaque issue de l'univers E.

Exemple :

Soit l'expérience aléatoire : « On lance un dé à six faces et on regarde le résultat ».

On considère le jeu suivant :

- Si le résultat est pair, on gagne 2 €.
- Si le résultat est 1, on gagne 3 €.
- Si le résultat est 3 ou 5, on perd 4 €.

On peut définir ainsi une variable aléatoire X qui peut prendre les valeurs $2, 3$ ou -4 :

- Pour les issues 2, 4 ou 6, on a $X = 2$.
- Pour l'issue 1, on a $X = 3$.
- Pour les issues 3 et 5, on a $X = -4$.

Application : Exercice 1

II Loi de probabilité

Définition :

La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée par toutes les probabilités $P(X = x_i)$.

Exemple : On considère la variable aléatoire X définie dans l'exemple précédent. Chaque issue du lancer de dé est équiprobable (même probabilité) et est égale à $\frac{1}{6}$.

On note donc :

- $P(X = 2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$
- $P(X = 3) = \frac{1}{6}$
- $P(X = -4) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

On peut résumer les résultats dans un tableau :

x_i	-4	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

Remarque : $P(X = x_i)$ peut se noter p_i

Application : Exercice 2

III Espérance

Définition :

L'espérance mathématique de la loi de probabilité de X est :

$$E(X) = p_1 \times x_1 + p_2 \times x_2 + \cdots + p_n \times x_n = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

Exemple : En reprenant la loi de probabilité de l'exemple précédent,

$$E(X) = \frac{1}{3} \times (-4) + \frac{1}{2} \times 2 + \frac{1}{6} \times 3$$

$$E(X) = -\frac{4}{3} + \frac{2}{2} + \frac{3}{6}$$

$$E(X) = \frac{1}{6}$$

Remarque : **L'espérance** est la **moyenne** que l'on peut espérer si l'on répète l'expérience un grand nombre de fois.

IV Variance et écart-type

Définition :

Soit X une variable aléatoire d'espérance $E(X)$.

On appelle variance de la variable aléatoire X le réel noté $V(X)$ qui vaut :

$$V(X) = p_1\left(x_1 - E(X)\right)^2 + p_2\left(x_2 - E(X)\right)^2 + \cdots + p_n\left(x_n - E(X)\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i\left(x_i - E(X)\right)^2$$

On appelle écart-type de la variable aléatoire X le réel noté $\sigma(X)$ ou σ_x défini par :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Exemple : Toujours en partant de l'exemple précédent :

- La variance de la variable aléatoire X est égale à :

$$V(x) = \frac{1}{3}\left(-4 - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(2 - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(3 - \frac{1}{6}\right)^2 \approx 8{,}81$$

- L'écart-type de la variable aléatoire est égale à :

$$\sigma(X) = \sqrt{8{,}81} \approx 2{,}97$$

Remarque : La variance permet de tenir compte de la dispersion de toutes les valeurs de la variable aléatoire, alors que l'écart-type permet de mesurer la dispersion des valeurs de la variable aléatoire autour de son espérance.

Loi binomiale

I Loi binomiale

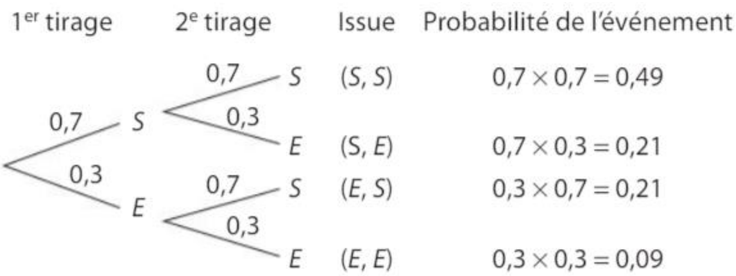
1- Définition

Définition :

La **loi binomiale** de paramètres n et p notée $B(n,p)$ est la loi de la variable aléatoire X qui donne le nombre de succès dans la répétition de n épreuves de Bernoulli de paramètre p.

Exemple : Dans un jeu télévisé opposant deux équipes jouant en alternance, chaque participant doit, à certains moments, prélever une boule dans une urne contenant 7 boules vertes et 3 boules noires. Les boules sont indiscernables au toucher et le tirage équiprobable. Si une boule verte est tirée, l'équipe concernée continue de jouer ce qui est considéré comme un succès.

Deux prélèvements dans l'urne sont réalisés successivement en remettant la 1ère boule dans l'urne. Il s'agit de deux épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes :



On peut associer à ce schéma de Bernoulli les trois nombres $0, 1$ et 2 mesurant le nombre de succès possibles affectés des probabilités des évènements correspondants :

k	0	1	2
Probabilité d'obtenir k succès	0,09	0,42	0,49

La probabilité d'obtenir k succès dans ce schéma de Bernoulli où $n = 2$ est notée $P(X = k)$, où X est la variable aléatoire donnant le nombre de succès.

2- Théorème

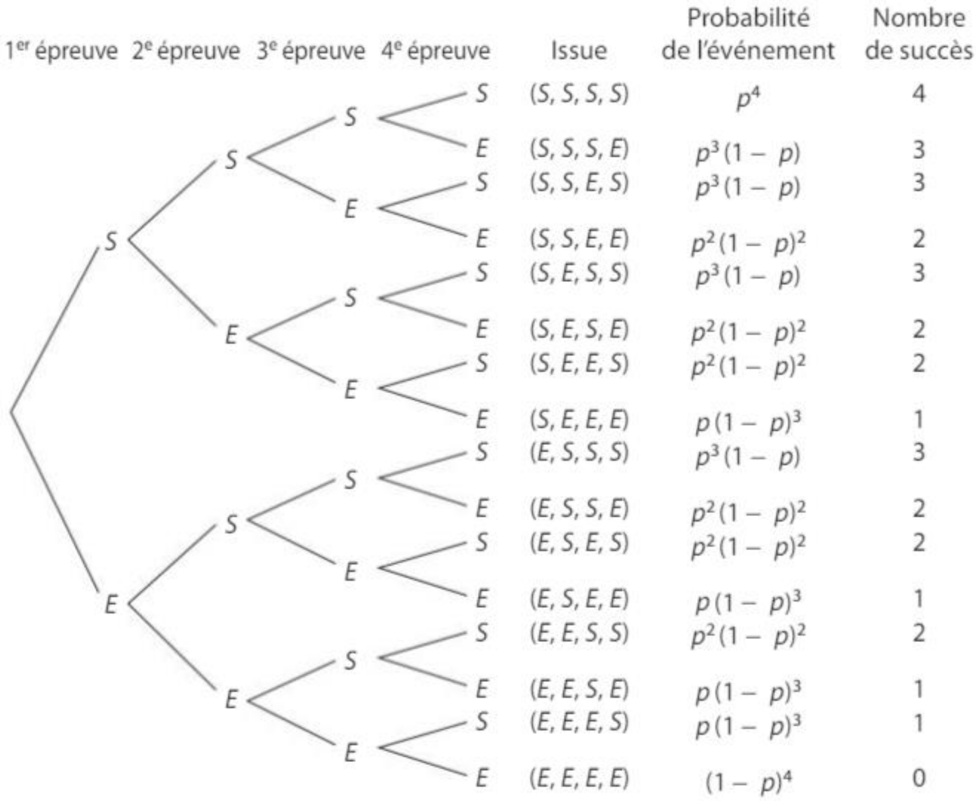
Définition :

Pour la variable aléatoire X qui suit la loi binomiale $B(n,\ p)$, où n est un entier naturel et p un nombre réel de l'intervalle $[0\,;1]$, on a pour tout entier k compris entre 0 et n :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$\binom{n}{k}$ se lit « k parmi n » pour le nombre de chemins qui réalisent k succès dans l'arbre de probabilités. Ils sont appelés **coefficients binomiaux**.

Exemple : Construisons l'arbre de probabilités correspondant au schéma de Bernoulli dans le cas où $n = 4$ et où la valeur du paramètre p n'est pas donnée.



4 issues donnent 3 succès et la probabilité de l'évènement correspondant à chacun est la même.

Donc $P(X=3) = p^3(1-p) + p^3(1-p) + p^3(1-p) + p^3(1-p) = 4p^3(1-p)$

On peut récapituler ces résultats dans le tableau qui donne la loi de probabilité de la variable aléatoire X :

k	0	1	2	3	4
$P(X=k)$	$(1-p)^4$	$4p(1-p)^3$	$6p^{2(1-p)^2}$	$4p^3(1-p)$	p^4

Remarque : On observe une symétrie des coefficients numériques $1, 4, 6, 4, 1$ figurant dans le tableau.

3- Application dans un tableur

Pour calculer directement des probabilités et représenter graphiquement la loi binomiale :

- on utilise la formule $= LOI.BINOMIALE(k\,;n\,;p\,;FAUX)$ pour le calcul de $P(X=k)$
- on utilise la formule $= LOI.BINOMIALE(k\,;n\,;p\,;VRAI)$ pour le calcul de $P(X \leq k)$

Exemple : Pour réaliser les tables suivantes, il suffit d'entrer

- en B3 la formule $= LOI.BINOMIALE(A3\,;100\,;0{,}2\,;FAUX)$
- en C3 la formule $= LOI.BINOMIALE(A3\,;100\,;0{,}2\,;VRAI)$

On recopie ensuite vers le bas.

Remarque : Si $k=2$ alors $P(X \leq 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)$

III Espérance

Définition :

L'espérance d'une variable aléatoire X suivant une loi binomiale $B(n,p)$ est $E(X) = np$

Exemple : Une entreprise commercialise des accessoires pour les tablettes numériques. On note E l'évènement : « un accessoire prélevé au hasard dans le stock est défectueux » avec $P(E) = 0{,}04$. On procède avec remise au tirage de 25 accessoires.

On étudie donc la variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 25$ et $p = 0{,}04$

L'espérance de cette variable aléatoire sera $E(X) = 25 \times 0{,}04 = 1$

Remarque : **L'espérance** est la **valeur moyenne** dans le cas d'un grand nombre de réalisations du schéma de Bernoulli associé à la variable aléatoire X.

IV Variance et écart-type

Définition :

La **variance** d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale $B\,(n,p)$ est $V(X) = np(1-p)$

L'écart-type est $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Exemple : En reprenant l'exemple précédent :

- $V(X) = 25 \times 0{,}04 \times (1 - 0{,}04) = 0{,}96$
- $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0{,}96} \approx 0{,}98$

Résumé en vidéo

Loi uniforme et loi normale

I Variable aléatoire continue (ou à densité)

1- Définition

Définition :

Une variable aléatoire X est dite **continue** lorsque l'ensemble des valeurs prises par X est tout un intervalle.

Exemple : Une machine fabrique des tiges de bois de longueurs aléatoires comprises entre $1\ cm$ et $3\ cm$. On considère la variable aléatoire X qui à une tige associe sa longueur. L'ensemble des valeurs prises par X est bien tout un intervalle.

2- Fonction de répartition

En reprenant l'exemple précédent, on est bien en présence d'une variable aléatoire X dite continue.

Cependant, pour tout réel x, on a $P(X = x) = 0$.

Or, $P(1 \leq X \leq 3) = 1$.

On ne peut donc pas définir X par l'ensemble des valeurs $P(X = x)$.

C'est pourquoi on définit X par les valeurs $P(X \leq x)$. C'est le rôle de la fonction de répartition.

Définition :

Soit X une variable aléatoire continue. La **fonction de répartition** d'une variable aléatoire X est la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = P(X \leq x)$.

Propriété :

La définition nous permet d'écrire :

- $F(x) = P(X \in]-\infty\,;\,x])$

- $P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F(b) - F(a)$

- $P(X > b) = P(\overline{X \leq b}) = 1 - F(b)$

Remarque :

On admet que pour une variable aléatoire continue, pour tout $a \in \mathbb{R}$: $P(X = a) = 0$.

On a donc :

- $P(a < X < b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a \leq X \leq b)$
- $P(a < X) = P(a \leq X < b)$
- $P(X > b) = P(X \geq b)$

Propriété :

La fonction de répartition F d'une variable aléatoire continue X a les propriétés suivantes :

- F est une fonction croissante, définie et continue sur R.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq F(x) \leq 1$.

- $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$

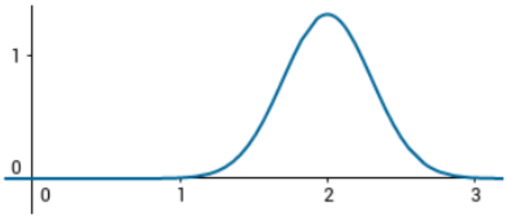
3- Densité et loi de probabilité

Définition :

La fonction f dérivée de F est la **densité de probabilité** de X. On a alors $F'(x) = f(x)$

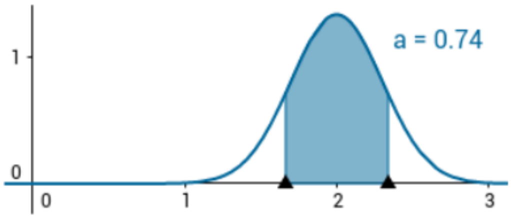
Exemple :

On représente ci-contre une densité de probabilité pouvant convenir à l'exemple précédent. La densité de probabilité permet de se faire rapidement une idée de la répartition des valeurs.



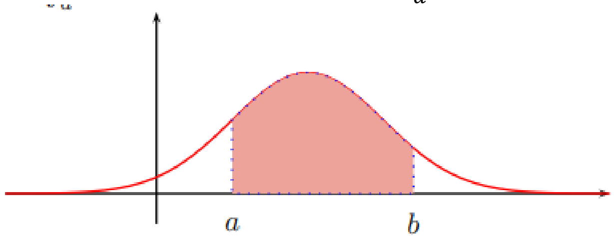
Pour déterminer une probabilité du type $P(a \leq X \leq b)$, on calcule l'aire sous la courbe représentative de f.

Ci-contre on a : $P(1{,}66 \leq X \leq 2{,}34) = 0{,}74$.

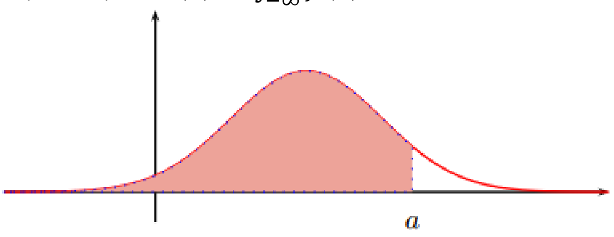


Remarques :

- F étant une fonction croissante, f est positive
- $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$



- $P(X \leq a) = F(a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx$



- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$
- Graphiquement, le calcul d'intégrale correspond à l'aire entre l'axe des abscisses, et la courbe.

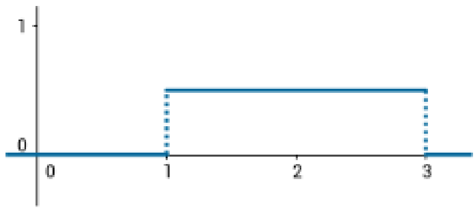
II Loi uniforme

Définition :

Une variable aléatoire X suit une **loi uniforme** sur l'intervalle $[a\,;b]$ notée $\mathcal{U}(a;b)$, lorsque la densité de probabilité de f est définie par :

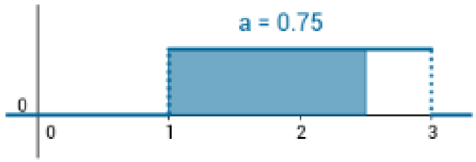
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & si\ a \leq x \leq b \\ 0, & sinon \end{cases}$$

<u>Exemple</u> : Soit la loi uniforme X sur l'intervalle $[1\,;3]$:



$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & si\ 1 \leq x \leq 3 \\ 0, & sinon \end{cases}$$

Calculons $P(X < 2{,}5) = (2{,}5 - 1) \times \frac{1}{2} = 0{,}75$



<u>Remarque</u> : Pour calculer l'aire en bleu, il suffit d'appliquer la formule de l'aire d'un rectangle.

Propriété :

Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme $[a\,;b]$. On admet alors que :

- L'**espérance** de X est : $E(X) = \frac{a+b}{2}$

- La **variance** de X est : $V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

- L'**écart-type** de X est : $\sigma(X) = \frac{b-a}{\sqrt{12}}$

<u>Exemple</u> : En suivant toujours avec le même exemple on a :

- $E(X) = \frac{1+3}{2} = 2$
- $V(X) = \frac{(3-1)^2}{12} = \frac{1}{3}$
- $\sigma(X) = \sqrt{\frac{1}{3}} \approx 0{,}577$

<u>Application</u> : Exercices 1 et 2

III Loi normale

1- Définition

Définition :

Une variable aléatoire X suit une loi normale d'espérance μ est d'écart-type σ notée $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma)$, lorsque la densité de probabilité est définie par :

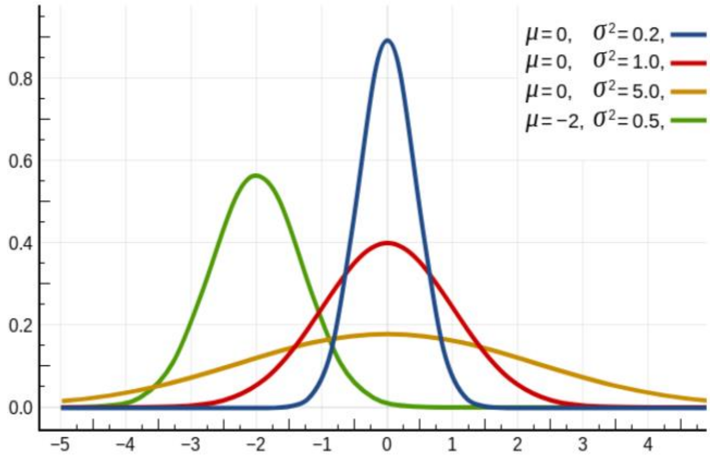
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \times e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Exemples :

La courbe représentative de la densité de probabilité est appelée une courbe de Gauss, ou courbe dite « en cloche ».

Elle admet un axe de symétrie d'équation $x = \mu$.

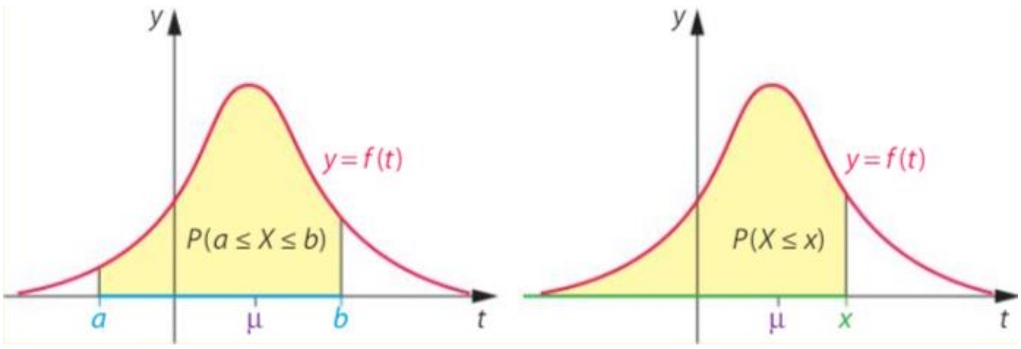
Pour une même valeur de μ, l'allure de la courbe est plus ou moins resserrée suivant que σ est plus ou moins petit.



2- Calcul des probabilités

Comme pour une loi uniforme sur $[a, b]$, une probabilité avec la loi normale est l'aire d'une partie du plan située sous la représentation graphique de la fonction de densité.

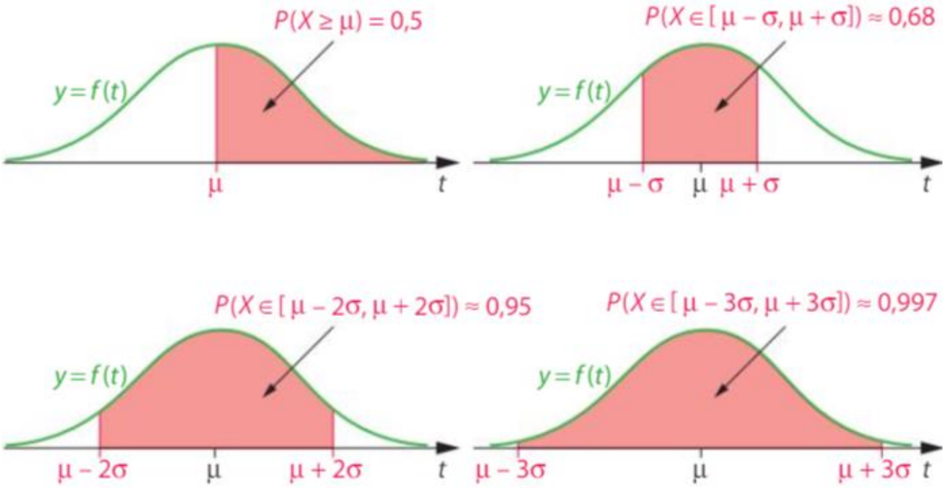
Exemple : Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma)$ de fonction de densité f.



Les valeurs numériques de a, b et x étant données, on obtient les valeurs numériques de $P(a \leq x \leq b)$ ou $P(X \leq x)$ (par la calculatrice ou le tableur) et en remarquant que :

$$P(a \leq x \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a)$$

Remarque : Certains résultats restent vrais quelles que soient les valeurs de l'espérance μ et de l'écart-type σ. Ils sont à connaître par cœur.



Pour calculer n'importe quelle autre probabilité, il faut utiliser le tableur ou la calculatrice. Pour cette dernière, voici les méthodes à appliquer : Casio (Lycée) ou Texas Instruments (Lycée)

Application : Exercices 3 et 4

IV Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

Définition :

Soit n et p les paramètres d'une loi binomiale.

Si n est « grand » et si p n'est « ni trop voisin de 0 ni trop voisin de 1 », alors **la loi binomiale $\boldsymbol{B(n,p)}$ admet pour approximation la loi normale $\boldsymbol{\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma)}$** de même espérance et de même écart-type :

$$\mu = np \text{ et } \sigma = \sqrt{np(1-p)}$$

Remarque :

Généralement, pour avoir une approximation correcte, on vérifie que :

- $n > 30$
- $np > 5$
- $n(1-p) > 5$

Il faut également tenir compte de la correction de continuité.

Propriété :

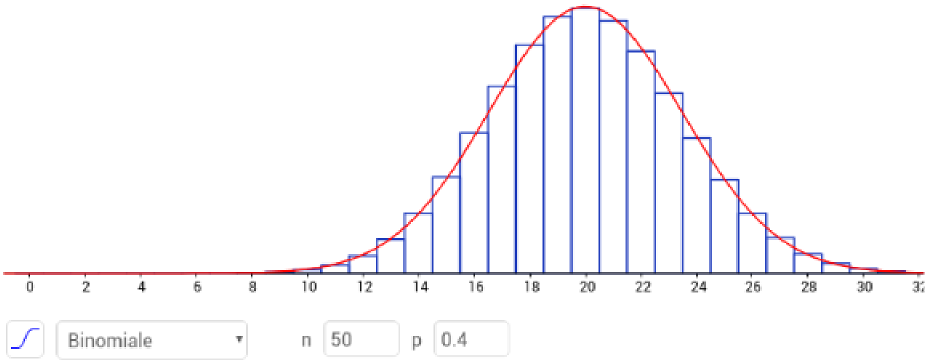
La **correction de continuité** consiste à remplacer tout nombre entier k par un intervalle d'extrémités $k - \frac{1}{2}$ et $k + \frac{1}{2}$

Exemple :

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $B(50; 0,4)$.

On peut approcher cette loi binomiale par une loi normale de moyenne $\mu = 50 \times 0,4 = 20$ et d'écart type $\sigma = \sqrt{50 \times 0,4 \times (1 - 0,4)} \approx 3,4641$

Ci-dessous est représentée l'approximation de la loi $B(50\,; 0,4)$ par la loi normale $\mathcal{N}(20\,;\ 3,46)$ à l'aide du logiciel GeoGebra :



Notons Y la variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(20\,;\ 3,46)$

- pour approcher $P(X \leq 22)$, on calcule $P(Y \leq 22,5)$
- pour approcher $P(X \geq 16)$, on calcule $P(Y \geq 15,5)$
- pour approcher $P(18 \leq X \leq 22)$, on calcule $P(17,5 \leq Y \leq 22,5)$

V Complément sur espérance et variance

1 - Espérance et variance de $aX + b$

Propriété :

X étant une variable aléatoire, et a et b deux nombres réels,

$\boldsymbol{E(aX + b) = aE(X) + b}$ et $\boldsymbol{V(aX + b) = a^2V(X)}$

Exemple : On note X la variable aléatoire qui à tout instant appartenant à un certain intervalle de temps, associe le prix unitaire, en euros, d'un produit. On suppose que $E(X) = 400$ € et $\sigma(X) = 80$ €.

Une entreprise achète régulièrement 30 unités de ce produit, chaque achat produisant des frais fixes d'un montant de 200 €.

La variable aléatoire $Y = 30X + 200$ associe à chaque instant le montant total d'un tel achat incluant les frais fixes.

On a donc :

- $E(Y) = 30 \times E(X) + 200 = 30 \times 400 + 200 = 12\,200$ €
- $V(Y) = 30^2V(X)$ et $\sigma(Y) = 30\sigma(X) = 30 \times 80 = 2\,400$ €

2- Somme de deux variables aléatoires

Exemple : Deux représentants A et B d'une même entreprise travaillent en équipe pendant un mois pour proposer des contrats à d'éventuels clients : A est chargé de placer de nouveaux contrats à des clients actuels de l'entreprise, tandis que B doit prospecter de nouveaux clients.

Soit X et Y les variables aléatoires mesurant le nombre de contrats obtenus respectivement par A et B au cours d'une demi-journées ouvrable choisie au hasard dans le mois.

On suppose que X prend des valeurs dans $\{0\,;1\,;2\,;3\}$, que Y prend des valeurs dans $\{0\,;1\}$ et que, pour tout élément x de $\{0\,;1\,;2\,;3\}$ et pour tout élément y de $\{0\,;1\}$, la probabilité $P(X = x\; et\; Y = y)$ est donnée par le tableau suivant :

Y \ X	0	1	2	3
0	0,05	0,15	0,20	0,10
1	0,10	0,20	0,15	0,05

L'entreprise s'intéresse à la variable aléatoire $X + Y$, mesurant le nombre total de contrats obtenus par l'équipe constituée de A et de B au cours d'une demi-journée choisie au hasard dans le mois considéré. $X + Y$ prend donc ses valeurs dans $\{0\,;1\,;2\,;3\,;4\}$.

- L'évènement $X + Y = 0$ correspond à $(X = 0\; et\; Y = 0)$.
  Donc, $P(X + Y) = 0{,}05$
- L'évènement $X + Y = 1$ correspond à $(X = 1\; et\; Y = 0)$ ou $(X = 0\; et\; Y = 1)$.
  Les deux évènements étant incompatibles, on a :
  $P(X + Y = 1) = P(X = 1\; et\; Y = 0) + P(X = 0\; et\; Y = 1)$
  $P(X + Y = 1) = 0{,}15 + 0{,}10$
  $P(X + Y = 1) = 0{,}25$
- Par un raisonnement identique, on trouve par le calcul que :
  $P(X + Y = 2) = P(X = 2\; et\; Y = 0) + P(X = 1\; et\; Y = 1) = 0{,}40$
  $P(X + Y = 3 = P(X = 3\; et\; Y = 0) + P(X = 2\; et\; Y = 1) = 0{,}25$
  $P(X + Y = 4) = P(X = 3\; et\; Y = 1) = 0{,}05$

On obtient ainsi la loi de probabilité (ou distribution) de la variable aléatoire $X + Y$:

k	0	1	2	3	4
P(X+Y=k)	0,05	0,25	0,40	0,25	0,05

3- Espérance et variance de $X + Y$ et $X - Y$

Propriété :

$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

$E(X - Y) = E(X) - E(Y)$

Propriété :

Avec X et Y des variables aléatoires indépendantes, on a $\begin{cases} V(X+Y) = V(X) + V(Y) \\ V(X-Y) = V(X) - V(Y) \end{cases}$