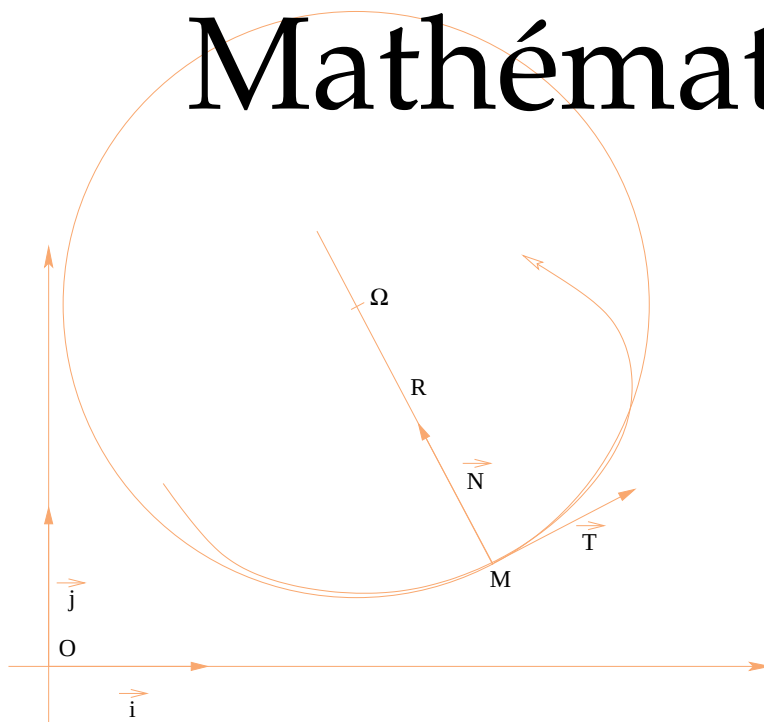


Mathématiques



Calcul élémentaire de la courbure en un point birégulier

On considère la fonction angulaire associée φ qui est l'angle entre Ox et $\vec{T}$, $\varphi = \widehat{(\vec{i}, \vec{T})}$
d'où, en paramétriques :

$$\vec{T} : \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dx}{ds} \\ \frac{dy}{ds} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} / \frac{ds}{dt} \\ \frac{dy}{dt} / \frac{ds}{dt} \end{pmatrix} \text{ et } \vec{N} : \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}$$

En polaires, on a :

$$\varphi = \theta + V$$

Théorème : Avec les notations précédentes, on a :

$$\gamma = \frac{dV}{ds} \quad R = \frac{ds}{d\varphi}$$

Démonstration : $\vec{T} : \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$ qu'on dérive par rapport à s . D'où $\frac{d\vec{T}}{ds} = \gamma \vec{N} : \begin{pmatrix} -\sin \varphi \times \frac{d\varphi}{ds} \\ \cos \varphi \times \frac{d\varphi}{ds} \end{pmatrix}$.

Ce qui donne immédiatement : $\gamma = \frac{d\varphi}{ds}$.

■
Christophe Caignaert

Lycée Colbert – 59200 Tourcoing

<http://c.caignaert.free.fr>

Année scolaire 2002 – 2003

Nouveautés 2002 – 2003

P^{EU} de changements dans la présentation cette année. On a bien sûr relu, complété le contenu et corrigé quelques bogues : qu'on se rassure, il en reste ! Un grand merci aux lecteurs attentifs.

Les ajouts sont principalement des figures et des considérations élémentaires.

Ce document est disponible sur mon site personnel : <http://c.caignaert.free.fr>

Ce site contient également un cours complet de Spé TSI, tant en pdf qu'en html.

Il a été écrit sous pdfTeX, une version spécifique de LaTeX qui produit directement des fichiers au format pdf.

I Algèbre	7	10-4 Diagonalisabilité et diagonalisation . .	16
1 Groupes	7	10-5 Triangularisation	17
1-1 Groupe	7	10-6 Puissances d'une matrice	17
1-2 Sous-groupe	7	11 Espaces Préhilbertiens Réels et Euclidiens	17
1-3 Morphisme de groupe	7	11-1 Produit scalaire	17
2 Formule du Binôme	7	11-2 Esp. vect. préhilbertiens et euclidiens .	18
2-1 Coefficients binomiaux	7	11-3 Inégalités	18
2-2 Formule du Binôme et autres	7	11-4 Endomorphismes symétriques	18
3 Nombres Complexes	8	11-5 Matrice symétrique réelle	18
3-1 Nombres Complexes	8	11-6 Procédé de Schmidt	19
3-2 Racines d'un nombre complexe	8	11-7 Projection sur un s-e-v de dim. finie .	19
4 Polynômes	8	12 Groupe Linéaire et Groupe Orthogonal	19
4-1 Racines	8	12-1 Groupe linéaire	19
4-2 Division Euclidienne	9	12-2 Groupe orthogonal	19
5 Fractions Rationnelles	9	13 Structure d'Algèbre	20
5-1 Décomposition en éléments simples .	9	13-1 Algèbre	20
5-2 Conseils pratiques	10	13-2 Sous-algèbre	20
6 Espaces Vectoriels	10	13-3 Algèbres usuelles	20
6-1 Structure d'espace vectoriel	10	II Analyse	21
6-2 Sous-espace vectoriel	10	14 Suites	21
6-3 Somme de sous-espaces vectoriels . .	10	14-1 Suites	21
6-4 Norme sur un espace vectoriel	10	14-2 Sous-suites	21
6-5 Esp. vect. de dim. finie : base	11	14-3 Suites vectorielles	21
6-6 Espaces vectoriels usuels	11	14-4 Suites réelles ou complexes	21
7 Applications Linéaires	11	14-5 Suites réelles	21
7-1 Applications linéaires	11	14-6 Suites récurrentes	22
7-2 Image et noyau	12	14-7 Suites récurrentes linéaires	22
7-3 Projecteur	12	15 Fonctions $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$	23
7-4 Théorème du rang	12	15-1 Ensemble de définition	23
7-5 Système linéaire	13	15-2 Monotonie	23
8 Matrices	13	15-3 Limite et continuité	23
8-1 Généralités	13	15-4 Limites usuelles	23
8-2 Généralités sur les matrices carrées . .	14	15-5 Equivalents	24
8-3 Matrice d'une application linéaire . . .	14	16 Dérivabilité	24
8-4 Matrice de Passage	14	16-1 Somme et produit	24
8-5 Changements de base	15	16-2 Dérivée d'une fonction composée . . .	24
9 Déterminants	15	16-3 Dérivée et prolongement par continuité	24
9-1 Ordre 2 et 3	15	16-4 Th. de Rolle, T.A.F., Formules de Taylor	25
9-2 Matrice triangulaire	15	16-5 Développements limités	25
9-3 Ordre quelconque	15	16-6 Opérations sur les dl_n	25
9-4 Déterminant d'un produit	15	16-7 Fonctions usuelles	26
9-5 Dét. d'une mat. triangulaire par blocs	16	17 Trigonométrie	27
10 Réduction des Endomorphismes	16	17-1 Propriétés élémentaires	27
10-1 Valeurs propres et vecteurs propres . .	16	17-2 Symétries	29
10-2 Polynôme caractéristique	16	17-3 Arc double	29
10-3 Diagonalisabilité	16	17-4 Sommes d'arcs	30
		17-5 Transformation de produits en sommes	30
		17-6 Transformation de sommes en produits	30
		17-7 Formule de Moivre	30
		17-8 Fonctions réciproques	30

17-9	Pour le calcul intégral	30	25-2	Série de Fourier	48
18 Recherche de primitives		31	25-3	Autres cas	48
18-1	Fraction rationnelle en x	31	26 Fonctions $\mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$		49
18-2	Fractions rationnelles diverses	31	26-1	Limite et continuité	49
18-3	Polynôme $\times$ exponentielle	32	26-2	Classe $\mathcal{C}^1$ et $\mathcal{C}^2$	49
18-4	Primitives usuelles	32	26-3	Extrémums d'une fonction $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. .	50
19 Intégrale de Riemann		32	27 Fonctions (ou suites) à valeur dans $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$		50
19-1	Primitive	32	27-1	Limite et continuité	50
19-2	Inégalités	32	27-2	Fonction $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, classe $\mathcal{C}^1$	51
19-3	Théorème des 3 conditions	34	27-3	Fonction $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, classe $\mathcal{C}^1$	51
19-4	Intégrale dépendant d'une borne . . .	34	28 Equations et systèmes différentiels		51
19-5	Continuité et dérivation sous $\int$. . .	34	28-1	Généralités	51
19-6	Int. par parties et chang. de variable .	34	28-2	Non Linéaire du premier ordre	52
19-7	Sommes de Riemann	35	28-3	Linéaire du premier ordre	52
20 Intégrale généralisée		35	28-4	Lin. du sec. ordre à coeff. constants . .	52
20-1	Convergence	35	28-5	Linéaire du second ordre	52
20-2	Fonctions positives	35	28-6	Système Linéaire du premier ordre . .	53
20-3	Théorème des 3 conditions	36	28-7	système autonome	53
20-4	Int. par parties et chang. de variable .	36	III Géométrie		54
20-5	Un procédé de convergence	36	29 Barycentre		54
20-6	Continuité et dérivation sous $\int$. . .	37	29-1	Barycentre de p points pondérés . . .	54
20-7	Ensemble de définition	37	29-2	Associativité du barycentre	54
21 Intégrales doubles et triples		37	30 Isométries		54
21-1	Description hiérarchique du domaine	37	30-1	Symétries orthogonales	54
21-2	Calcul d'Aires et de Volumes	38	30-2	Recherche d'une symétrie orthogonale	54
21-3	Inclusion des domaines	39	30-3	Isométries Vectorielles	55
21-4	Changement de variables	39	30-4	Isométries Affines	55
22 Séries numériques (réelles ou complexes)		41	31 Droites et Plans affines		56
22-1	Convergence et Convergence Absolue	41	31-1	Droites du plan	56
22-2	Séries géométriques	41	31-2	Plans de l'espace affine	57
22-3	Séries positives	41	31-3	Droites de l'espace affine	57
22-4	Critère spécial des séries alternées . .	42	31-4	Angles	58
22-5	Comparaison série-intégrale	42	31-5	Aires et Volumes élémentaires	58
22-6	Suite et série des différences	43	31-6	Distances	58
22-7	Calcul exact de sommes de séries . . .	43	32 Courbes Planes		58
22-8	Calcul approché de sommes de séries	43	32-1	Courbes d'équation $y = f(x)$	58
23 Séries Entières		44	32-2	Courbes planes en paramétriques . . .	60
23-1	Rayon de convergence	44	32-3	Courbes planes en polaires	61
23-2	Convergence	44	32-4	Courbes usuelles en polaires	64
23-3	Somme de deux séries entières	45	33 Courbure et Rayon de Courbure		64
23-4	Développement en série entière	45	33-1	Rayon de courbure d'une courbe plane	64
23-5	Séries entières usuelles	45	33-2	Recherche de la courbure	64
23-6	Sér. ent. solution d'une équation diff. .	45	34 Surfaces : Généralités		66
24 Séries de Fourier		46	34-1	Surfaces, plan tangent	66
24-1	Coefficients de Fourier	46	34-2	Tangente à une courbe de l'espace . .	67
24-2	Cas où f est 2π -périodique	47	35 Cercles et Sphères		68
24-3	Convergence	47	35-1	Cercles dans le plan et sphères	68
24-4	Produit scalaire et formule de Parseval	48			
25 $\int \Sigma = \Sigma \int \dots$		48			
25-1	Série entière	48			

35-2	Cocyclicité	68	40-1	Fonctions mathématiques usuelles . .	81
35-3	Cercles dans l'espace.	68	40-2	Limites et développements limités . .	81
36	Coniques	68	40-3	Dérivées	82
36-1	Ellipses	69	40-4	Primitives et intégrales	82
36-2	Paraboles	69	40-5	Solve...	82
36-3	Hyperboles	70	41	Algèbre linéaire	82
36-4	Identification d'une conique	70	41-1	Vecteurs	82
37	Quadriques	71	41-2	Procédé de Schmidt	83
37-1	Equations réduites	71	41-3	Matrices	83
37-2	Intersection avec un plan	73	41-4	Éléments propres	83
37-3	Identification d'une quadrique	73	42	Graphiques	83
38	Surfaces de révolution, cylindres et cônes	73	42-1	Courbes du plan	83
38-1	Surfaces de révolution	73	42-2	Surfaces	84
38-2	Cylindres	74	42-3	Courbes de l'espace	84
38-3	Cônes	76	42-4	Tracé simultané	84
38-4	Cylindres et cônes de révolution	77	43	Structures de contrôle et procédures	84
IV	Maple	79	43-1	Structure alternative	84
39	Bases	79	43-2	Structure répétitive	85
39-1	Manipulations de base	79	43-3	Procédures	85
39-2	Constantes	79	44	Exemples de Programmes	85
39-3	Sommes et produits	80	44-1	Un programme très simple	85
39-4	Fonctions d'évaluation	80	44-2	Structure alternative	86
39-5	Transformation générale d'expressions	80	44-3	Structure itérative « pour »	86
39-6	Simplification d'expressions	81	44-4	Structure itérative « tant que »	86
39-7	Structures de données	81	44-5	Récurrance sur plusieurs rangs	87
40	Mathématiques usuelles	81	44-6	Un exemple en algèbre linéaire	87
			Index		89

Figures

1	Projection orthogonale	19	15	Convergence d'une série entière	44
2	Fns exponentielles et logarithme . . .	26	16	Fonction convexe	60
3	Fns cosinus et sinus hyperboliques . .	26	17	Etude locale d'une courbe paramétrée	61
4	Fonction tangente hyperbolique	27	18	Exemple de ρ négatif en polaires . . .	62
5	Cercle trigonométrique	27	19	Tangente en polaires	63
6	Fonctions trigonométriques	29	20	Asymptote en polaires	63
7	Fns trigonométriques réciproques . . .	31	21	Repère de Frenet et centre de courbure	65
8	Intégrale double	38	22	Plan tangent	67
9	Intégrale triple	38	23	Ellipse : foyers et directrices	69
10	Intégrale double en polaires	39	24	Hyperbole : foyers et directrices	70
11	Intégrale triple en cylindriques	40	25	Quadriques	72
12	Intégrale triple en sphériques	41	26	Surface de révolution : axe et directrice	74
13	Critère spécial des séries alternées . .	42	27	Cylindre : direction et directrice	75
14	Comparaison série-intégrale	43	28	Contour apparent dans une direction .	76
			29	Cône : sommet et directrice	76
			30	Contour apparent depuis un point . . .	77

Tableaux

1	Fonctions usuelles	28	2	Primitives usuelles	33
			3	Séries Entières usuelles	46

Algèbre

1 Groupes

1-1 Groupe

Définition : $*$ étant une loi de composition interne, c'est à dire : $\forall a, b \in G, \quad a * b \in G$

$$(G, *) \text{ est un } \mathbf{groupe} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall a, b, c \in G, & (a * b) * c = a * (b * c) \\ \exists e \in G, \quad \forall a \in G, & a * e = e * a = a \\ \forall a \in G, \quad \exists a' \in G, & a * a' = a' * a = e \end{cases}$$

Il s'agit de l'associativité, de l'existence d'un élément neutre, et de l'existence d'un symétrique pour tout élément.

Si, de plus la loi est commutative, le groupe est dit abélien ou commutatif.

Remarquons qu'un groupe est non vide... puisqu'il contient l'élément neutre.

1-2 Sous-groupe

$$\mathbf{Théorème :} \quad H \subset G \text{ est un } \mathbf{sous-groupe} \text{ de } (G, *) \Leftrightarrow \begin{cases} H \text{ est non vide} \\ \forall a, b \in H, \quad a * b' \in H \end{cases}$$

En pratique, il est bien plus facile de montrer qu'on a un sous-groupe d'un groupe connu plutôt qu'un groupe.

1-3 Morphisme de groupe

Définition : $f : (F, *) \rightarrow (G, \circ)$ est un **morphisme de groupe** $\Leftrightarrow \forall a, b \in F, \quad f(a * b) = f(a) \circ f(b)$

2 Formule du Binôme

2-1 Coefficients binomiaux

Définition : $C_n^k = C_n^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k \quad C_n^0 = C_n^n = 1 \quad C_n^1 = C_n^{n-1} = n \quad C_n^2 = C_n^{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

On notera bien que la notation C_n^k est de plus en plus remplacée par la notation : $\binom{n}{k}$. Remarquons l'inversion de n et k .

2-2 Formule du Binôme et autres

Théorème : $\forall a, b \in \mathbb{K}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}$

Théorème : $\forall a, b \in \mathbb{K}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad a^n - b^n = (a - b) \left(\sum_{k=1}^n a^{n-k} b^{k-1} \right)$

Théorème : $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$

3 Nombres Complexes

3-1 Nombres Complexes

$$z = x + iy = \rho e^{i\theta} \quad \bar{z} = x - iy = \rho e^{-i\theta} \quad \rho = |z| = |-z| = |\bar{z}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'} \quad \overline{z z'} = \bar{z} \bar{z'} \quad \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}} \quad |z|^2 = z \bar{z}$$

3-2 Racines d'un nombre complexe

a) Racines carrées

Théorème : $z^2 = a + ib$ avec $z = x + iy \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \text{signe}(xy) = \text{signe}(b) \end{cases}$

b) Racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité

Théorème : $z^n = 1 \Leftrightarrow z = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ avec $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$

c) Racines $n^{\text{èmes}}$ d'un nombre complexe

Théorème : $z^n = \rho e^{i\theta} \Leftrightarrow z = \sqrt[n]{\rho} e^{\frac{i\theta + 2ik\pi}{n}}$ avec $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$

Les racines $n^{\text{èmes}}$ d'un complexe s'obtiennent en effectuant le produit de l'une d'entre elles par les racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité.

4 Polynômes

4-1 Racines

Soit le polynôme : $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

Théorème : Sur $\mathbb{C}$, $P(x) = a_n (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$

Théorème : Sur $\mathbb{R}$, $P(x) = a_n (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_p)(x^2 + \alpha_1 x + \beta_1) \cdots (x^2 + \alpha_m x + \beta_m)$
avec $p + 2m = n$ et toutes les expressions du second degré irréductibles, c'est à dire $\Delta < 0$.

Quand on a tous les facteurs d'un polynôme, pour retrouver celui-ci, il ne faut pas oublier le coefficient dominant a_n .

Définition : Un polynôme est dit **scindé** si et seulement si il est factorisable en produit d'expressions du premier degré.

Sur $\mathbb{C}$ un polynôme est donc toujours scindé. Sur $\mathbb{R}$, il faut et il suffit qu'il n'ait pas de racines complexes non réelles.

Théorème : $P(x)$ est divisible par $(x - \alpha) \Leftrightarrow P(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha$ est racine de P

Théorème : $P(x)$ est divisible par $(x - \alpha)^k \Leftrightarrow P(\alpha) = P'(\alpha) = \dots = P^{(k-1)}(\alpha) = 0$
 $\Leftrightarrow \alpha$ est racine d'ordre k au moins de P

Théorème : Un polynôme de degré n qui a au moins $n + 1$ racines distinctes ou confondues est nul.

Théorème : Si P est scindé, $x_1 + x_2 + \dots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$, $x_1 x_2 \dots x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$

Pour le degré 2, $x^2 - Sx + P = 0$ est tel que : $S = x_1 + x_2$, et $P = x_1 x_2$
 S est la somme des racines et P leur produit.

4-2 Division Euclidienne

Théorème : Soit A et B deux polynômes, $B \neq 0$,

alors il existe un unique couple (Q, R) tel que
$$\begin{cases} A = BQ + R \\ \text{degré}(R) < \text{degré}(B) \end{cases}$$

En pratique, quand on écrit la division de A par B , on prendra soin de bien écrire les polynômes par puissances décroissantes.

$P|Q \Leftrightarrow$ Le reste de la division euclidienne de Q par P est nul
 $\Leftrightarrow$ Toutes les racines de P sont racines de Q avec au moins le même ordre de multiplicité.
 On pensera à cette dernière équivalence quand le degré de P est petit ...

5 Fractions Rationnelles

5-1 Décomposition en éléments simples

Théorème : $A = \frac{P}{Q}$ une fraction rationnelle irréductible avec $Q(x) = a(x - x_1)^{p_1} (x - x_2)^{p_2} \dots (x - x_n)^{p_n}$

Alors :
$$\frac{P(x)}{Q(x)} = E(x) + \sum_{k=1}^n \left(\sum_{l=1}^{p_k} \frac{A_{k,l}}{(x - x_k)^l} \right)$$

avec $E(x)$ le quotient de la division euclidienne de P par Q .

En pratique, sur les réels et les complexes,

- un terme en $(x - x_1)$ dans $Q(x)$ donne un terme en $\frac{A}{(x - x_1)}$,
- un terme en $(x - x_1)^2$ dans $Q(x)$ donne un terme en $\frac{A}{(x - x_1)} + \frac{B}{(x - x_1)^2}$ (première espèce).

Sur les réels,

- un terme en $(x^2 + \alpha_1 x + \beta_1)$ avec $(\Delta < 0)$ donne :
 - un terme en $\frac{A}{(x - x_1)} + \frac{\bar{A}}{(x - \bar{x}_1)}$
 - ou directement en $\frac{Cx + D}{(x^2 + \alpha_1 x + \beta_1)}$ (seconde espèce), avec C et D réels.

Exemple : On va donner un exemple de décomposition directe en éléments simples sur $\mathbb{R}$.

Soit : $\frac{2X + 1}{(X + 1)^2 (X^2 + X + 1)} = \frac{A}{X + 1} + \frac{B}{(X + 1)^2} + \frac{CX + D}{X^2 + X + 1}$ car $X^2 + X + 1$ n'a pas de racines réelles, ses racines sont j et $\bar{j}$.

Pour B , on multiplie par $(X + 1)^2$, on simplifie et on fait $X = -1$. Cela donne : $B = -1$.

Pour C et D , qu'on peut trouver en même temps, car la fraction rationnelle du départ est réelle, on multiplie par $X^2 + X + 1$, on simplifie et on fait $X = j$. Comme C et D sont réels, on a les deux.

$$Cj + D = \frac{2j + 1}{(j + 1)^2} = \frac{2j + 1}{(-j^2)^2} = \frac{2j + 1}{j} = 2 + j^2 = 2 - 1 - j = 1 - j, \text{ d'où : } C = -1 \text{ et } D = 1.$$

Pour A , on fait $X = 0$ ou bien on multiplie par X et on fait $X = +\infty$. Ce qui donne : $A + C = 0$ et donc : $A = 1$.

5-2 Conseils pratiques

Pour décomposer une fraction rationnelle en éléments simples, il faut :

- Factoriser $Q(x)$.
- Ecrire la forme générale de la décomposition, en n'oubliant pas la partie entière, qu'on calcule en faisant la division euclidienne
- Utiliser la parité-imparité qui réduit souvent beaucoup l'étude
- Terme de degré dominant :
 - multiplier par $(x - x_1)^{p_1}$, simplifier puis poser $x = x_1$
 - racine simple de première espèce : faire le précédent ou bien : $A = \frac{P(x_1)}{Q'(x_1)}$
- Résidu à l'infini : multiplier par x et calculer la limite quand $x \rightarrow \infty$
- Enfin, prendre une valeur ...

6 Espaces Vectoriels

6-1 Structure d'espace vectoriel

$$\text{Définition : } (E, +, \cdot) \text{ est un espace vectoriel sur } \mathbb{K} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (E, +) \text{ est un groupe commutatif} \\ \left\{ \begin{array}{l} \forall u, v \in E \\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v \\ (\lambda + \mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u \\ \lambda \cdot (\mu \cdot u) = \lambda \mu \cdot u \\ 1 \cdot u = u \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Définition : On appelle **vecteurs** les éléments de E et **scalaires** les éléments de $\mathbb{K}$.

Un espace vectoriel E possède une structure de groupe additif, l'élément neutre pour l'addition est le vecteur nul, noté 0_E ou simplement 0 . On prendra soin de ne pas le confondre avec le scalaire 0 ...

6-2 Sous-espace vectoriel

$$\text{Théorème : } F \subset E \text{ est un sous-espace vectoriel de } E \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} F \text{ est non vide} \\ \forall u, v \in F, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad (\lambda \cdot u + \mu \cdot v) \in F \end{array} \right.$$

C'est à dire F est non vide et stable par combinaison linéaire.

Ce théorème sert souvent pour montrer que F est un espace vectoriel en montrant qu'il est un sous-espace vectoriel d'un espace connu et identifié...

6-3 Somme de sous-espaces vectoriels

Définition : $E = E' + E'' \Leftrightarrow$ tout vecteur x de E est somme d'un vecteur x' de E' et d'un vecteur x'' de E''

On a la même définition pour la somme de plus de deux sous-espaces vectoriels.

Définition : $E = E' + E''$ est **directe** $\Leftrightarrow E' \cap E'' = \{0\} \Leftrightarrow$ les composantes x' et x'' de x sont uniques. La somme directe des deux sous-espaces est alors notée $E' \oplus E''$.

Définition : On dit que les sous-espaces sont **supplémentaires** $\Leftrightarrow E = E' \oplus E''$

6-4 Norme sur un espace vectoriel

$$\text{Définition : } \left\{ \begin{array}{l} E \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ u \mapsto \|u\| \end{array} \right. \text{ est une norme } \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \forall u, v \in E, \quad \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| \text{ (inégalité triangulaire)} \\ \forall u \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \|\lambda \cdot u\| = |\lambda| \|u\| \text{ (positive homogénéité)} \\ \forall u \in E, \quad \|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0 \text{ (séparation)} \end{array} \right.$$

6-5 Espaces vectoriels de dimension finie : base

Définition : $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est **génératrice** de $E \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in E, \exists \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}, \\ x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n \end{cases}$

Définition : $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est **libre** de $E \Leftrightarrow (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0)$

Définition : Une **base** est une famille libre et génératrice.

Définition : Un espace vectoriel est dit de **dimension finie** $\Leftrightarrow$ il possède une base comptant un nombre fini de vecteurs. Sa dimension est alors le nombre de vecteurs de cette base.

Théorème : Toutes les bases de E ont le même nombre de vecteurs qui est, par définition, la dimension de E .

Théorème : Si E est de dimension n :

$(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est une base $\Leftrightarrow (x_1, x_2, \dots, x_n)$ libre $\Leftrightarrow (x_1, x_2, \dots, x_n)$ génératrice

Définition : Le **rang** d'une famille de vecteurs est la dimension de l'espace vectoriel engendré par ces vecteurs.

Théorème : $E = E' \oplus E'' \Leftrightarrow \begin{cases} E', E'' \text{ deux sous-espaces vectoriels de } E \\ \dim(E) = \dim(E') + \dim(E'') \\ E' \cap E'' = \{0\} \end{cases}$

Remarquons qu'on peut remplacer la condition $E' \cap E'' = \{0\}$ par $E = E' + E''$

6-6 Espaces vectoriels usuels

- $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$ sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$, de dimension infinie.
- $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathbb{C}_n[X]$ sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$, de dimension $n + 1$.
- $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$ sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$, de dimension n .
- $\mathcal{A}(A, E)$ avec A non vide et E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.
- $\mathcal{C}^k(A, \mathbb{R})$ avec A non vide et $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
- $\text{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est le plus petit sous-espace vectoriel de l'espace dans lequel se trouvent les vecteurs $x_1, x_2, \dots, x_n$.
On l'appelle l'espace vectoriel engendré par $x_1, x_2, \dots, x_n$.
Il est de dimension n si et seulement si ces vecteurs forment une famille libre.
- $\mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{L}(E)$ les ensembles d'applications linéaires de E dans F ou de E dans E .
- $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ les ensembles de matrices n lignes, p colonnes ou carrées $n \times n$, de dimensions respectives np et n^2 .

7 Applications Linéaires

7-1 Applications linéaires

Définition : $f : E \rightarrow F$, avec E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ est **linéaire**, ou est un **morphisme**, ou encore un **homomorphisme** $\Leftrightarrow \begin{cases} \forall u, v \in E \\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} \end{cases} f(\lambda.u + \mu.v) = \lambda.f(u) + \mu.f(v)$

$f : E \rightarrow E$, linéaire est un **endomorphisme**

$f : E \rightarrow F$, linéaire bijective est un **isomorphisme**

$f : E \rightarrow E$, linéaire bijective est un **automorphisme**

$f : E \rightarrow \mathbb{K}$, linéaire est une **forme linéaire**. $\mathbb{K}$ est ici considéré comme un espace vectoriel sur lui-même.

Théorème : $\mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{L}(E)$ sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.

Si E et F sont de dimension finies n et p , la dimension de $\mathcal{L}(E, F)$ est $n \times p$ et celle de $\mathcal{L}(E)$ est n^2

7-2 Image et noyau

Définition : Le **noyau** de f , linéaire, est : $\ker(f) = \{u \in E, f(u) = 0\}$.

Définition : L'**image** de f , linéaire, est : $\text{Im}(f) = \{v \in F, \exists u \in E, v = f(u)\}$.

Théorème : $\left. \begin{array}{l} \text{L'image d'un s.e.v de } E \\ \text{L'image de } E \end{array} \right\} \text{ par } f : E \rightarrow F, \text{ linéaire, est un sous-espace vectoriel de } F.$

Théorème : L'image réciproque d'un s.e.v de F par $f : E \rightarrow F$, linéaire, est un sous-espace vectoriel de E .

Théorème : Le noyau de $f : E \rightarrow F$, linéaire, est un sous-espace vectoriel de E .

Théorème : $f : E \rightarrow F$, linéaire, est injective $\Leftrightarrow \ker(f) = \{0\}$

En dimension finie, des bases étant choisies,

- on recherche le noyau en résolvant un système linéaire sans second membre, la dimension du noyau est la dimension de l'espace de départ moins le rang du système, c'est aussi le nombre d'inconnues auxiliaires. On obtient une base du noyau en distribuant tour à tour un 1 et des 0 sur les inconnues auxiliaires.
- on recherche l'image en écrivant que les images des vecteurs de la base forment une famille génératrice de l'image, puis en otant les vecteurs inutiles de cette famille.

7-3 Projecteur

Définition : $p : E \rightarrow E$ est un **projecteur** $\Leftrightarrow p \circ p = p$

Théorème : $p : E \rightarrow E$ est un projecteur $\Rightarrow E = \text{Im}(p) \oplus \text{Ker}(p)$,
mais ceci n'est pas une équivalence.

$E = E_1 \oplus E_2$ permet de définir p la projection sur E_1 , parallèlement à E_2 et q la projection sur E_2 , parallèlement à E_1 .
On a alors $p + q = Id$.

7-4 Théorème du rang

Définition : $f : E \rightarrow F$, linéaire, avec E de dimension finie,
le **rang de f** est $\text{rg}(f) = \dim(f(E)) = \dim(\text{Im}(f))$.

Théorème : $f : E \rightarrow F$, linéaire, avec E de dimension finie $\Rightarrow \dim(E) = \dim(\ker(f)) + \text{rg}(f)$

Théorème : $\dim(\mathcal{L}(E, F)) = \dim(E) \times \dim(F)$ et $\dim(\mathcal{L}(E)) = \dim(E)^2$

Théorème : Si $\dim(E) = \dim(F)$ alors $\left\{ \begin{array}{l} f \text{ bijective} \\ \Leftrightarrow \ker(f) = \{0\} \\ \Leftrightarrow \text{Im}(f) = F \\ \Leftrightarrow f \text{ injective} \\ \Leftrightarrow f \text{ surjective} \\ \Leftrightarrow f \text{ transforme une base de } E \text{ en une base de } F \\ \Leftrightarrow f \text{ transforme toute base de } E \text{ en une base de } F \end{array} \right.$

7-5 Système linéaire

Pour résoudre un système linéaire de n équations à p inconnues :

- On rend le système trapézoïdal en appliquant la méthode du pivot de Gauss
- S'il y a des paramètres, on ne discute que lorsqu'on y est obligé pour appliquer le pivot de Gauss, au besoin en changeant l'ordre des lignes ou des colonnes.
 - On connaît à ce moment le rang du système : c'est le nombre d'équations linéaires indépendantes. Si le système est sans second membre, l'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension le nombre d'inconnues moins le rang.
 - On voit à ce moment si le système est incompatible.
 - S'il est compatible, le rang du système est le nombre d'équations restantes
 - ◊ Si on a, à ce moment, autant d'équations que d'inconnues : le système a une solution unique
 - ◊ Si on a, à ce moment, moins d'équations que d'inconnues, on garde autant d'inconnues principales que le rang. Les autres deviennent des inconnues auxiliaires, qui se traitent comme des paramètres.

8 Matrices

8-1 Généralités

a) Matrices symétriques et antisymétriques

Définition : Une matrice carré M est symétrique $\Leftrightarrow {}^tM = M \Leftrightarrow a_{ji} = a_{ij}$

Définition : Une matrice carré M est anti-symétrique $\Leftrightarrow {}^tM = -M \Leftrightarrow a_{ji} = -a_{ij}$

Théorème : Le sous-espace vectoriel des matrices symétriques et le sous-espace vectoriel des matrices antisymétriques sont supplémentaires.

De plus : $M_S = \frac{M + {}^tM}{2}$ et $M_A = \frac{M - {}^tM}{2}$

b) Produit de matrices

Si A est une matrice n -lignes et m -colonnes, B une matrice m -lignes et p -colonnes,

alors : $C = AB$ est une matrice n -lignes et p -colonnes vérifiant : $c_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kj}$.

Ce qui se schématise :
$$\left(\begin{array}{ccc} \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{im} \\ \dots & \dots & \dots \end{array} \right) \times \left(\begin{array}{c|c|c} \vdots & b_{1j} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & b_{mj} & \vdots \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc} & \vdots & \\ \dots & c_{ij} & \dots \\ & \vdots & \end{array} \right)$$

c) Produit de matrices définies par blocs

Si deux matrices sont définies par blocs, on peut parfois effectuer leur produit en travaillant par blocs. C'est à dire :

$$\left(\begin{array}{cc} (A) & (B) \\ (C) & (D) \end{array} \right) \times \left(\begin{array}{cc} (A') & (B') \\ (C') & (D') \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} (A) \times (A') + (B) \times (C') & (A) \times (B') + (B) \times (D') \\ (C) \times (A') + (D) \times (C') & (C) \times (B') + (D) \times (D') \end{array} \right)$$

Les dimensions des matrices doivent être compatibles, à savoir :

- Le nombre de **colonnes** de A et C doit être le nombre de **lignes** de A' et B' .
- Le nombre de **colonnes** de B et D doit être le nombre de **lignes** de C' et D' .

D'autre part, rappelons que le produit de matrices n'est pas commutatif, l'ordre dans lequel on écrit ces produits est donc fondamental...

d) Transposée d'un produit

Théorème : On a : ${}^t(AB) = {}^tB {}^tA$

8-2 Généralités sur les matrices carrées

a) Inverse d'une matrice

Théorème : Si on a M une matrice carrée telle que : $M M' = I_n$, ou telle que : $M' M = I_n$, alors M est inversible et $M^{-1} = M'$.

Théorème : Une matrice carrée est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.

En général, on inverse une matrice carrée en inversant le système linéaire correspondant avec un second membre arbitraire : $Y = MX \Leftrightarrow X = M^{-1}Y$

Cependant, parfois, quand la question est plus théorique, on peut utiliser le théorème suivant :

Théorème : M , une matrice inversible, Δ son déterminant et Δ_{ij} le déterminant obtenu en enlevant la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne, alors :

$$M^{-1} = \frac{1}{\Delta} \times \text{transposée de } \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \dots & (-1)^{i+j} \Delta_{ij} & \dots \\ & \vdots & \end{pmatrix}$$

b) Inverse d'un produit

Théorème : On a : $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

8-3 Matrice d'une application linéaire

Définition : $f : E \rightarrow F$, linéaire, avec E et F de dimensions finies n et p , munis de bases $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}_F = (e'_1, \dots, e'_p)$, on appelle **matrice de f dans ces bases** $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}$ la matrice p lignes et n colonnes dont

l'élément $a_{i,j}$, $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne est tel que $f(e_j) = \sum_{i=1}^p a_{i,j} e'_i$.

On a en colonnes, les coordonnées des images des vecteurs de la base de E écrits dans la base de F .

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{p,1} & \dots & a_{p,j} & \dots & a_{p,n} \end{pmatrix} \begin{matrix} e'_1 \\ \vdots \\ e'_i \\ \vdots \\ e'_p \end{matrix}$$
$$f(e_1) \quad \dots \quad f(e_j) \quad \dots \quad f(e_n)$$

8-4 Matrice de Passage

Définition : On appelle **matrice de passage** ou $P_{\mathcal{B}_1 \mathcal{B}_2}$ la matrice constituée en colonnes des coordonnées des vecteurs de la nouvelle base $\mathcal{B}_2$ écrits dans l'ancienne $\mathcal{B}_1$. On l'appelle aussi **matrice de changement de base**.

C'est donc une matrice inversible.

Toute matrice carrée inversible peut toujours s'interpréter

- comme matrice d'un endomorphisme dans une certaine base,
- ou comme matrice de changement de base.

Passer d'une interprétation à une autre permet parfois de faire avancer le problème.

8-5 Changements de base

Théorème : Si on appelle X et X' les vecteurs colonnes, coordonnées d'un vecteur dans l'ancienne et la nouvelle base, et P la matrice de passage, on a $X = PX'$ ou bien $X' = P^{-1}X$.

Théorème : Si on appelle M et M' les matrices d'un endomorphisme dans l'ancienne et la nouvelle base, et P la matrice de passage, on a $M' = P^{-1}MP$ ou bien $M = PM'P^{-1}$.

Définition : M et M' sont semblables $\Leftrightarrow \exists P$ inversible telle que $M' = P^{-1}MP \Leftrightarrow$ ce sont les matrices d'un même endomorphisme dans deux bases différentes.

9 Déterminants

9-1 Ordre 2 et 3

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$\begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} \text{ peut se développer par la règle de Sarrus } \searrow + \searrow + \searrow - \nearrow - \nearrow - \nearrow$$

La règle de Sarrus n'est absolument pas généralisable à des ordres supérieurs !

9-2 Matrice triangulaire

Théorème : Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses éléments diagonaux.

9-3 Ordre quelconque

La règle des signes est :

$$\begin{vmatrix} + & - & + & & \cdots & \cdots \\ - & + & - & & & \\ + & - & + & & & \\ & & & + & & \\ \vdots & & & & \ddots & \\ \vdots & & & & & \ddots \\ & & & & & & + & - \\ & & & & & & - & + \end{vmatrix}$$

On développe suivant une ligne ou une colonne en tenant compte de la règle de signes, on a ainsi une somme de termes du type : $(-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij}$, où a_{ij} est le coefficient de la matrice et Δ_{ij} est le déterminant d'ordre $n-1$ obtenu en enlevant la ligne i et la colonne j correspondante.

Théorème : $\Delta = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij} = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij}$

9-4 Déterminant d'un produit, d'une matrice inversible

Théorème : Pour A d'ordre n , A inversible $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0 \Leftrightarrow \text{rg}(A) = n$

Théorème : $\det(AB) = \det(A) \det(B)$, et si A est inversible, $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

9-5 Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs

Théorème : $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}), C \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K}), O \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}), O$ est la matrice nulle de $\mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ et $p + q = n$. Alors,

$$\begin{vmatrix} A & B \\ O & C \end{vmatrix} = \det(A) \times \det(C)$$

Cette propriété **ne se généralise pas** au déterminant d'une matrice définie par blocs et non triangulaire par blocs.

10 Réduction des Endomorphismes

10-1 Valeurs propres et vecteurs propres

Définition : $f : E \rightarrow E$ linéaire,

un couple (λ, u) ($u \neq 0$) est un **couple valeur propre, vecteur propre** de $E \Leftrightarrow f(u) = \lambda.u$

Définition : Pour λ une valeur propre de E , on appelle **sous-espace propre** associé à λ ,

$$E_\lambda = \{u / f(u) = \lambda.u\} = \ker(f - \lambda Id_E)$$

C'est clairement un sous-espace vectoriel de E .

Le noyau est donc aussi le sous-espace propre associé à la valeur propre 0.

Théorème : Les sous-espaces propres sont toujours en somme directe. Une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres **distinctes** est libre.

10-2 Polynôme caractéristique

Définition : f un endomorphisme de E de dimension n , A sa matrice dans une base quelconque, le **polynôme caractéristique** de f est : $P_f(\lambda) = P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$.

Théorème : Le polynôme caractéristique de f est indépendant de la base choisie. Les racines du polynôme caractéristique de f sont les valeurs propres de f .

Sur $\mathbb{C}$, le polynôme caractéristique est toujours scindé. Il y a donc toujours n valeurs propres distinctes ou confondues.

Sur $\mathbb{R}$, ça n'est pas toujours le cas... Le polynôme caractéristique peut avoir des racines complexes non réelles.

Théorème : λ une valeur propre de f , alors : $1 \leq \dim(E_\lambda) \leq$ ordre de multiplicité de λ comme racine de P_f

10-3 Diagonalisabilité

Définition : Un endomorphisme est **diagonalisable** $\Leftrightarrow$ il existe une base de vecteurs propres

Théorème : A (ou $f...$) diagonalisable $\Leftrightarrow \begin{cases} P_A(\lambda) \text{ est scindé} \\ \dim(E_\lambda) = \text{ordre de multiplicité de } \lambda \text{ dans } P_A \end{cases}$

En particulier, lorsque $P_A(\lambda)$ est scindé à racines simples, A (ou $f...$) est diagonalisable. (condition suffisante non nécessaire)

10-4 Diagonalisabilité et diagonalisation

Quand une matrice A est **diagonalisable**, une erreur courante est de dire que, dans une certaine base, A est diagonale, ce qui est bien sûr grossièrement faux et même stupide.

On a simplement une matrice de passage P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$ ou bien $D = P^{-1}AP$.

La confusion provient de ce que A et D sont les matrices d'un **même** endomorphisme dans deux bases différentes...

Il est par contre exact de dire que si un endomorphisme f est diagonalisable, et s'il est de matrice A dans la base $\mathcal{B}$, il existe une base $\mathcal{B}'$ dans laquelle sa matrice est D , diagonale.

P étant la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$, on a alors : $A = PDP^{-1}$ et $D = P^{-1}AP$.

10-5 Triangularisation

Théorème : Si le polynôme caractéristique est scindé, il existe une base où la matrice est triangulaire.

En particulier, sur $\mathbb{C}$, toute matrice est triangularisable.

10-6 Puissances d'une matrice

On fera attention, par convention : $B^0 = I_n$, la matrice identité.

- Si A est diagonalisable, et D diagonale semblable à A , alors $A = PDP^{-1}$ et $A^k = PD^kP^{-1}$.
- Si $A = B + C$, avec $BC = CB$, ce qu'il faut impérativement vérifier, alors : $A^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} B^k C^{p-k}$

Ceci est surtout utilisé lorsque B^2 ou B^3 est nulle, car alors la somme se réduit aux premiers termes.

- Si $A^2 = \alpha A + \beta I$ alors $A^n = \alpha_n A + \beta_n I$ et on peut chercher des relations de récurrence entre les coefficients en écrivant A^{n+1} de deux façons : $A^{n+1} = A^n \times A$.

11 Espaces Préhilbertiens Réels et Euclidiens

11-1 Produit scalaire

Définition : Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$,

une **forme bilinéaire symétrique** sur E est une application de $E \times E \rightarrow \mathbb{R}$

- linéaire par rapport à chacune des variables (l'autre étant fixée) et
- symétrique (on peut inverser l'ordre des variables).

Définition : Une **forme quadratique** sur $\mathbb{R}^n$ est une application de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ qui se met sous la forme d'un polynôme homogène de degré 2 des coordonnées du vecteur de $\mathbb{R}^n$.

Théorème : Si φ est une forme bilinéaire symétrique sur E , alors : $q : \begin{cases} E \rightarrow \mathbb{R} \\ u \mapsto q(u) = \varphi(u, u) \end{cases}$ est une forme quadratique, appelée **forme quadratique associée** à φ .

Par ailleurs, si q est une forme quadratique sur E , alors $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi(u, v) = \frac{q(u+v) - q(u) - q(v)}{2}$$

est une forme bilinéaire symétrique. C'est la **forme polaire** de q .

Définition : E un espace vectoriel réel.

Un **produit scalaire** est une application de $E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ bilinéaire, symétrique, définie-positive.

En pratique, on montre :

- $\forall u, v \in E, \quad \langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$. La forme est symétrique
- $\left. \begin{array}{l} \forall u_1, u_2, v \in E \\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \langle \lambda.u_1 + \mu.u_2, v \rangle = \lambda \langle u_1, v \rangle + \mu \langle u_2, v \rangle$. La forme est donc bilinéaire symétrique
- $\forall u, \in E, \quad \langle u, u \rangle \geq 0$. La forme est positive
- $\langle u, u \rangle = 0 \Rightarrow u = 0$. La forme est définie-positive

C'est souvent le dernier point qui pose problème.

Quand le produit scalaire est défini par une intégrale, c'est à ce moment qu'on utilise le théorème des 3 conditions.

Théorème : E étant muni d'une base $(e_1, \dots, e_n)$,

On note : $U : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $V : \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ les vecteurs colonnes des coordonnées de u et v dans la base,

On note A , la matrice symétrique où $a_{i,j} = \langle e_i, e_j \rangle$, alors :

$$\langle u, v \rangle = {}^t U A V$$

A est ainsi la **matrice de la forme bilinéaire symétrique**, encore appelée **matrice du produit scalaire** dans la base $(e_1, \dots, e_n)$.

Si, de plus, la base est orthonormale, alors on a :

$$\langle u, v \rangle = {}^t U V = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

Définition : La **norme euclidienne** est : $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$

Exemple : Sur les matrices carrées, le produit scalaire usuel est : $\langle A, B \rangle = \text{trace}({}^t A B) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} b_{i,j}$

11-2 Espaces vectoriels préhilbertiens et euclidiens

Définition : Un espace vectoriel réel est dit **préhilbertien réel** quand il est muni d'un produit scalaire. Si, de plus, il est de dimension finie, il est dit **euclidien**.

11-3 Inégalités

Théorème : On a l'inégalité de Schwarz : $\forall u, v \in E, |\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$.

Théorème : On a l'inégalité triangulaire : $\forall u, v \in E, \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

11-4 Endomorphismes symétriques

Définition : Un endomorphisme f est dit **symétrique** $\Leftrightarrow \forall u, v \in E, \langle f(u), v \rangle = \langle v, f(u) \rangle$

Théorème : f est symétrique $\Leftrightarrow$ sa matrice dans une base orthonormale est symétrique.

11-5 Matrice symétrique réelle

Théorème : Une matrice symétrique réelle est diagonalisable dans une base orthonormale, c'est à dire avec **au besoin** une matrice de passage orthogonale, telle que : $P^{-1} = {}^t P$.

Les sous-espaces propres ainsi que les vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux 2 à 2.

11-6 Procédé de Schmidt

Théorème : Tout espace vectoriel euclidien possède une base orthonormale.

Le procédé de Schmidt permet de construire effectivement une base orthonormale à partir d'une base quelconque.

- On part d'une base quelconque $(e_1, e_2, \dots, e_n)$
- On pose $\varepsilon_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}$ C'est le premier vecteur de la base orthonormale.
- On pose $\varepsilon_2^* = e_2 + \lambda \cdot \varepsilon_1$ On cherche λ tel que $\langle \varepsilon_2^*, \varepsilon_1 \rangle = 0$, ce qui donne : $\lambda = -\langle e_2, \varepsilon_1 \rangle$
- On pose $\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_2^*}{\|\varepsilon_2^*\|}$ C'est le deuxième vecteur de la base orthonormale.
- On pose $\varepsilon_3^* = e_3 + \lambda \cdot \varepsilon_1 + \mu \cdot \varepsilon_2$ On cherche λ et μ tel que $\begin{cases} \langle \varepsilon_3^*, \varepsilon_1 \rangle = 0 \\ \langle \varepsilon_3^*, \varepsilon_2 \rangle = 0 \end{cases}$, d'où : $\begin{cases} \lambda = -\langle e_3, \varepsilon_1 \rangle \\ \mu = -\langle e_3, \varepsilon_2 \rangle \end{cases}$
- On pose $\varepsilon_3 = \frac{\varepsilon_3^*}{\|\varepsilon_3^*\|}$ C'est le troisième vecteur de la base orthonormale.
- On continue ainsi en n'oubliant pas que chaque étape s'allonge...

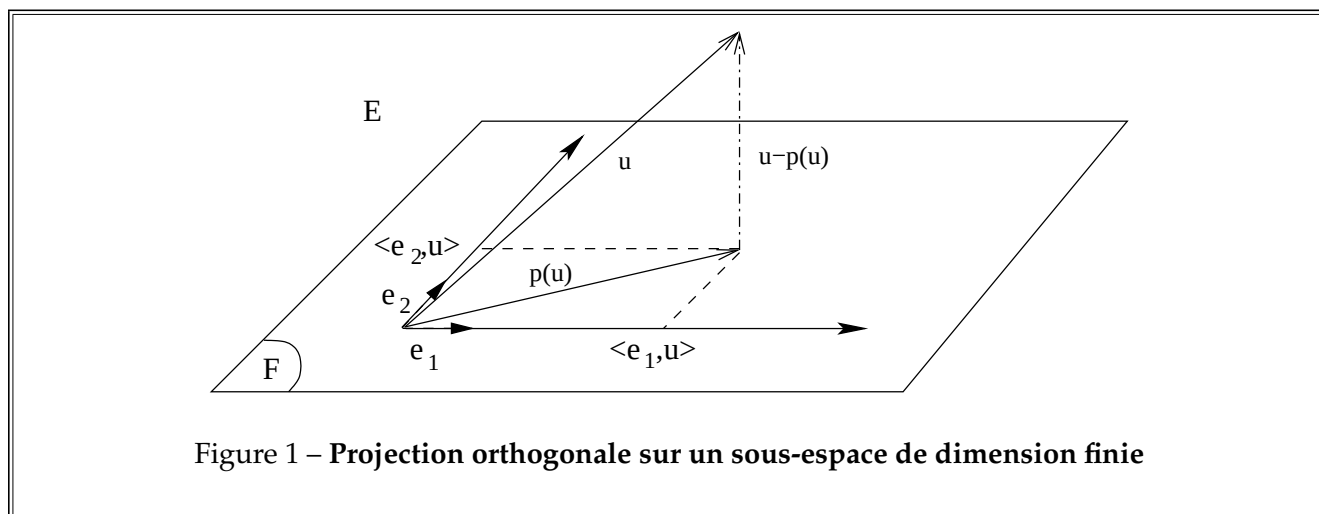
11-7 Projection orthogonale sur un sous espace de dimension finie

Théorème : E un espace vectoriel préhilbertien, F un sous espace vectoriel de dimension finie muni d'une base orthonormale $(e_1, e_2, \dots, e_n)$. Alors

$$p : u \rightarrow p(u) = \langle u, e_1 \rangle \cdot e_1 + \dots + \langle u, e_n \rangle \cdot e_n$$

définit un projecteur. Et comme $(u - p(u)) \in F^\perp$, on dit que p est la projection orthogonale sur F .

Ce qu'on peut voir sur la figure 1, ci-dessous.



12 Groupe Linéaire et Groupe Orthogonal

12-1 Groupe linéaire

Théorème : E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel. L'ensemble des isomorphismes de E , muni de la loi $\circ$ de composition des applications est un groupe, appelé groupe linéaire de E et noté $GL(E)$.

Notation : Si $E = \mathbb{R}^n$ ou $E = \mathbb{C}^n$, le groupe linéaire de E se note GL_n . La loi est alors le produit des matrices.

12-2 Groupe orthogonal

Définition : Un endomorphisme f de E un espace vectoriel réel, est dit **orthogonal**

$\Leftrightarrow f$ conserve le produit scalaire

$\Leftrightarrow \forall u, v \in E, \quad \langle f(u), f(v) \rangle = \langle u, v \rangle$

Théorème : f est orthogonal $\Leftrightarrow f$ conserve la norme
 $\Leftrightarrow \forall u \in E, \|f(u)\| = \|u\|$

Définition : Une matrice M est **orthogonale** $\Leftrightarrow M$ est la matrice d'un endomorphisme orthogonal dans une base orthonormale.

Théorème : M est orthogonale $\Leftrightarrow$ les vecteurs colonnes de M sont normés et orthogonaux 2 à 2
 $\Leftrightarrow$ les vecteurs lignes de M sont normés et orthogonaux 2 à 2
 $\Leftrightarrow M^{-1} = {}^tM$
 $\Leftrightarrow M {}^tM = I$
 $\Leftrightarrow {}^tM M = I$

Théorème : L'ensemble des endomorphismes orthogonaux de E , muni de la loi $\circ$ de composition des applications est un groupe noté $O(E)$, sous groupe de $GL(E)$.

Notation : Si $E = \mathbb{R}^n$, le groupe orthogonal de E se note $O(n)$ La loi est alors le produit des matrices.

13 Structure d'Algèbre

13-1 Algèbre

Une algèbre est un ensemble muni de trois lois.

Les deux premières lui confèrent la structure d'espace vectoriel. La troisième loi est une loi de composition interne appelée **produit**. Cette loi est associative, possède un élément neutre, et est distributive par rapport à l'addition.

Enfin, les deux « produits » sont « compatibles ».

13-2 Sous-algèbre

On montre le plus souvent qu'on a une sous-algèbre d'une algèbre connue plutôt que de montrer qu'on a une algèbre directement.

Théorème : $F \subset E$ est une **sous-algèbre** de $E \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \in F \\ \forall u, v \in F, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, (\lambda.u + \mu.v) \in F \\ \forall u, v \in F, u \times v \in F \end{cases}$

C'est à dire, F contient l'identité, est stable par combinaison linéaire et par produit.

13-3 Algèbres usuelles

- $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$ sont des algèbres sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.
- $\mathcal{C}^k(A, \mathbb{R})$ avec A non vide et $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ est une algèbre sur $\mathbb{R}$.
- $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans E .
 La loi de composition interne, c'est à dire le « produit », étant ici la composition « $\circ$ » des applications.
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensembles des matrices carrées $n \times n$

Analyse

14 Suites

14-1 Suites

Définition : $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **converge** vers $l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists p \in \mathbb{N}, \forall n \geq p, |u_n - l| \leq \varepsilon$

Théorème : La limite l , quand elle existe, est unique.

Cette définition est valable pour une suite réelle ou complexe.
Dans le cas d'une suite vectorielle, il suffit de remplacer $|u_n - l|$ par $\|u_n - l\|$.

Théorème : L'ensemble des suites muni de la somme de deux suites et de la multiplication par un scalaire a une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Il en est de même de l'ensemble des suites convergentes.

14-2 Sous-suites

Définition :

$(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une **sous-suite** de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \Leftrightarrow \exists \varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(v_n) = (u_{\varphi(n)})$

Théorème : $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $l \Rightarrow$ toute sous-suite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l
Si deux sous-suites ont des limites différentes ou si une sous-suite diverge, la suite diverge.

Théorème : Une suite convergente est bornée.

Théorème : Quand $n \rightarrow +\infty$,

$$\left. \begin{array}{l} u_n \rightarrow l \\ v_n \rightarrow l' \\ \lambda \in \mathbb{K} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u_n + v_n \rightarrow l + l' \\ u_n v_n \rightarrow l l' \\ \lambda u_n \rightarrow \lambda l \end{array} \right.$$

14-3 Suites vectorielles

Théorème : On a $u_n = (u_{1n}, u_{2n}, \dots, u_{pn})$ et $l = (l_1, l_2, \dots, l_p)$, alors $u_n \rightarrow l \Leftrightarrow \begin{cases} u_{1n} \rightarrow l_1 \\ u_{2n} \rightarrow l_2 \\ \vdots \\ u_{pn} \rightarrow l_p \end{cases}$

14-4 Suites réelles ou complexes

Définition : Deux suites sont **équivalentes** $\Leftrightarrow u_n = v_n w_n$ avec $w_n \rightarrow 1$.
En pratique, si à partir d'un certain rang $v_n \neq 0$, cela revient à $\frac{u_n}{v_n} \rightarrow 1$.

Théorème : La suite (u_n) converge $\Leftrightarrow$ La série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge

14-5 Suites réelles

Théorème : Toute suite croissante majorée converge.

Théorème : Toute suite décroissante minorée converge.

Théorème : (suites **adjacentes**)
$$\left. \begin{array}{l} (u_n) \nearrow \\ (v_n) \searrow \\ (u_n - v_n) \rightarrow 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (u_n) \text{ et } (v_n) \text{ convergent vers la même limite}$$

14-6 Suites définies par une relation de récurrence

On a $u_0 \in D_f$, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ et si $u_n \in D_f$, $u_{n+1} \in D_f$

Il y a principalement deux méthodes distinctes. La première est la plus pratique, souvent on y est un peu guidé par l'énoncé. La seconde est plus fastidieuse...

a) Premier procédé

Il est basé sur l'inégalité des accroissements finis.

Si, sur un intervalle I stable par f , l un point fixe, et $|f'(x)| \leq k < 1$, on montre que $|u_{n+1} - l| \leq k |u_n - l|$ et donc par récurrence immédiate, que $|u_n - l| \leq k^n |u_0 - l|$ ce qui assure la convergence.

b) Second procédé

- On étudie les variations de f , on résout $f(x) = x$: ce sont les limites éventuelles de (u_n) , les points fixes de f .
- On traite à part les suites où u_0 (ou $u_1 \dots$) est fixe
- On cherche des intervalles I en se servant des points fixes de f (et en les excluant) tels que
 - f continue et **monotone** sur I
 - $f(I) \subset I$
 - u_0 ou u_1 ou $u_k \in I$
- On a alors deux cas selon que f est croissante ou décroissante sur I
 - Si f est croissante sur I
Alors (u_n) est monotone (croissante ou décroissante) et
 - ◊ converge vers le premier point fixe sur son chemin s'il y en a un,
 - ◊ diverge sinon.
 - Si f est décroissante sur I
Alors (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones (croissante et décroissante respectivement) et convergent vers le premier point fixe de $f \circ f$ sur leur chemin s'il y en a un, divergent sinon. (il suffit de le faire pour une des deux seulement).
Il suffit alors de regarder si ce point fixe est fixe de f ou non.

14-7 Suites récurrentes linéaires

Il s'agit, comme dans toute « équation linéaire », d'ajouter une solution particulière du problème avec second membre à la solution générale du problème sans second membre.

a) Suite récurrente linéaire simple

- $au_{n+1} + bu_n = 0$ La solution est géométrique $u_n = \alpha \left(\frac{-b}{a}\right)^n$
- $au_{n+1} + bu_n = c$ Chercher une solution particulière sous forme de suite constante

b) Suite récurrente linéaire double

- $au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$ On calcule les solutions de l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$
 - 2 racines distinctes r_1 et r_2 : $u_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$
 - 1 racine double r : $u_n = \alpha r^n + \beta n r^n$
 - sur $\mathbb{R}$, 2 racines complexes $r = s e^{\pm i\omega}$: $u_n = s^n (\alpha \cos n\omega + \beta \sin n\omega)$
- $au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = d$ Chercher une solution particulière
 - constante γ
 - ou, en cas d'échec, γn
 - ou, en cas de nouvel échec, γn^2

15 Fonctions $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

15-1 Ensemble de définition

L'**ensemble de définition** de f est l'ensemble des valeurs de x telles qu'on puisse effectivement calculer $f(x)$. Pour cela, on regarde les dénominateurs, racines, quotients, logarithmes, tangentes...

Le problème est plus complexe pour une fonction définie par une intégrale $\int_{a(x)}^{b(x)} f(t) dt$ ou $\int_a^b f(x,t) dt$.

De plus, si l'intégrale est généralisée, il faut même chercher les x tels que l'intégrale converge...

15-2 Monotonie

Définition : f est **croissante** sur I un intervalle $\Leftrightarrow (a < b \Rightarrow f(a) \leq f(b))$

f est **strictement croissante** sur I un intervalle $\Leftrightarrow (a < b \Rightarrow f(a) < f(b))$

Théorème : f est dérivable sur I , un **intervalle**,

f est **croissante** sur $I \Leftrightarrow f'(x) \geq 0$ sur I

Théorème : f dérivable sur I , un **intervalle**,

$f'(x) \geq 0$ sur I et f' ne s'annule qu'en des points isolés, $\Rightarrow f$ est strictement croissante sur I .

Cette dernière implication n'est pas une équivalence...

Théorème : Une fonction croissante, majorée sur $[a, b]$, admet une limite finie en b .

Théorème : f continue, strictement monotone sur I un intervalle est une bijection de I sur $f(I)$.

De plus, f^{-1} est alors continue sur $f(I)$.

15-3 Limite et continuité

Définition : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, |x - a| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon$

Si, de plus, $l = f(a)$, on dit que f est **continue** en a .

Si ceci est vrai pour tout point a d'un intervalle I , on dit que f est **continue sur I** .

Théorème : Une somme, un produit, une combinaison linéaire, une composée, un quotient (quand ils sont définis...) de fonctions continues en un point ou sur un intervalle sont continues en ce point ou sur cet intervalle.

Théorème : $f(I)$ l'image d'un intervalle I par f continue sur I est un intervalle.

Théorème : L'image d'un segment $[a, b]$ par f continue sur $[a, b]$ est un segment $[c, d]$.

Une application continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

15-4 Limites usuelles

Les limites usuelles permettent de résoudre de nombreuses formes indéterminées.

On se reportera aussi, bien sûr, aux développements limités usuels ...

a) Limites en 0

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$$

b) Limites en $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} = 0$$

c) Croissances comparées

Les limites suivantes sont connues sous le nom de théorème des croissances comparées.

On a ici α et β **strictement positifs**.

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha \ln^\beta x = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^\alpha x}{x^\beta} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\alpha x}}{x^\beta} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha e^{-\beta x} = 0$$

15-5 Equivalents

Définition : On dit que : $f(t) \underset{t \rightarrow a}{\sim} g(t) \Leftrightarrow f(t) = g(t)(1 + \varepsilon(t))$ avec $\lim_{t \rightarrow a} \varepsilon(t) = 0$

Les équivalents ne s'ajoutent pas.

Quand on veut trouver un équivalent, le mieux est de mettre « de force » l'équivalent pressenti en facteur et de montrer que l'autre facteur tend vers 1.

On revient ainsi, sans risque, à la définition.

16 Dérivabilité

Définition : f est **dérivable** en $a \Leftrightarrow \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ a une limite finie quand x tend vers a .
C'est cette limite qu'on note $f'(a)$.

Théorème : f dérivable en $a \Rightarrow f$ est continue en a . La réciproque est fausse!

16-1 Sommes et produits de fonctions dérivables

Théorème : f et g dérivables en un point ou sur un intervalle $\Rightarrow$
$$\begin{cases} (f + g)' = f' + g' \\ (f \times g)' = f' \times g + f \times g' \\ \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \times g - f \times g'}{g^2} \end{cases}$$

En se plaçant pour cette dernière propriété en un point où g est non nulle.

Théorème : Si f et g sont n fois dérivables $(f \times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(k)} \times g^{(n-k)}$

Ceci s'utilise surtout avec une des deux fonctions qui est un polynôme, une exponentielle ou une fonction trigonométrique.

16-2 Dérivée d'une fonction composée

Théorème : $(g \circ f)' = (g' \circ f) \times f'$ c'est à dire : $(g(f(x)))' = g'(f(x)) \times f'(x)$

Théorème : En un point où f' est non nulle : $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$ c'est à dire $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$ avec les notations habituelles $y = f(x)$.

16-3 Dérivée et prolongement par continuité

Pour étudier la dérivabilité d'une fonction en un point où elle a été prolongée par continuité, on peut

- ou calculer la limite de $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ qui permet d'obtenir la dérivabilité mais ne prouve pas la classe $\mathcal{C}^1$
- ou bien calculer la limite de $f'(x)$
 - quand cette limite existe et est finie, f est de classe $\mathcal{C}^1$,
 - quand cette limite est infinie, f n'est pas dérivable au point,
 - mais s'il n'y a pas de limite, on ne prouve rien...

16-4 Théorème de Rolle et des Accroissements Finis, Formules de Taylor

Théorème : (Rolle)

f continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, $f(a) = f(b) \Rightarrow \exists c \in]a, b[$, tel que : $f'(c) = 0$

Théorème : (Egalité des accroissements finis)

f continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, $\Rightarrow \exists c \in]a, b[$, tel que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Théorème : (Inégalité des accroissements finis)

f continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, de dérivée bornée, $\Rightarrow \left| \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right| \leq \sup_{c \in]a, b[} |f'(c)|$

On n'écrit ici que les formules de Taylor en 0 ou sur l'intervalle $[0, x]$.

On peut se placer en un point a ou sur $[a, b]$, en adaptant les notations.

Théorème : (Taylor-Young) Si f est n -fois dérivable au voisinage de 0,

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + o(x^n) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^n)}{x^n} = 0$$

Théorème : (Taylor avec reste intégral) Si f est de classe C^{n+1} sur l'intervalle

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

Théorème : (Inégalité de Taylor-Lagrange) Si f est de classe C^{n+1} sur l'intervalle

$$\left| f(x) - \left(f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) \right) \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{t \in [0, x]} |f^{(n+1)}(t)|$$

16-5 Développement limités

On n'écrit ici que des développements limités en 0. on peut se placer en un point a en adaptant les notations.

Définition : On dit que f admet un développement limité à l'ordre n en 0

$\Leftrightarrow$ il existe $a_0, a_1, \dots, a_n$ tels que $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + o(x^n)$

f admet un dl_0 en 0 $\Leftrightarrow f$ est continue en 0

f admet un dl_1 en 0 $\Leftrightarrow f$ est dérivable en 0. (mais on ne peut pas généraliser à un dl_n ...)

Théorème : f est de classe C^n en 0 $\Rightarrow f$ admet un dl_n en 0, qui est le développement de Taylor!

16-6 Opérations sur les dl_n

On agira toujours avec des développements au même ordre.

- Somme : ajouter simplement les parties régulières.
- Produit : faire le produit des parties régulières et tronquer à l'ordre n .
- Quotient : se ramener à $k \frac{f(x)}{1+u(x)}$, avec $\lim_{x \rightarrow 0} u(x) = 0$, et utiliser $\frac{1}{1+u} = 1 - u + \dots + (-1)^n u^n + o(u^n)$
- Composée : pour $g \circ f$, vérifier que $f(0) = 0$, faire la composée des parties régulières et tronquer à l'ordre n .
- On obtient un dl_{n+1} de la primitive de f en intégrant terme à terme le dl_n de f . Attention aux constantes d'intégration... On ne peut pas faire la même chose pour la dérivée !

16-7 Fonctions usuelles

a) Exponentielle et Logarithme

La fonction exponentielle : $x \rightarrow \exp(x)$ est définie sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$.

Elle vérifie la propriété fondamentale : $\exp(a + b) = \exp(a) \exp(b)$.

La fonction logarithme est la réciproque de la précédente et n'est définie que sur $\mathbb{R}_+^*$.

Elle vérifie la propriété fondamentale : $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.

Ces deux fonctions sont tracées sur la figure 2, ci-dessous.

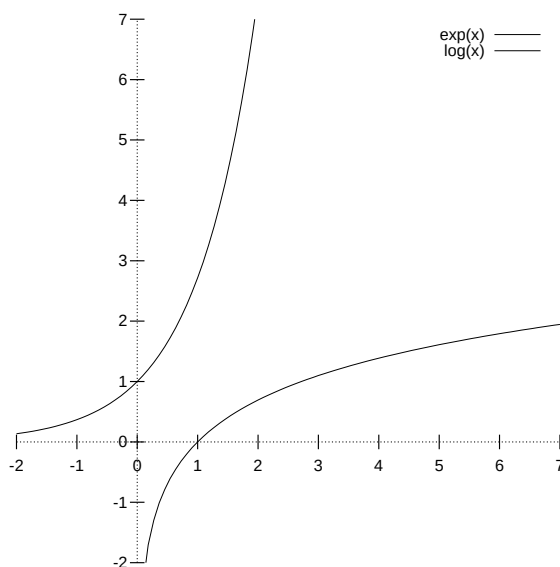


Figure 2 – Fonctions exponentielles et logarithme

b) Fonction trigonométriques hyperboliques

Rappelons la relation fondamentale de la trigonométrie hyperbolique : $\text{ch}^2 a - \text{sh}^2 a = 1$

Les deux fonctions $x \rightarrow \text{ch}(x)$ et $x \rightarrow \text{sh}(x)$ sont tracées sur la figure 3, ci-dessous.

Attention, le repère n'est pas orthonormal.

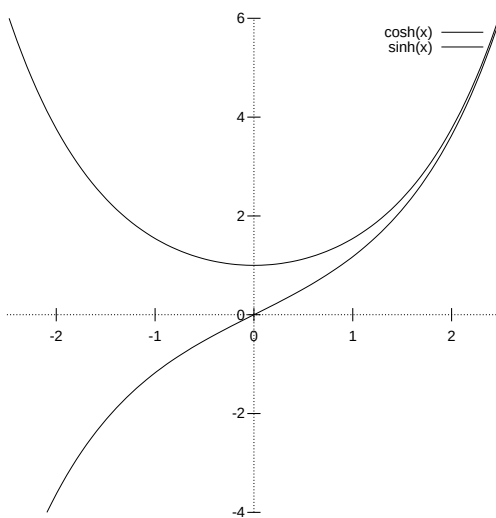


Figure 3 – Fonctions cosinus et sinus hyperboliques

La fonction $x \rightarrow \text{th}(x)$ est représentée sur la figure 4, ci-dessous.

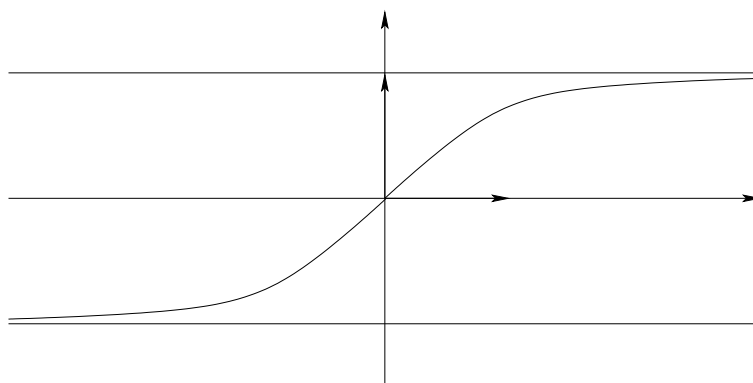


Figure 4 – *Fonction tangente hyperbolique*

c) Autres fonctions usuelles

Voir le tableau 1, page suivante, des dérivées et des développements limités usuels.

On ajoutera la dérivée $n^{\text{ème}}$ de $\sin x$ qui est $\sin(x + n\frac{\pi}{2})$ et celle de $\cos x$ qui est $\cos(x + n\frac{\pi}{2})$.

On a indiqué l'ensemble de définition de f' quand il différait de celui de f .

Pour les deux dernières qui dépendent d'un paramètre a , on a indiqué les résultat valables pour a quelconque.

17 Trigonométrie

17-1 Propriétés élémentaires

Rappelons la relation fondamentale de la trigonométrie : $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$.

La figure 5, ci-dessous, représente le cercle trigonométrique.

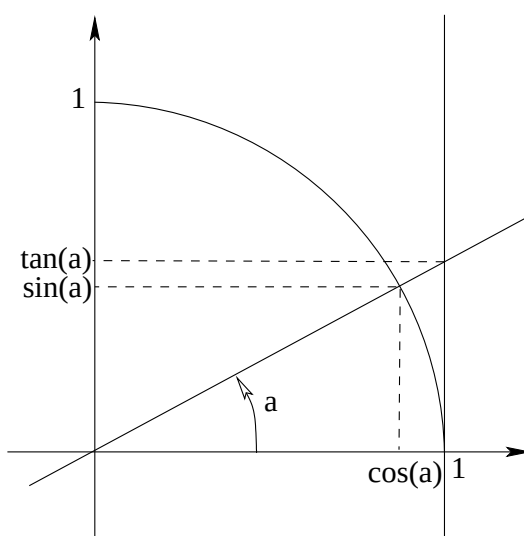


Figure 5 – **Cercle trigonométrique**

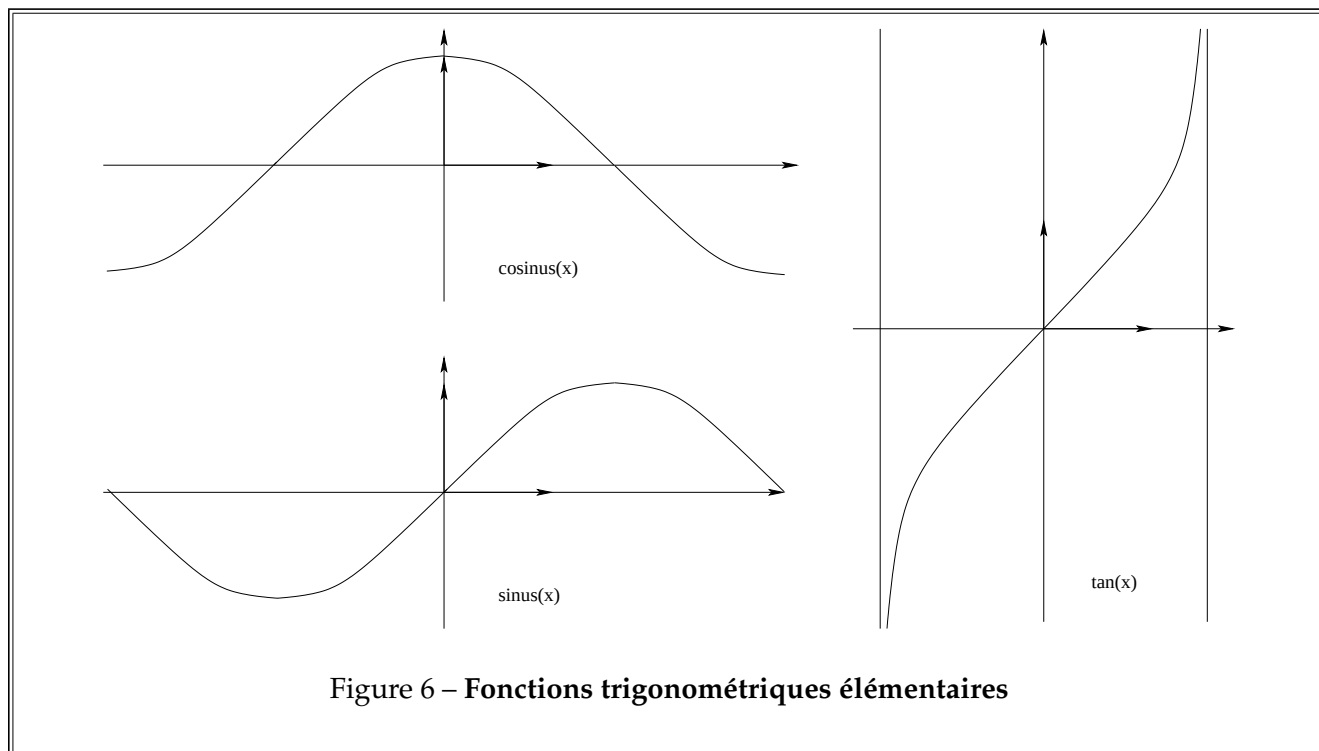
Tableau 1 – FONCTIONS USUELLES

f	$\mathbf{D}_f$	f'	dl_n
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$	$\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$-\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$	$\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$
$\tan x$	$]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[+ k\pi, k \in \mathbb{Z}$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$
$\arcsin x$	$[-1, 1]$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} (]-1, 1[)$	$x + \frac{x^3}{6} + o(x^4)$
$\arccos x$	$[-1, 1]$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} (]-1, 1[)$	$\frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$
$\arctan x$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$
e^x	$\mathbb{R}$	e^x	$\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$
$\ln x$	$]0, +\infty[$	$\frac{1}{x}$	
$\ln(1+x)$	$] -1, +\infty[$	$\frac{1}{1+x}$	$\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + o(x^n)$
$\frac{1}{1+x}$	$\mathbb{R} \setminus \{-1\}$		$\sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + o(x^n)$
$\ln(1-x)$	$] -\infty, +1[$	$-\frac{1}{1-x}$	$-\sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} + o(x^n)$
$\frac{1}{1-x}$	$\mathbb{R} \setminus \{1\}$		$\sum_{k=0}^n x^k + o(x^n)$
$\operatorname{ch} x$	$\mathbb{R}$	$\operatorname{sh} x$	$\sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$
$\operatorname{sh} x$	$\mathbb{R}$	$\operatorname{ch} x$	$\sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$
$\operatorname{th} x$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = 1 - \operatorname{th}^2 x$	$x + o(x^2)$
x^a	$]0, +\infty[$ ou $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^*$	$a x^{a-1} (a \neq 0)$	
$(1+x)^a$	$] -1, +\infty[$ ou $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$a(1+x)^{a-1}$	$1 + \sum_{k=1}^n \frac{a(a-1)\dots(a-k+1)}{k!} x^k + o(x^n)$

Les valeurs des lignes trigonométriques à connaître sont :

	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
sin	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
cos	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0
tan	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$

Les fonctions trigonométriques élémentaires sont sur la figure 6, ci-dessous.



17-2 Symétries

$$\begin{array}{lll}
 \sin(-x) = -\sin x & \cos(-x) = \cos x & \tan(-x) = -\tan x \\
 \sin(x + \pi) = -\sin x & \cos(x + \pi) = -\cos x & \tan(x + \pi) = \tan x \\
 \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x & \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x & \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan x} \\
 \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x & \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x & \tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\tan x} \\
 \sin(x + n\pi) = (-1)^n \sin x & \cos(x + n\pi) = (-1)^n \cos x & \tan(x + n\pi) = \tan x
 \end{array}$$

17-3 Arc double

$$\begin{array}{lll}
 \cos 2a = \begin{cases} \cos^2 a - \sin^2 a \\ 2 \cos^2 a - 1 \\ 1 - 2 \sin^2 a \end{cases} & \sin 2a = 2 \sin a \cos a & \tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a} \\
 \cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2} & \sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2} & \tan^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{1 + \cos 2a}
 \end{array}$$

17-4 Sommes d'arcs

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a \quad \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a \quad \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} \quad \tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

Notons le cas particulier : $\frac{1 + \tan a}{1 - \tan a} = \tan\left(a + \frac{\pi}{4}\right)$.

17-5 Transformation de produits en sommes

$$\cos a \cos b = \frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2} \quad \sin a \sin b = \frac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{2}$$

$$\sin a \cos b = \frac{\sin(a+b) + \sin(a-b)}{2}$$

17-6 Transformation de sommes en produits

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} \quad \cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2} \quad \cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$$

$$\tan p + \tan q = \frac{\sin(p+q)}{\cos p \cos q}$$

17-7 Formule de Moivre

$$(\cos a + i \sin a)^n = (e^{ia})^n = e^{ina} = \cos na + i \sin na$$

17-8 Fonctions réciproques

$$\arcsin : [-1,1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad \arccos : [-1,1] \rightarrow [0,\pi] \quad \arctan : \mathbb{R} \rightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

$$\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2} \quad \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$\sin(\arccos x) = \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$$

$$\sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad \cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

On a illustré les fonctions trigonométriques réciproques dans la figure 7, page suivante.

Il faut se méfier des touches des calculatrices qui notent par exemple « $\tan^{-1}$ » l'application **réciproque** de l'application « $\tan$ », c'est à dire l'application « $\arctan$ »...

Cela provient de ce que l'application « réciproque » est l'application « inverse » pour la composée des applications ...

17-9 Pour le calcul intégral

$$\text{Si } t = \tan \frac{\theta}{2}, \text{ alors : } \tan \theta = \frac{2t}{1-t^2}, \quad \sin \theta = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos \theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad d\theta = \frac{2 dt}{1+t^2}$$

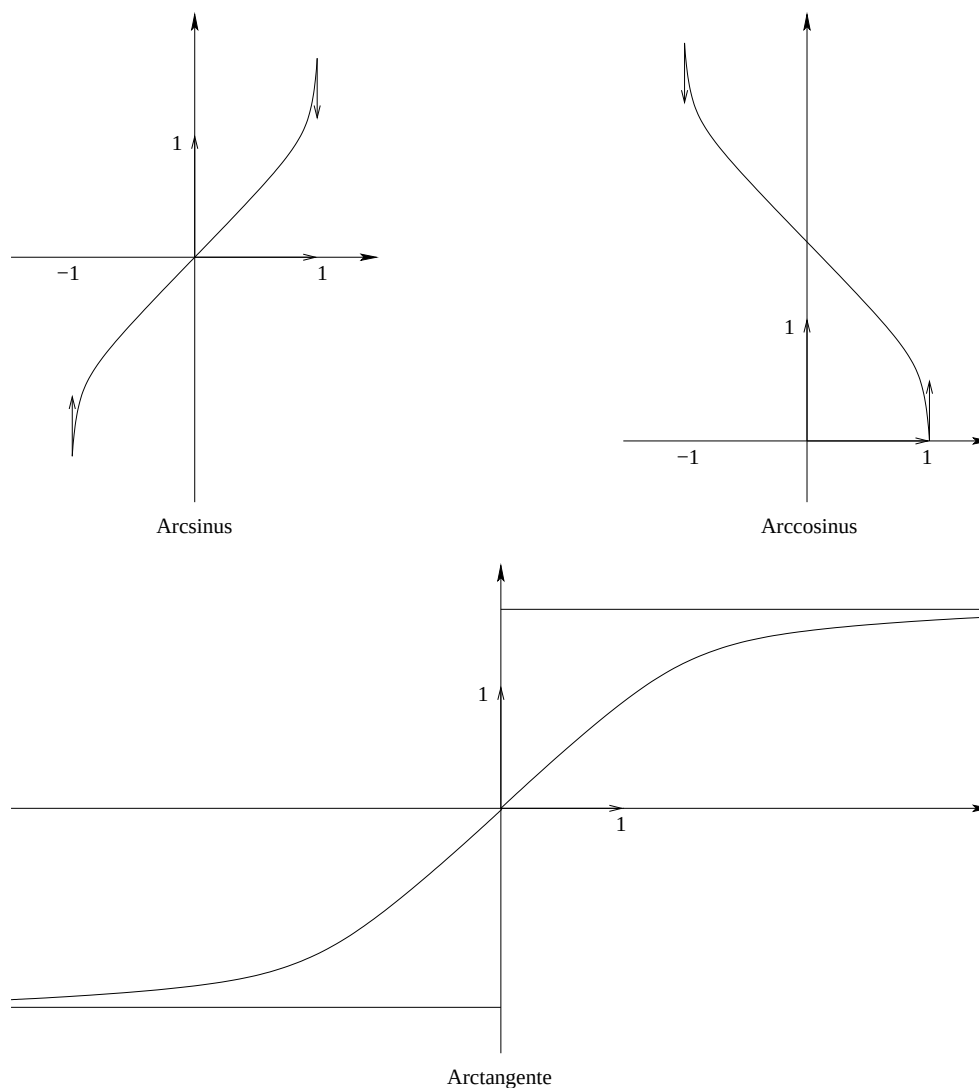


Figure 7 – Fonctions trigonométriques réciproques

18 Recherche de primitives

18-1 Fraction rationnelle en x

On décompose la fraction rationnelle en éléments simples :

- les termes en $\frac{1}{x-a}$, s'intègrent en $\ln|x-a|$
- les termes en $\frac{1}{(x-a)^p}$, s'intègrent en $\frac{1}{1-p} \times \frac{1}{(x-a)^{p-1}}$
- les termes en $\frac{ax+b}{x^2+px+q}$, avec $\Delta < 0$, s'intègrent en écrivant : $\frac{ax+b}{x^2+px+q} = \frac{\frac{a}{2} \times (2x+p)}{x^2+px+q} + \frac{(b-\frac{a}{2}p)}{x^2+px+q}$
 - en $\ln(x^2+px+q)$ pour le terme : $\frac{\frac{a}{2} \times (2x+p)}{x^2+px+q}$, et ensuite,
 - en $\arctan$ pour le nouveau terme constant : $\frac{(b-\frac{a}{2}p)}{x^2+px+q}$.

18-2 Fractions rationnelles diverses

Dans tous les cas, on indique un changement de variable pour $u = \dots$ obtenir une fraction rationnelle en u .

a) Fraction rationnelle en e^x , $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{sh} x$

Poser $u = e^x$.

b) Fraction rationnelle en x et $\sqrt{ax+b}$

Poser $u = \sqrt{ax+b}$.

c) Fraction rationnelle en $\sin x$ et $\cos x$

Règle de Bioche : on regarde si $f(x) dx$ est invariant quand on change

- x en $-x$, poser alors : $u = \cos x$,
- x en $\pi - x$, poser alors : $u = \sin x$,
- x en $\pi + x$, poser alors : $u = \tan x$,

en cas d'échec, poser $u = \tan \frac{x}{2}$. Voir à ce propos le paragraphe 17-9.

18-3 Polynôme $\times$ exponentielle

On peut :

- Intégrer par parties en diminuant le degré du polynôme ou,
- chercher une primitive de la même forme avec un polynôme du même degré.

18-4 Primitives usuelles

Voir le tableau 2, page ci-contre, des primitives usuelles.

Notons qu'une primitive n'a de sens que sur un intervalle. Si on change d'intervalle, il y a au moins la constante qui change, mais pas seulement. En effet $\ln(x)$ peut devoir être changé en $\ln(-x)$... C'est pourquoi, dans un premier temps, on écrira toujours un logarithme avec une valeur absolue.

19 Intégrale de Riemann (ou intégrale simple)

19-1 Primitive

Théorème : (Darboux) Une fonction continue sur un intervalle admet une primitive sur cet intervalle. Deux primitives diffèrent d'une constante.

Définition : $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$, avec F une primitive de f .

Dans un repère orthonormal, l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ est aussi l'aire **algébrique** délimitée par la courbe et l'axe Ot de la variable entre $t = a$ et $t = b$.

Théorème : (Chasles) $\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$, avec f continue sur la réunion des intervalles.

Théorème : (Linéarité) $\int_a^b \lambda f(t) + \mu g(t) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt + \mu \int_a^b g(t) dt$

19-2 Inégalités

Théorème : $\left. \begin{array}{l} \forall t \in [a, b], \quad f(t) \leq g(t) \\ a < b \end{array} \right\} \Rightarrow \int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$

Théorème : (Valeur absolue ou module) $a < b \Rightarrow \left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$

Tableau 2 – PRIMITIVES USUELLES

Primitives simples		
Fonction	Primitive	Remarques
x^a	$\frac{x^{a+1}}{a+1} + C$	Sauf pour $a = -1$, sur $\mathbb{R}$, ou $\mathbb{R}^*$, ou $\mathbb{R}_+^*$ selon le cas
$\frac{1}{x}$	$\ln x + C$	Sur un intervalle de $\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{x+a}$	$\ln x+a + C$	Sur un intervalle privé de $-a$
$\frac{1}{x^2+a^2}$	$\frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$	Sur un intervalle de $\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + C$	Sur un intervalle de $] -1, 1[$. Ou bien $-\arccos x + C'$
e^x	$e^x + C$	Sur un intervalle de $\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x + C$	Sur un intervalle de $\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x + C$	Sur un intervalle de $\mathbb{R}$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + C$	Sur un intervalle de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[+ k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$\tan x$	$-\ln \cos x + C$	Sur un intervalle de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[+ k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x + C$	Sur un intervalle de $\mathbb{R}$
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x + C$	Sur un intervalle de $\mathbb{R}$
Utilisation de fonctions composées		
Fonction	Primitive	Remarques
$u' u^n$	$\frac{1}{n+1} u^{n+1}$	Sur un intervalle où u est de classe $\mathcal{C}^1$, $n \neq -1$
$\frac{u'}{u}$	$\ln u $	Sur un intervalle où u est de classe $\mathcal{C}^1$, $u(x) \neq 0$
$\frac{u'}{u^n}$	$\frac{1}{1-n} \frac{1}{u^{n-1}}$	Sur un intervalle où u est de classe $\mathcal{C}^1$, $u(x) \neq 0$, $n \neq 1$
$\frac{u'}{a^2 + u^2}$	$\frac{1}{a} \arctan \frac{u}{a}$	Sur un intervalle où u est de classe $\mathcal{C}^1$

Théorème : (Moyenne) $a < b \Rightarrow \left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq (b-a) \sup_{t \in [a,b]} |f(t)|$

Théorème : (Cauchy-Schwarz, cas réel) $a < b \Rightarrow \left(\int_a^b f(t)g(t) dt \right)^2 \leq \int_a^b f^2(t) dt \times \int_a^b g^2(t) dt$

Théorème : (Cauchy-Schwarz, cas complexe) $a < b \Rightarrow \left| \int_a^b f(t)g(t) dt \right|^2 \leq \int_a^b |f^2(t)| dt \times \int_a^b |g^2(t)| dt$

19-3 Théorème des 3 conditions

Théorème : $\left. \begin{array}{l} \forall t \in [a,b], \quad f(t) \geq 0 \\ f \text{ continue sur } [a,b] \\ \int_a^b f(t) dt = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \forall t \in [a,b], \quad f(t) = 0$

On utilise souvent ce théorème quand on a un produit scalaire défini par une intégrale, pour montrer le caractère défini-positif de la forme quadratique.

19-4 Intégrale dépendant d'une borne

- f continue sur $[a,b]$, $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, et $F'(x) = f(x)$
- f continue sur $[a,b]$, u et v de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\alpha,\beta]$, avec $\begin{cases} u([\alpha,\beta]) \subset [a,b] \\ v([\alpha,\beta]) \subset [a,b] \end{cases}$
 $\Rightarrow F(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\alpha,\beta]$, $F'(x) = f(v(x)) \times v'(x) - f(u(x)) \times u'(x)$

On ne confondra pas ce théorème avec les suivants...

19-5 Continuité et dérivation sous $\int \dots$ pour une intégrale simple

Théorème : (Continuité) $f : \begin{array}{l} I \times [a,b] \rightarrow \mathbb{R} \\ (x,t) \mapsto f(x,t) \end{array} \left\} \text{ avec } f \text{ continue sur } I \times [a,b] \right.$

$\Rightarrow F$ définie par $F(x) = \int_a^b f(x,t) dt$ est continue sur I

Théorème : (Classe $\mathcal{C}^1$) Si, **de plus**, f admet une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$, continue sur $I \times [a,b]$,

$\Rightarrow F$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I , et, $F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) dt$

19-6 Intégration par parties et changement de variable pour une intégrale simple

- Intégration par parties : u et v de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$,

$$\int_a^b u(t)v'(t) dt = \left[u(t)v(t) \right]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t) dt$$

- Changement de variable : f continue sur $[a,b]$, φ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\alpha,\beta]$, avec $\varphi([\alpha,\beta]) \subset [a,b]$,

$$\Rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(u) du$$

19-7 Calcul approché d'intégrales et sommes de Riemann

On va faire un calcul approché de la valeur d'une intégrale de f sur $[a, b]$ en divisant l'intervalle $[a, b]$ en n parties égales. Les bornes de ces parties sont donc $a + k \frac{b-a}{n}$ pour $k \in \{0, 1, \dots, n\}$. Sur chacun de ces intervalles de largeur $\frac{b-a}{n}$, $\left[a + (k-1) \frac{b-a}{n}, a + k \frac{b-a}{n} \right]$, on approxime la fonction par la valeur à une de ses deux bornes. Ce qui donne :

Théorème : f continue sur $[a, b]$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t) dt$$

Si de plus f est monotone, une figure montre facilement que l'une des deux sommes est un majorant, l'autre un minorant de l'intégrale.

Enfin, quand $[a, b] = [0, 1]$, on obtient des sommes particulières appelées sommes de Riemann :

Théorème : f continue sur $[0, 1]$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t) dt$$

20 Intégrale généralisée (ou intégrale impropre)

20-1 Convergence

Définition : f est localement intégrable sur $I \Leftrightarrow f$ est continue par morceaux sur I

Définition : $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$, continue sur $[a, b[$ admet une intégrale généralisée en b

$$\Leftrightarrow \int_a^x f(t) dt \text{ a une limite finie quand } x \rightarrow b^-$$

On a la même définition sur $[a, +\infty[$, $]a, b]$, ou $]-\infty, b]$. On écrira l'ensemble des théorèmes pour $[a, b[$.
Le lecteur adaptera les énoncés aux autres intervalles.
Cependant le théorème dit du « faux-problème » n'est pas applicable à l'infini.

Théorème : (convergence absolue) $\int_a^b |f(t)| dt$ converge $\Rightarrow \int_a^b f(t) dt$ converge et $\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$

Théorème : Si f est de signe constant sur $[a, b[$, alors : $\int_a^b f(t) dt$, $\int_a^b -f(t) dt$ et $\int_a^b |f(t)| dt$ sont de même nature.

La convergence de l'intégrale équivaut à sa convergence absolue.

Théorème : (faux problème) f continue sur $[a, b[$, admettant une limite finie en b^- , c'est à dire qu'elle est prolongeable par continuité (en un point fini b !), alors $\int_a^b f(t) dt$ converge

20-2 Fonctions positives

Théorème : (Riemann) $\left\{ \begin{array}{l} \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx \text{ converge} \Leftrightarrow \alpha < 1 \\ \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx \text{ converge} \Leftrightarrow \alpha > 1 \end{array} \right.$

Théorème : (Comparaison) $\forall t \in [a, b[, \quad 0 \leq f(t) \leq g(t) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_a^b g(t) dt \text{ converge} \Rightarrow \int_a^b f(t) dt \text{ converge} \\ \int_a^b f(t) dt \text{ diverge} \Rightarrow \int_a^b g(t) dt \text{ diverge} \end{array} \right.$

Théorème : (Equivalence) $\left. \begin{array}{l} f(t) \underset{b^-}{\sim} g(t) \\ f(t) \text{ de signe constant} \end{array} \right\} \Rightarrow \int_a^b f(t) dt \text{ et } \int_a^b g(t) dt \text{ sont de même nature}$

20-3 Théorème des 3 conditions

Le théorème des 3 conditions est encore applicable pour les intégrales généralisée.

Théorème : $\left. \begin{array}{l} \forall t \in [a, b[, \quad f(t) \geq 0 \\ f \text{ continue sur } [a, b[\\ \int_a^b f(t) dt \text{ convergente et : } \int_a^b f(t) dt = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \forall t \in [a, b[, \quad f(t) = 0$

On utilise souvent ce théorème quand on a un produit scalaire défini par une intégrale, pour montrer le caractère défini-positif de la forme quadratique.

20-4 Intégration par parties et changement de variable pour une intégrale généralisée

a) Intégration par parties

$\left. \begin{array}{l} u \text{ et } v \text{ de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [a, b[\\ \lim_{t \rightarrow b} u(t)v(t) \text{ existe et est finie} \end{array} \right\} \Rightarrow \int_a^b u(t)v'(t) dt \text{ et } \int_a^b u'(t)v(t) dt \text{ sont de même nature}$
et si elles convergent : $\int_a^b u(t)v'(t) dt = [u(t)v(t)]_a^{b^-} - \int_a^b u'(t)v(t) dt$

b) Changement de variable

$\left. \begin{array}{l} f \text{ continue sur } I \\ \varphi \text{ monotone de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [\alpha, \beta[\\ \varphi([\alpha, \beta]) \subset I \end{array} \right\} \Rightarrow \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \text{ et } \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(u) du \text{ sont de même nature}$
et si elles convergent : $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(u) du$

20-5 Un procédé de convergence

- Si on a $\alpha < 1$ tel que $\lim_{t \rightarrow 0} t^\alpha f(t) = 0$, alors $|f(t)| = o\left(\frac{1}{t^\alpha}\right)$,
et donc $\int_0^1 f(t) dt$ converge absolument donc converge.
- Si on a $\alpha > 1$ tel que $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha f(t) = 0$, alors $|f(t)| = o\left(\frac{1}{t^\alpha}\right)$,
et donc $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ converge absolument donc converge.

Ceci n'est pas un théorème, il faut à chaque fois refaire la démonstration...

20-6 Continuité et dérivation sous $\int \dots$ pour une intégrale généralisée

Théorème : (Continuité) $f : \begin{matrix} I \times [a, b[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x, t) & \mapsto & f(x, t) \end{matrix} \left. \vphantom{\begin{matrix} I \times [a, b[\\ (x, t) \end{matrix}} \right\} \text{ avec } f \text{ continue sur } I \times [a, b[,$
si $\exists \varphi$ telle que $\left. \begin{matrix} \forall x \in I, \quad \forall t \in [a, b[, \quad |f(x, t)| \leq \varphi(t) \\ \int_a^b \varphi(t) dt \text{ converge} \end{matrix} \right\} \Rightarrow F \text{ définie par } F(x) = \int_a^b f(x, t) dt \text{ est continue sur } I$

Théorème : (Classe $\mathcal{C}^1$) Si, **de plus**, f admet une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$, continue sur $I \times [a, b[$, et
si $\exists \psi$ telle que $\left. \begin{matrix} \forall x \in I, \quad \forall t \in [a, b[, \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \psi(t) \\ \int_a^b \psi(t) dt \text{ converge} \end{matrix} \right\} \Rightarrow F \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } I, \text{ et, } F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$

Il est important que φ , et ψ , **ne dépendent pas de x** .
Ce sont des fonctions réelles positives dont les intégrales convergent.

20-7 Ensemble de définition

L'ensemble de définition d'une fonction F de la variable x est l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles on peut effectivement calculer $F(x)$.

Ainsi, si on a :

- $F : x \mapsto \int_a^b f(x, t) dt$ ou,
- $F : x \mapsto \int_a^{+\infty} f(x, t) dt$ ou encore,
- $F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$

L'ensemble de définition de F est l'ensemble des valeurs de x telles que :

- l'intégrale est simple, ou bien,
- l'intégrale est généralisée et convergente.

21 Intégrales doubles et triples

21-1 Description hiérarchique du domaine et intégrale

On ne peut calculer une intégrale multiple que si on a une description hiérarchique du domaine :

- Pour une intégrale double (figure 8, page suivante) : $(x, y) \in \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [a, b] \\ y \in [u(x), v(x)] \end{cases}$
- Pour une intégrale triple (figure 9, page suivante) : $(x, y, z) \in \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [a, b] \\ y \in [u(x), v(x)] \\ z \in [\alpha(x, y), \beta(x, y)] \end{cases}$

On peut avoir les variables dans un autre ordre, l'important est que les bornes de chacune ne soient définies qu'en fonction des précédentes.

On définit alors les intégrales doubles et triples comme des intégrales simples emboîtées :

- $\iint_{\Delta} f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{u(x)}^{v(x)} f(x, y) dy \right) dx$
- $\iiint_{\Delta} f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left(\int_{u(x)}^{v(x)} \left(\int_{\alpha(x, y)}^{\beta(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx$

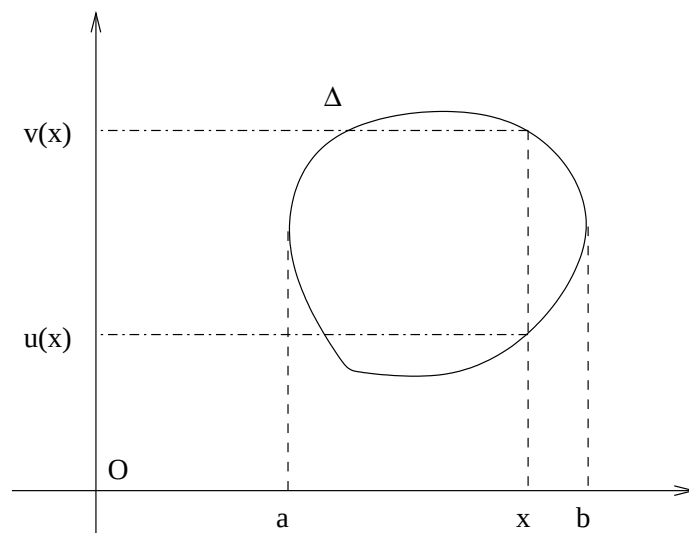


Figure 8 – Intégrale double

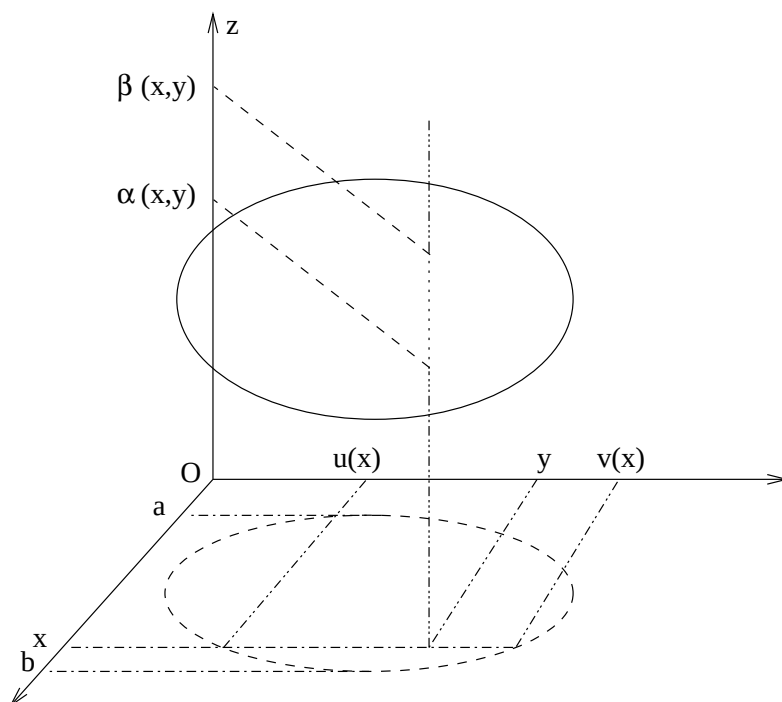


Figure 9 – Intégrale triple

21-2 Calcul d'Aires et de Volumes

On travaille ici dans un repère orthonormal.

- Dans le plan, l'aire **géométrique** du domaine Δ est : $\mathcal{A} = \iint_{\Delta} dx \, dy$,
- Dans l'espace, le volume **géométrique** du domaine Δ est : $\mathcal{V} = \iiint_{\Delta} dx \, dy \, dz$.

21-3 Inclusion des domaines

Théorème : Si f est continue et **positive** sur Δ , avec, de plus, $D \subset \Delta$, alors

$$\iint_D f(x,y) \, dx \, dy \leq \iint_{\Delta} f(x,y) \, dx \, dy$$

On a la même chose pour une intégrale triple.

21-4 Changement de variables

a) Intégrale double

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases} \text{ bijective (ou presque...) } (x,y) \in D \Leftrightarrow (u,v) \in \Delta, \text{ et } f(x,y) = g(u,v)$$

$$\iint_D f(x,y) \, dx \, dy = \iint_{\Delta} g(u,v) \left| \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right| du \, dv$$

On notera la **valeur absolue** du jacobien et la pseudo-simplification.

b) Intégrale triple

$$\begin{cases} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \\ z = z(u,v,w) \end{cases} \text{ bijective (ou presque...) } (x,y,z) \in D \Leftrightarrow (u,v,w) \in \Delta, \text{ et } f(x,y,z) = g(u,v,w)$$

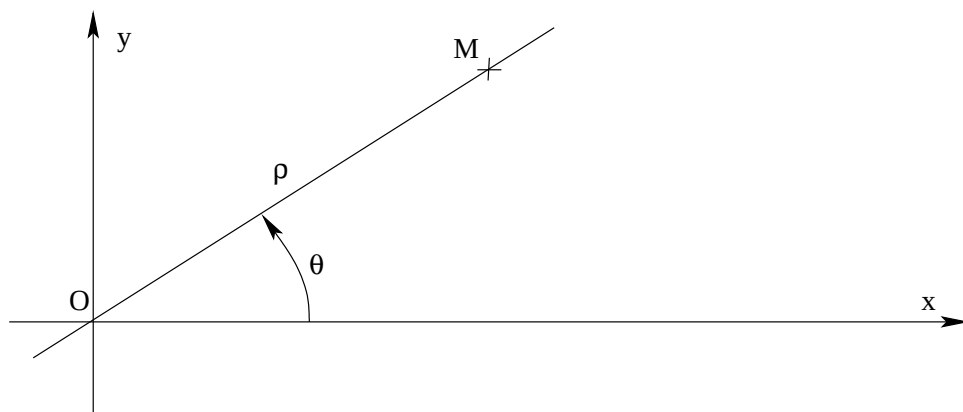
$$\iiint_D f(x,y,z) \, dx \, dy \, dz = \iiint_{\Delta} g(u,v,w) \left| \frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} \right| du \, dv \, dw$$

On notera la **valeur absolue** du jacobien et la pseudo-simplification.

c) Intégrale double en Polaires

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases} (x,y) \in D \Leftrightarrow (\rho,\theta) \in \Delta, \text{ et } f(x,y) = g(\rho,\theta)$$

La figure 10, ci-dessous, indique le mode de calcul.

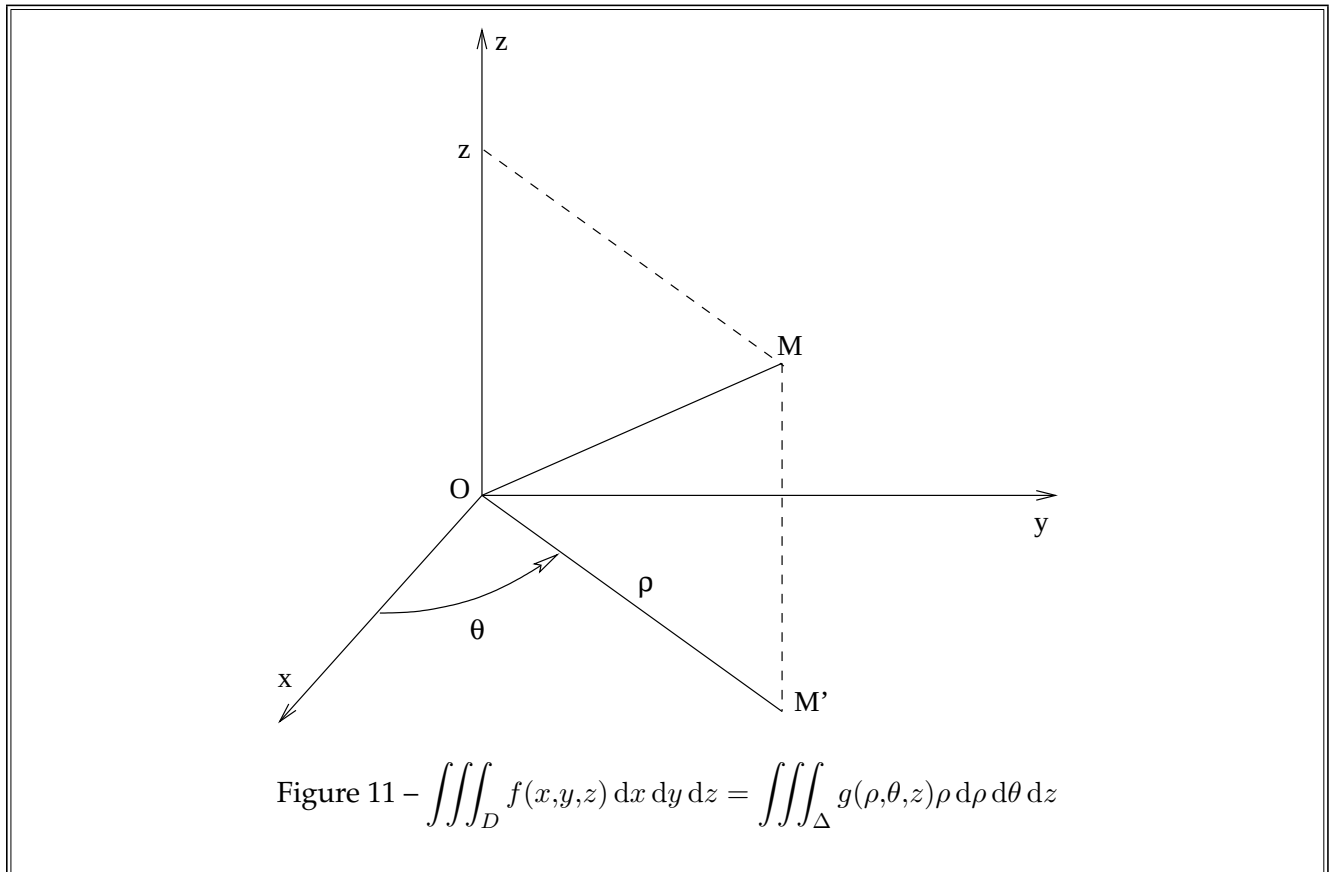


$$\text{Figure 10} - \iint_D f(x,y) \, dx \, dy = \iint_{\Delta} g(\rho,\theta) \rho \, d\rho \, d\theta$$

d) Intégrale triple en Cylindriques

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = z \end{cases} \quad (x,y,z) \in D \Leftrightarrow (\rho,\theta,z) \in \Delta, \text{ et } f(x,y,z) = g(\rho,\theta,z)$$

La figure 11, ci-dessous, indique le mode de calcul.



e) Intégrale triple en Sphériques

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \cos \varphi \\ y = \rho \sin \theta \cos \varphi \\ z = \rho \sin \varphi \end{cases} \quad (x,y,z) \in D \Leftrightarrow (\rho,\theta,\varphi) \in \Delta, \text{ et } f(x,y,z) = g(\rho,\theta,\varphi)$$

La figure 12, page suivante, indique le mode de calcul.

Il s'agit de la convention des mathématiciens : les physiciens utilisent un autre angle.

En mathématiques, en général, $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Les physiciens utilisent l'angle entre Oz et OM qui appartient donc à $[0,\pi]$. Dans la formule, au niveau de la valeur absolue du jacobien, ils échangent ainsi $\sin \varphi$ et $\cos \varphi$.

En plus, parfois, ils changent le nom des angles...

On fait un changement de variable

- pour simplifier le domaine, **ce qui est nouveau**,
- ou pour simplifier le calcul des primitives emboîtées.

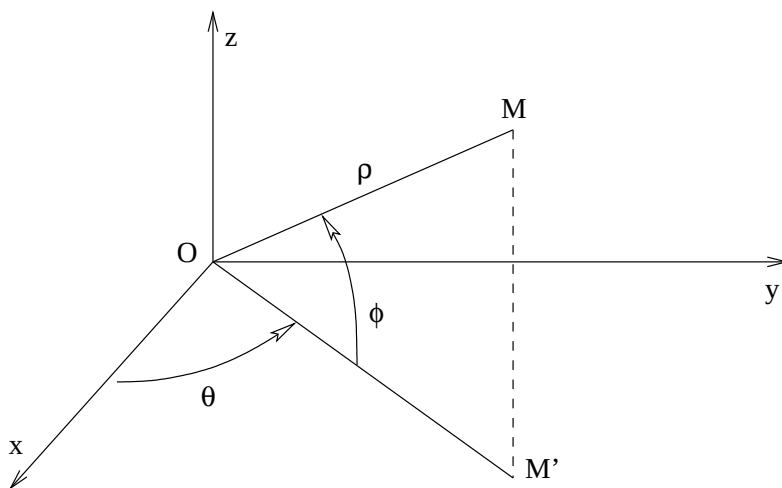


Figure 12 – $\iiint_D f(x,y,z) \, dx \, dy \, dz = \iiint_\Delta g(\rho,\theta,\varphi) \rho^2 \cos \varphi \, d\rho \, d\theta \, d\varphi$

22 Séries numériques (réelles ou complexes)

22-1 Convergence et Convergence Absolue

Définition : $\sum u_n$ converge $\Leftrightarrow$ la suite des sommes partielles (s_n) avec $s_n = \sum_{k=0}^n u_k$ converge.

Théorème : $\sum |u_n|$ converge $\Rightarrow \sum u_n$ converge.

(règle $n^\alpha u_n$)

Si on a $\alpha > 1$ tel que $\lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha u_n = 0$, alors $|u_n| = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ et donc $\sum u_n$ converge absolument et donc converge.

Ceci n'est pas un théorème et est donc à réargumenter à chaque fois...

22-2 Séries géométriques

Théorème : La série de terme général x^n converge $\Leftrightarrow |x| < 1$.

De plus, la somme est : $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$

Définition : Une suite **géométrique** est une suite vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = a u_n$.
 a est la **raison** de la suite.

La somme d'une série géométrique convergente est donc : $\frac{\text{« le premier terme »}}{1 - \text{« la raison »}}$.
 Ceci prolonge et généralise la somme des termes d'une suite géométrique qui est :

$$\frac{\text{« le premier terme »} - \text{« le premier terme manquant »}}{1 - \text{« la raison »}}$$

Quand la série converge, il n'y pas de termes manquants...

22-3 Séries positives

Théorème : (Riemann) $u_n \sim_{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \Rightarrow \left(\sum u_n \text{ converge} \Leftrightarrow \alpha > 1 \right)$

Théorème : (Comparaison) $\left. \begin{array}{l} 0 \leq u_n \leq v_n \\ \sum v_n \text{ converge} \end{array} \right\} \Rightarrow \sum u_n \text{ converge}.$

Corollaire : $\left. \begin{array}{l} 0 \leq u_n \leq v_n \\ \sum u_n \text{ diverge} \end{array} \right\} \Rightarrow \sum v_n \text{ diverge}.$

Théorème : (Equivalence) $\left. \begin{array}{l} 0 \leq u_n \\ u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \end{array} \right\} \Rightarrow \sum u_n \text{ et } \sum v_n \text{ sont de même nature}.$

Théorème : (d'Alembert) $\sum u_n$ à terme strictement positifs,
telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$ $\left\{ \begin{array}{ll} l < 1, & \sum u_n \text{ converge} \\ l > 1, & \sum u_n \text{ diverge grossièrement} \\ l = 1, & \text{on ne sait rien} \end{array} \right.$

On tombe très souvent sur le cas douteux ! On utilise souvent le théorème de d'Alembert dans le cadre des séries entières, ou lorsqu'on a, dans l'expression de u_n , des factorielles, des termes de nature géométrique (a^n) ou des exponentielles.

22-4 Critère spécial des séries alternées

Définition : $\sum u_n$ est une série **alternée** $\Leftrightarrow (-1)^n u_n$ est de signe constant.

Théorème : $\sum u_n$ une série **alternée**
 $\left. \begin{array}{l} (|u_n|) \searrow \\ \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \sum u_n \text{ converge}.$

De plus, $|R_n| \leq |u_{n+1}|$, où $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$,

enfin, $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ est du signe de u_0 , R_n est du signe de u_{n+1}

Voir la figure 13, ci-dessous.

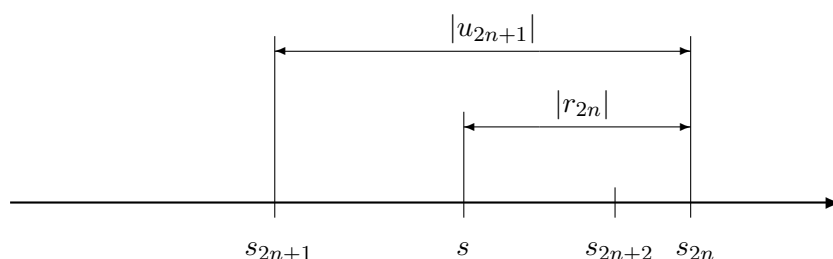


Figure 13 – Convergence d'une série répondant au critère spécial

22-5 Comparaison d'une série et d'une intégrale

Théorème : f une fonction **positive et décroissante** définie sur $\mathbb{R}_+$, $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ et $\sum f(n)$ sont de même nature.

Et si elles convergent : $\int_{n+1}^{+\infty} f(t) dt \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k) \leq \int_n^{+\infty} f(t) dt$

La figure 14, ci-dessous, donne les inégalités de base !

Il ne faut pas hésiter à la refaire pour retrouver ces inégalités.

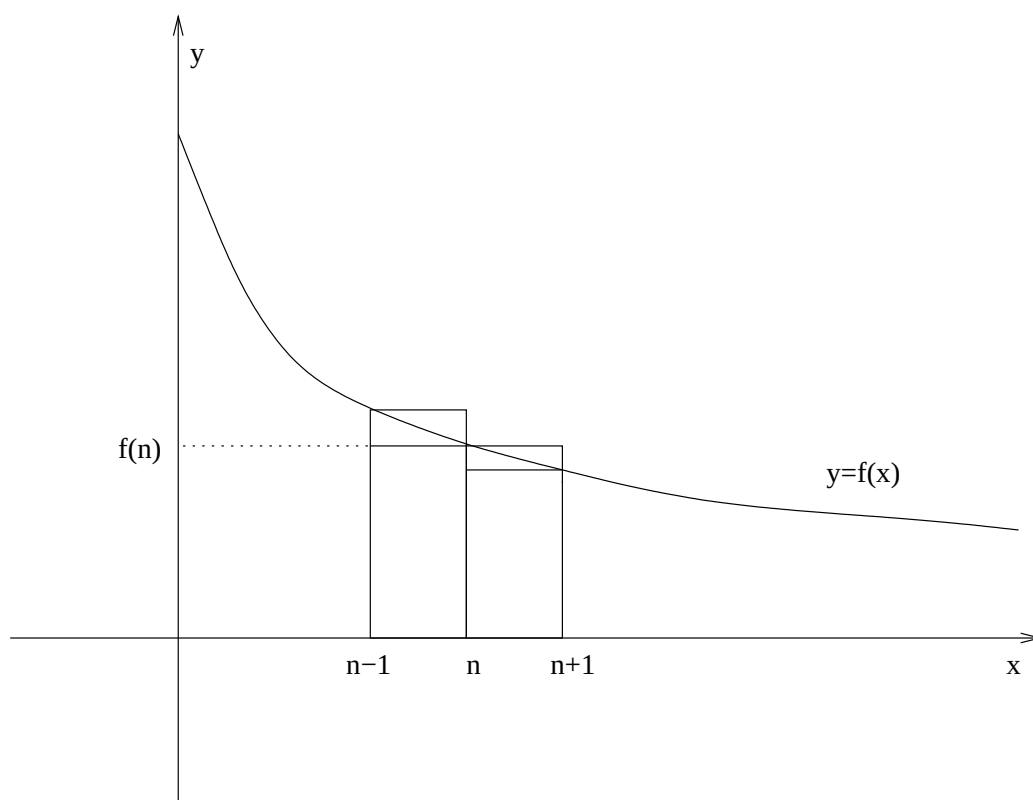


Figure 14 – Comparaison série-intégrale

22-6 Suite et série des différences

Théorème : La suite (u_n) converge $\Leftrightarrow$ La série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge

Cela sert parfois à montrer la convergence de quelques ... suites, en montrant la convergence ou la convergence absolue de la série des différences.

22-7 Calcul exact de sommes de séries

On dispose principalement de trois techniques

- Utilisation de séries entières par leur valeur en un point.
- Utilisation de séries de Fourier par leur valeur en un point ou la formule de Parseval.
- Calcul effectif de la limite de la suite des sommes partielles où les termes s'en vont en dominos.

Le cas le plus simple étant $\sum_{k=0}^n (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_0$

22-8 Calcul approché de sommes de séries

- Dans le cas d'une série alternée répondant au critère spécial, on applique ce critère.
- Dans les autres cas, on s'intéresse à la série des modules.
 - Si elle converge par application du critère de d'Alembert, majorer le reste par une série géométrique

- Sinon, majorer le reste en utilisant une intégrale ou ...

23 Séries Entières

Définition : Une **série entière** est une série de la forme $\sum a_n z^n$ ou $\sum a_n x^n$, selon que l'on travaille sur $\mathbb{C}$ ou sur $\mathbb{R}$

23-1 Rayon de convergence

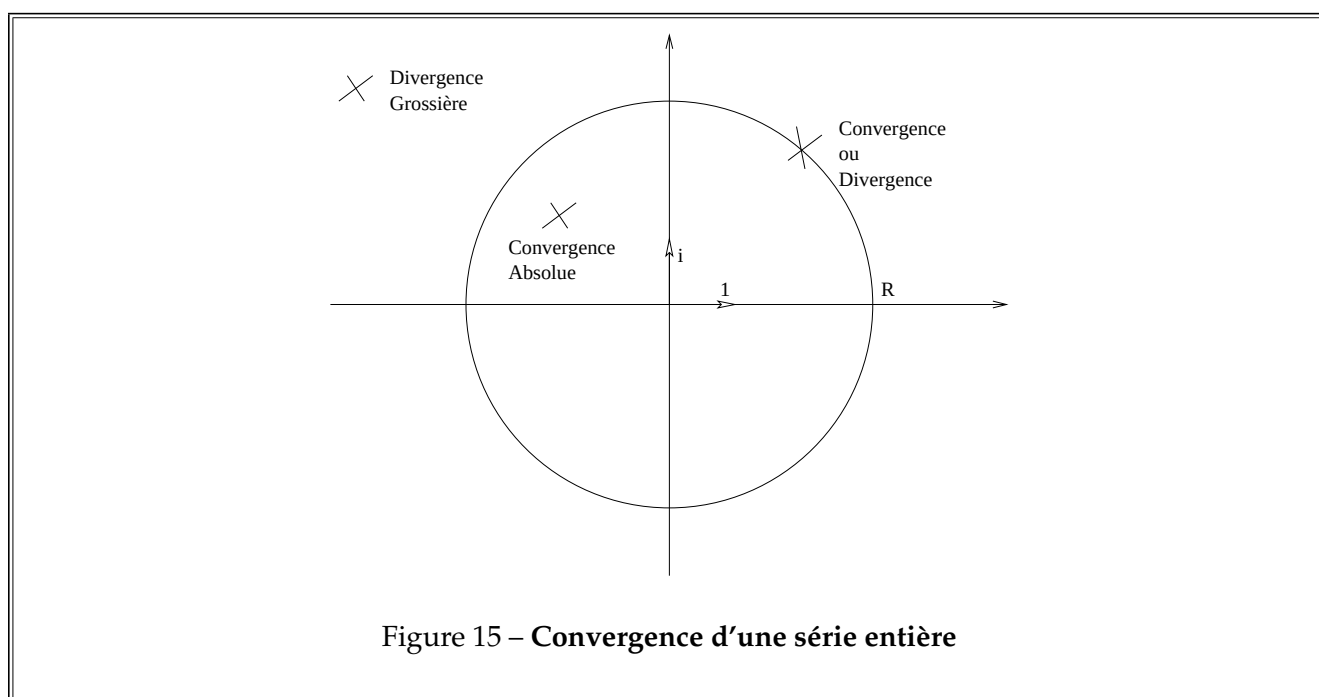
Pour rechercher le rayon de convergence R ,

- utiliser le théorème de d'Alembert, R est, s'il existe, le réel positif tel que $\left| \frac{a_{n+1}R^{n+1}}{a_n R^n} \right|$, (ou $\left| \frac{a_{2(n+1)}R^{2(n+1)}}{a_{2n}R^{2n}} \right|$, ou ...) a pour limite 1 quand $n \rightarrow +\infty$
- si $\left| \frac{a_{n+1}R^{n+1}}{a_n R^n} \right|$ a toujours une limite nulle quand $n \rightarrow +\infty$, alors : $R = +\infty$
- si $\sum a_n x^n$ est semi-convergente $\Rightarrow R = |x|$
- en cas d'échec des méthodes précédentes, on utilise l'un des éléments suivants :
 - $R = \sup_{n \in \mathbb{N}} \{r \in \mathbb{R}_+, \text{ la suite } (a_n r^n) \text{ est bornée}\}$
 - $R = \sup_{n \in \mathbb{N}} \{r \in \mathbb{R}_+, \text{ la suite } (a_n r^n) \text{ tend vers } 0\}$

23-2 Convergence

Théorème : $\begin{cases} |z| < R \Rightarrow \sum a_n z^n & \text{converge absolument} \\ |z| > R \Rightarrow \sum a_n z^n & \text{diverge grossièrement} \\ |z| = R, & \text{on ne sait rien a priori} \end{cases}$

La figure 15, ci-dessous, illustre ce théorème.



Théorème : Quand la variable est réelle, la série entière se dérive et s'intègre terme à terme sur $] -R, R[$ au moins. Elle s'intègre même terme à terme au moins sur sur **l'intervalle de convergence**

Théorème : La série entière, sa série dérivée et ses séries primitives ont le même rayon de convergence.

Théorème : La somme d'une série entière est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -R, R[$, et continue sur son ensemble de définition.

23-3 Somme de deux séries entières

Théorème :
$$\left. \begin{array}{l} \sum a_n z^n \text{ de rayon } R_1 \\ \sum b_n z^n \text{ de rayon } R_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \sum (a_n + b_n) z^n \text{ est de rayon } \begin{cases} \inf(R_1, R_2) \text{ pour } R_1 \neq R_2 \\ R \geq R_1 \text{ pour } R_1 = R_2 \end{cases}$$

23-4 Développement d'une fonction en série entière

Définition : Une fonction f est développable en série entière en 0 $\Leftrightarrow$ il existe une série entière et un intervalle

I tels que $\forall x \in I, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

Théorème :

Si f est développable en série entière en 0 alors la série entière est la série de Taylor et : $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$

En général I est l'intersection de l'ensemble de définition de f et de l'ensemble de convergence de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$,

mais cela n'est pas une obligation...

Pour développer une fonction en série entière, on peut :

- utiliser les séries entières usuelles. Assez souvent, parfois en dérivant, on fait apparaître une fraction rationnelle qu'on décompose en éléments simples sur $\mathbb{C}$ pour ensuite utiliser des séries géométriques...
- sur indication de l'énoncé, utiliser une équation différentielle.
- ou calculer la série de Taylor.

Dans tous les cas, il faudra avec soin justifier la convergence de la série entière et son égalité avec la fonction. Cela peut être délicat dans le cas de la série de Taylor... qu'on n'utilisera qu'à la demande de l'énoncé.

23-5 Séries entières usuelles

Voir le tableau 3, page suivante, des séries entières usuelles.

La série géométrique et l'exponentielle sont aussi valables pour une variable complexe.

23-6 Série entière solution d'une équation différentielle

- On considère au départ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ solution de l'équation différentielle. On pose donc $y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
- Tout ce qu'on écrit est valable pour $x \in] -R, R[$. **Il faut dire** qu'on se place sur $] -R, R[$...
- On calcule y' et au besoin y'' , on reporte dans l'équation.
- On éclate tout en sommes de séries entières.
- On **regroupe ce qui se regroupe naturellement**, les termes en x^n , ceux en x^{n-1} ...
- Ensuite, on **réindexe pour trouver une série entière unique** et nulle.
- Alors, chaque coefficient est nul, par unicité du développement en série entière quand il existe. On a en général une relation de récurrence entre les coefficients. Cette relation permet normalement de calculer les coefficients mais aussi assez souvent de trouver directement le rayon de convergence, ce qui est indispensable.

Tableau 3 – DÉVELOPPEMENTS USUELS EN SÉRIE ENTIÈRE

f	D_f	DSE	R	I
e^x	$\mathbb{R}$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	$+\infty$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$+\infty$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$+\infty$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{ch} x$	$\mathbb{R}$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$+\infty$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{sh} x$	$\mathbb{R}$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$+\infty$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{1+x}$	$\mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$	1	$] -1, 1[$
$\ln(1+x)$	$] -1, +\infty[$	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$	1	$] -1, 1]$
$\frac{1}{1-x}$	$\mathbb{R} \setminus \{1\}$	$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$	1	$] -1, 1[$
$\ln(1-x)$	$] -\infty, 1[$	$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$	1	$] -1, 1[$
$\arctan x$	$\mathbb{R}$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}$	1	$] -1, 1]$
$(1+x)^a$	$] -1, +\infty[$	$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!} x^n$	1 ou $+\infty$ ($a \in \mathbb{N}$)	

24 Séries de Fourier

24-1 Série de Fourier et coefficients de Fourier de f

Définition : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$, T -périodique, continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, on appelle **série de Fourier de f** , la série :

$$S(f)(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t), \quad \text{avec : } \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\text{On a } a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt, \quad \text{et pour } n \geq 1, \quad \begin{cases} a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos n\omega t dt = \frac{2}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t) \cos n\omega t dt \\ b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin n\omega t dt = \frac{2}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t) \sin n\omega t dt \end{cases}$$

a_0 est la valeur moyenne de f .

Dans le cas où f est paire ou impaire, on peut travailler sur une demi-période bien choisie. C'est à dire que, le plus souvent, les intégrales sont calculées entre 0 et $\frac{T}{2}$.

D'autre part, souvent, on ne dispose d'une formule explicite pour $f(t)$ que sur un certain intervalle. On veillera avec soin à ne pas utiliser cette formule **en dehors** de cet intervalle !

Si cela est plus facile, on peut calculer :

$$c_0 = a_0 = \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t) dt, \quad c_n = \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t) e^{-in\omega t} dt = \frac{a_n - ib_n}{2} \text{ pour } n \in \mathbb{N}^*$$

Si la fonction est réelle, les a_n et b_n sont réels et on les obtient par un seul calcul ...

24-2 Cas où f est 2π -périodique

Dans le cas où f est 2π -périodique, $S(f)(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt, \quad \text{et pour } n \geq 1, \quad \begin{cases} a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt dt = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(t) \cos nt dt \\ b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt dt = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(t) \sin nt dt \end{cases}$$

- Si, de plus, f est paire : $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) dt$, et pour $n \geq 1$, $\begin{cases} a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos nt dt \\ b_n = 0 \end{cases}$

- ou si f est impaire : $a_n = 0$, et pour $n \geq 1$, $b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin nt dt$

Dans les séries de Fourier, assez souvent, on n'a de formule pour f que dans un certain intervalle, on veillera donc, comme on l'a déjà dit, à n'utiliser cette formule que sur cet intervalle...

24-3 Convergence

Théorème : (Dirichlet, cas général) f de classe $\mathcal{C}^1$ **par morceaux** sur $\mathbb{R}$, T -périodique

$$\Rightarrow \text{la série de Fourier de } f \text{ converge en tous points, et sa somme est : } S(f)(t) = \frac{f(t+0) + f(t-0)}{2}$$

où $f(t+0)$ et $f(t-0)$ sont les limites à droite et à gauche de f en t .

En tous points où f est continue, on a donc bien : $S(f)(t) = f(t)$.

Il n'y a qu'aux points où f est discontinue qu'il risque d'y avoir un problème. On fera donc un graphe de la fonction **sur un peu plus d'une période** pour repérer les points de discontinuité et vérifier le caractère $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$.

Théorème : (Dirichlet, cas continu) f **continue** et de classe $\mathcal{C}^1$ **par morceaux** sur $\mathbb{R}$, T -périodique

$$\Rightarrow \text{la série de Fourier de } f \text{ converge en tous points, et : } S(f)(t) = f(t).$$

De plus, les séries $\sum |a_n|$ et $\sum |b_n|$ convergent.

Théorème : Sur un intervalle $[\alpha, \beta]$ où f est continue, $\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt$ peut se calculer en intégrant terme à terme la série de Fourier de f .

Théorème : (Unicité du développement en série de Fourier)

Si f est continue sur $\mathbb{R}$ et s'écrit comme la somme d'une série trigonométrique, on a :

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$$

Alors, cette série est la série de Fourier de f .

24-4 Produit scalaire et formule de Parseval

Théorème : $\mathcal{C}_T(\mathbb{R})$, l'ensemble des applications **continues**, T -périodiques, $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est un espace vectoriel réel.

De plus $\langle f, g \rangle = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)g(t) dt$ est un produit scalaire de $\mathcal{C}_T(\mathbb{R})$.

La famille $\{(\cos n\omega t)_{n \in \mathbb{N}}, (\sin n\omega t)_{n \in \mathbb{N}^*}\}$ est orthogonale pour ce produit scalaire.

Si les applications sont simplement **continues par morceaux**, $\langle f, g \rangle = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)g(t) dt$ est une forme bilinéaire symétrique positive.

Théorème : (Formule de Parseval) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, T -périodique, **continue par morceaux** sur $\mathbb{R}$, alors :

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f^2(t)| dt = \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} |f^2(t)| dt = |a_0^2| + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (|a_n^2| + |b_n^2|)$$

Si la fonction est réelle :

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f^2(t) dt = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

Si, de plus, f est 2π -périodique :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f^2(t) dt = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

$$\mathbf{25} \quad \int \Sigma = \Sigma \int \dots$$

Problème : Il s'agit de montrer que : $\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_a^b f_n(t) dt \right)$.

C'est à dire que l'intégrale d'une série est la série des intégrales.

Le problème n'est jamais évident. Il y a différentes solutions selon les intégrales. Toutes les justifications doivent se faire avec soin.

25-1 Série entière

Pour une série entière, on peut intégrer terme à terme sur tout intervalle inclus dans l'ouvert de convergence. Il suffit donc de rappeler qu'on a une série entière et que $[a, b] \subset]-R, R[$

25-2 Série de Fourier

Pour une série de Fourier correspondant à une fonction **continue** sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, on peut également intégrer terme à terme la série. Il suffit de rappeler ces conditions.

25-3 Autres cas

Que l'intégrale soit une intégrale simple ou une intégrale généralisée le traitement sera le même. L'idée est de sortir la somme partielle de la série par linéarité, il reste ensuite à montrer que l'intégrale du reste tend bien vers 0.

a) Utilisation du critère spécial des séries alternées

Si à t fixé, $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ converge par application du critère spécial des séries alternées,

on a alors : $\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(t) \right| \leq |f_{n+1}(t)|$

Il suffit alors de montrer que $\int_a^b |f_{n+1}(t)| dt \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$

En effet, on écrit : $\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right) dt = \underbrace{\sum_{k=0}^n \left(\int_a^b f_k(t) dt \right)}_{\text{somme partielle}} + \underbrace{\int_a^b \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(t) \right) dt}_{\text{intégrale du reste}}$

et on majore ce dernier terme en valeur absolue. Enfin, on passe à la limite sur le terme de droite...

b) Série géométrique

Si à t fixé, la série est géométrique, $\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(t)$ est aussi une série géométrique qui se calcule facilement. On

calcule alors, ou on majore : $\int_a^b \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(t) \right) dt$

c) Autres cas

Dans les autres cas, l'énoncé doit vous guider.

Le principe général est de majorer $\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(t) \right| \leq g_n(t)$

avec $\int_a^b g_n(t) dt \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$ et d'appliquer le principe précédent.

Souvent, on vient de faire une telle majoration dans les questions précédentes...

Si l'intégrale est une intégrale généralisée, il ne faut pas oublier de montrer la convergence de **toutes** les intégrales utilisées.

26 Fonctions $\mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$

26-1 Limite et continuité

- Les fonctions « composantes » comme, par exemple, $(x, y, z) \rightarrow y$ sont continues.
- Les sommes, produit par un scalaire, produit, quotient (en un point où le dénominateur ne s'annule pas) de fonctions continues sont continues.
- Les composées de fonctions continues sont continues.

Ceci permet de montrer la plupart des continuités usuelles.

Théorème : Une fonction de plusieurs variables, à valeurs réelles, **continue sur un fermé-borné** est **bornée** et **atteint ses bornes**.

26-2 Classe $\mathcal{C}^1$ et $\mathcal{C}^2$

Définition : f est de **classe $\mathcal{C}^1$** sur $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^p \Leftrightarrow f$ admet p dérivées partielles continues sur $\mathcal{U}$

Quand ces dérivées partielles sont aussi de classe $\mathcal{C}^1$, on dit que f est de **classe $\mathcal{C}^2$** sur $\mathcal{U}$

Définition : Quand f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^3$, la **différentielle de f** en (x_0, y_0, z_0) , est l'application linéaire :

$$(dx, dy, dz) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) dy + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) dz$$

On adapte au besoin cette définition en dimension p ...

Théorème : Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^p$, elle admet un développement limité à l'ordre 1 en tout point de $\mathcal{U}$ et on a :

$$f(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0) + (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) + (z - z_0) \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) + \|u\| \varepsilon(u)$$

où $u = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ et $\lim_{u \rightarrow (0,0,0)} \varepsilon(u) = 0$.

Théorème : (Schwarz) f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{U} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

Théorème : (Fonctions composées)

$$\left. \begin{array}{l} x, y, z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathcal{C}^1 \text{ sur } I \\ f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathcal{C}^1 \text{ sur } x(I) \times y(I) \times z(I) \\ F(t) = f(x(t), y(t), z(t)) \end{array} \right\} \Rightarrow F \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ sur } I, \text{ et } F'(t) = \frac{\partial f}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y} y'(t) + \frac{\partial f}{\partial z} z'(t)$$

Si x, y, z dépendent de 2 ou 3... variables, on a le même résultat en remplaçant toutes les dérivées par des dérivées partielles.

26-3 Extrémums d'une fonction $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$(x, y) \rightarrow z = f(x, y)$, une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Pour chercher ses extrémums :

- On cherche les points critiques, c'est à dire les points qui vérifient :
$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases}$$

Les extrémums sont à chercher parmi ces points critiques.

- En chaque point critique (x_0, y_0) , on calcule :
$$\begin{cases} r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \\ s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \\ t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{cases}$$
 - Si $s^2 - rt < 0$ (x_0, y_0) est un extrémum (minimum pour $r > 0$, maximum pour $r < 0$)
 - Si $s^2 - rt > 0$ (x_0, y_0) est un col
 - Si $s^2 - rt = 0$ on ne peut pas conclure, il faut étudier « à la main » le signe de $f(x, y) - f(x_0, y_0)$

27 Fonctions (ou suites) à valeur dans $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$

27-1 Limite et continuité

On peut toujours considérer que ce sont n fonctions (ou suites) « coordonnées » ou « composantes » à valeur dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, ou même dans le deuxième cas, $2n$ fonctions (ou suites) « coordonnées » ou « composantes » à valeur dans $\mathbb{R}$. Les notions de limite, de continuité, de dérivabilité (...) se ramènent aux propriétés équivalentes sur chacune des composantes.

27-2 Fonction $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, classe $\mathcal{C}^1$

Définition : La **matrice jacobienne** de f est, avec ici $n = 3$ et $p = 2$:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \end{pmatrix} = J_f$$

C'est la matrice dans la base canonique de la différentielle de f au point considéré.

Théorème : $\left. \begin{array}{l} f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p \text{ de classe } \mathcal{C}^1 \\ g: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q \text{ de classe } \mathcal{C}^1 \end{array} \right\} \Rightarrow g \circ f \text{ de classe } \mathcal{C}^1 \text{ et : } J_{g \circ f} = J_g \times J_f$

27-3 Fonction $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, classe $\mathcal{C}^1$

Définition : La matrice jacobienne de f en un point est alors carrée d'ordre n .

Le **jacobien** de f en ce point est le déterminant de la matrice jacobienne.

Théorème : En un point où le jacobien de f est non nul, f définit localement une bijection et le jacobien de f^{-1} est l'inverse du jacobien de f .

Les ∂ ne se pseudo-simplifient pas!

Ainsi $\frac{\partial z}{\partial y} \times \frac{\partial y}{\partial x}$ ne vaut pas en général $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{1}{\frac{\partial y}{\partial x}}$ n'est pas $\frac{\partial x}{\partial y}$

28 Equations et systèmes différentiels

Notons d'abord qu'on résout une équation ou un système différentiels sur un **intervalle**.

28-1 Généralités

a) Recollement de solutions

Pour recoller en c les solutions sur deux intervalles, f sur $]a, c[$ et g sur $]c, b[$ il faut chercher à évaluer :

- les limites (finies) de f et g en c
- les limites (finies) de f' et g' en c
- et éventuellement les limites (finies) de f'' et g'' en c pour une équation différentielle du second ordre.

b) Equation différentielle linéaire

Une équation différentielle linéaire

- du premier ordre est de la forme $a(t)y' + b(t)y = g(t)$
- du second ordre est de la forme $a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = g(t)$

$g(t)$ est appelé le second membre.

Les équation homogènes associées sont respectivement :

- $a(t)y' + b(t)y = 0$
- $a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = 0$

Pour une équation différentielle linéaire, la solution générale est toujours la somme de la solution générale de l'équation sans second membre, appelée aussi équation homogène associée, et d'une solution particulière de l'équation avec second membre.

D'où l'importance de connaître une telle solution particulière.

On ne tient compte des conditions initiales que lorsqu'on a obtenu la solution générale de l'équation (ou du système) **avec** second membre.

Sur un intervalle convenable, la solution générale de l'équation sans second membre est un espace vectoriel de dimension 1 pour une équation différentielle linéaire du premier ordre et 2 pour une équation différentielle linéaire du second ordre.

c) Courbe intégrale

Si $y(x)$ est solution d'une certaine équation différentielle, la courbe $y = y(x)$ est dite **courbe intégrale** de cette équation différentielle.

28-2 Equation Différentielle Non Linéaire du premier ordre

On ne dispose d'aucun théorème sur les équations différentielles non linéaires ...

- En général, elle est à variables séparables, $f(t) dt = g(y) dy \Rightarrow \int f(t) dt = \int g(y) dy + K$
C'est le seul cas que l'on doit savoir traiter.
- Sinon, il faut se laisser guider par l'énoncé !

28-3 Equation Différentielle Linéaire du premier ordre

- Sans second membre $a(t)y' + b(t)y = 0 \Rightarrow y(t) = Ke^{-\int \frac{b(t)}{a(t)} dt}$ sur un intervalle I où a et b sont continues et où a ne s'annule pas. K étant un réel arbitraire.
- Avec second membre $a(t)y' + b(t)y = c(t)$ sur un intervalle I où a, b et c sont continues et où a ne s'annule pas.

Il ne nous manque qu'une solution particulière : toute solution particulière est bonne à prendre !

On peut, faute de mieux, chercher une solution particulière par la variation de la constante :

$$z(t) = K(t)y(t) \quad \text{où} \quad y(t) = e^{-\int \frac{b(t)}{a(t)} dt}$$

On reste en calcul formel le plus longtemps possible : les termes en $y(t)$ disparaissent.

La variation de la constante n'est pas un procédé miraculeux ! Elle peut donner des calculs longs et difficiles. On la réserve donc au cas où **on n'a pas d'autre procédé** pour obtenir une telle solution particulière.

28-4 Equation Différentielle Linéaire du second ordre à coefficients constants

- Sans second membre $ay'' + by' + cy = 0$ on résout l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$
Si on a :

- Deux racines distinctes, la solution est : $y(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$
- Une racine double : $y(t) = (\lambda t + \mu)e^{rt}$
- Deux racines complexes : $r = \alpha \pm i\beta$ et dans le cas où on cherche les solutions sur $\mathbb{R}$:
 $y(t) = (\lambda \cos \beta t + \mu \sin \beta t)e^{\alpha t} = (k \cos \beta(t - t_0))e^{\alpha t}$

- Avec second membre $ay'' + by' + cy = P(t)e^{kt}$, où P est un polynôme.

On cherche une solution particulière de la forme :

- $Q(t)e^{kt}$ si k n'est pas racine de l'équation caractéristique
- $tQ(t)e^{kt}$ si k racine simple de l'équation caractéristique
- $t^2Q(t)e^{kt}$ si k racine double de l'équation caractéristique.

avec $Q(t)$ un polynôme arbitraire de même degré que P .

28-5 Equation Différentielle Linéaire du second ordre

- Sans second membre $a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = 0$ sur un intervalle I où a, b et c sont continues et où a ne s'annule pas, il faut se laisser guider par l'énoncé pour trouver une première solution.

Si a, b, c sont des polynômes, on peut chercher une solution polynomiale en cherchant d'abord une condition nécessaire sur le degré.

- Avec ou sans second membre, en ayant une solution $y(t)$ de l'équation sans second membre, on peut chercher les solutions de la forme $z(t) = K(t)y(t)$ (Variation de la constante, à réserver au cas où on n'a pas d'autre procédé).

On obtient une équation différentielle linéaire du premier ordre en $K'(t)$ avec ou sans second membre selon les cas.

En pratique, on mène le calcul de façon théorique le plus longtemps possible.

- On ne cherche une solution sous forme de série entière qu'à la demande de l'énoncé.

28-6 Système Différentiel Linéaire du premier ordre

On ne traite que les systèmes à coefficients constants $X'(t) = AX(t)$ où A est une matrice carrée d'ordre n

et $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$ ou $X'(t) = AX(t) + B(t)$, où $B(t)$ est un vecteur second membre.

a) Cas sans second membre

- Dans le cas où A est diagonalisable, on note $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ les valeurs propres et $(U_1, U_2, \dots, U_n)$ une base de vecteurs propres associés. Alors

$$X(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} U_1 + \alpha_2 e^{\lambda_2 t} U_2 + \dots + \alpha_n e^{\lambda_n t} U_n$$

- Dans le cas où A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ mais pas sur $\mathbb{R}$ sur lequel on cherche les solutions, pour chaque couple de valeurs propres non réelles, on peut directement remplacer
 - $\alpha e^{\lambda t} U + \bar{\alpha} e^{\bar{\lambda} t} \bar{U}$ par
 - $\beta \operatorname{Re}(e^{\lambda t} U) + \gamma \operatorname{Im}(e^{\lambda t} U)$ avec β et γ réels
- Dans le cas où A est triangularisable, non diagonalisable, on considère P de passage telle que $T = P^{-1}AP$ avec T triangulaire supérieure.
 - On pose $X(t) = PY(t)$ on obtient $X'(t) = PY'(t)$ car P est constant.
 - On reporte dans le système différentiel et on obtient $Y'(t) = TY(t)$.
 - On résout ce système en résolvant la dernière équation et en remontant équation par équation.
 - Enfin, $X(t) = PY(t)$ fournit le résultat.

b) Cas avec second membre

Dans tous les cas, il faut considérer une matrice de passage P avec $D = P^{-1}AP$ ou $T = P^{-1}AP$ selon la diagonalisabilité ou pas. On obtient

- $Y'(t) = DY(t) + P^{-1}B(t)$ ou
- $Y'(t) = TY(t) + P^{-1}B(t)$ selon les cas.
- On résout équation par équation le système obtenu.

28-7 Système autonome de 2 équations différentielles

$\left. \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = \varphi(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = \psi(x, y) \end{array} \right\}$ avec φ et ψ continues sur $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$, est un système autonome de deux équations différentielles.

- On peut essayer de l'intégrer en passant en complexes, $z = x + iy$, en polaires ou en suivant les indications de l'énoncé.
- On peut aussi le transformer en équation différentielle plus classique $\frac{dy}{dx} = \frac{\psi(x, y)}{\varphi(x, y)}$
- Réciproquement, une équation différentielle $\frac{dy}{dx} = \frac{\psi(x, y)}{\varphi(x, y)}$ peut se transformer en système autonome en « ajoutant » du temps « t »... à condition, bien sûr, que ce système autonome soit facile à intégrer!

29 Barycentre

29-1 Barycentre de p points pondérés

$(A_1, A_2, \dots, A_p)$, p points affectés de coefficients : $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)$

- Si $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_p = 0$, $\sum_{i=1}^p \alpha_i \overrightarrow{MA_i}$ est un vecteur constant.

- Si $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_p \neq 0$, $\overrightarrow{MG} = \frac{\sum_{i=1}^p \alpha_i \overrightarrow{MA_i}}{\sum_{i=1}^p \alpha_i}$ définit un unique point G barycentre des (A_i, α_i)

29-2 Associativité du barycentre

Théorème : (sous réserve que les barycentres utilisés existent)

G_1 barycentre de (A, α) et (B, β)

Alors le barycentre de $(G_1, \alpha + \beta)$, et (C, γ) est celui de (A, α) , (B, β) , (C, γ)

30 Isométries

Théorème : Un endomorphisme est une isométrie vectorielle si et seulement si sa matrice dans une base orthonormale est orthogonale.

Les matrices orthogonales sont page 20.

Théorème : Une application affine est une isométrie affine si et seulement si l'application linéaire associée est une isométrie vectorielle.

30-1 Symétries orthogonales

Théorème : Une **isométrie vectorielle** est une symétrie orthogonale $\Leftrightarrow$ Sa matrice dans une base orthonormale est symétrique.

La transformation est alors la symétrie orthogonale par rapport à l'ensemble des vecteurs invariants. On retrouve ces cas dans les paragraphes suivants.

Théorème : Une **isométrie affine** est une symétrie orthogonale $\Leftrightarrow$ l'isométrie vectorielle associée est une isométrie vectorielle **et** il y a des points fixes.

La transformation est alors la symétrie orthogonale par rapport à l'ensemble des points fixes.

Dans le cas d'une symétrie orthogonale dans le plan ou l'espace **affine**, la matrice de l'isométrie vectorielle associée est encore orthogonale, mais on observera que ça n'est plus une condition suffisante. Il est nécessaire d'avoir des points fixes pour avoir une symétrie affine.

30-2 Recherche d'une symétrie orthogonale d'éléments géométriques donnés

a) Isométrie vectorielle

On cherche les expressions de la symétrie orthogonale par rapport à une droite vectorielle Δ ou à un plan vectoriel Π .

On écrit que $\frac{\vec{u} + \vec{u}'}{2} \in \Delta$ ou Π et que $\vec{u}' - \vec{u}$ appartient à l'orthogonal de Δ ou Π .

b) Isométrie affine

On cherche les expressions de la symétrie orthogonale par rapport à la droite D ou au plan P .

On écrit que le milieu du segment MM' appartient à D ou à P et que $\overrightarrow{MM'}$ appartient à l'orthogonal de la direction de D ou P .

30-3 Identification des Isométries Vectorielles

a) symétries orthogonales

Si la matrice d'une isométrie vectorielle dans une base orthonormale est symétrique, l'isométrie vectorielle est une symétrie orthogonale.

C'est la symétrie orthogonale par rapport à l'ensemble des vecteurs invariants.

b) Isométries vectorielles du plan

Dans une base orthonormale, la matrice est orthogonale.

- Isométrie directe : le déterminant vaut 1.

C'est une rotation d'angle θ . La matrice est :
$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Si $\theta = 0$, c'est l'identité, et si $\theta = \pi$, c'est « moins l'identité », la symétrie centrale.

- Isométrie indirecte : le déterminant vaut -1.

C'est une symétrie orthogonale par rapport à la droite $D_{\frac{\theta}{2}}$ tournée de $\frac{\theta}{2}$ par rapport à l'axe Ox .

La matrice est :
$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

c) Isométries vectorielles de l'espace

Dans une base orthonormale, la matrice est orthogonale.

- Isométrie directe : le déterminant vaut 1, le troisième vecteur est le produit vectoriel des 2 premiers.

C'est l'identité ou une rotation d'axe dirigé par un vecteur propre associé à 1 : $\vec{e}_1$ et d'angle θ .

On trouve θ ,

- en cherchant $\cos \theta$ par la trace qui vaut $1 + 2 \cos \theta$
- en cherchant le signe de $\sin \theta$ qui est celui de $\det(\vec{e}_1, \vec{u}, f(\vec{u}))$, avec $\vec{u}$, un vecteur quelconque, non colinéaire à $\vec{e}_1$.

Si $\theta = 0$, c'est l'identité, et si $\theta = \pi$, c'est la symétrie orthogonale par rapport à l'axe. Cette isométrie a, en principe, déjà été identifiée comme symétrie orthogonale.

- Isométrie indirecte : le déterminant vaut -1, le troisième vecteur est l'opposé du produit vectoriel des 2 premiers.

On cherche la trace :

- La trace vaut 1, ce qui revient à ce que 1 soit valeur propre.
C'est une symétrie orthogonale par rapport au plan propre pour la valeur propre 1.
- La trace ne vaut pas 1, 1 n'est pas valeur propre, elle vaut $-1 + 2 \cos \theta$.
C'est la composée
 - ◊ d'une rotation d'angle θ et d'axe dirigé par un vecteur propre associé à la valeur propre -1 et
 - ◊ d'une symétrie par rapport au plan orthogonal à l'axe de la rotation.

Le signe de $\sin \theta$ se trouve comme dans le cas d'une isométrie directe.

30-4 Identification des Isométries Affines

L'isométrie vectorielle associée s'obtient en « éliminant » les constantes. On regarde si cette isométrie vectorielle n'est pas une symétrie orthogonale.

On cherche ensuite les points fixes de l'isométrie affine.

a) Isométries affines planes

- Il y a un ou plusieurs point fixes.

L'isométrie a la même description géométrique que l'isométrie vectorielle associée, « recentrée » en un point fixe.

- Il n'y a pas de points fixes.

L'isométrie vectorielle associée est une symétrie orthogonale par rapport à une droite vectorielle Δ .

L'isométrie affine est la composée d'une symétrie orthogonale par rapport à une droite D de direction Δ et d'une translation de vecteur $\vec{u}$.

On trouve D et le vecteur de la translation en cherchant les points M tels que $\overrightarrow{MM'} \in \Delta$.

On a alors : $\vec{u} = \overrightarrow{MM'}$

b) Isométries affines de l'espace

- Il y a un ou plusieurs point fixes.

L'isométrie a la même description géométrique que l'isométrie vectorielle associée, « recentrée » en un point fixe.

- Il n'y a pas de points fixes.

- Isométrie directe : l'isométrie vectorielle associée est une rotation vectorielle.

L'isométrie affine est un vissage. L'axe et le vecteur de translation sont donnés en cherchant les points M tels que $\overrightarrow{MM'}$ appartient à l'axe de la rotation vectorielle associée.

- Isométrie indirecte :

L'isométrie vectorielle associée est une symétrie orthogonale par rapport à un plan vectoriel Π

L'isométrie affine est la composée d'une symétrie orthogonale par rapport à un plan P de direction Π et d'une translation de vecteur $\vec{u}$.

On trouve P et le vecteur de la translation en cherchant les points M tels que $\overrightarrow{MM'} \in \Pi$

On a alors : $\vec{u} = \overrightarrow{MM'}$

31 Droites et Plans affines

On travaille toujours ici dans un repère, choisi auparavant.

De plus, dès qu'il est question d'orthogonalité, de distance ou d'angle, ce repère est supposé **orthonormal**, sans que cela soit précisé à chaque fois.

31-1 Droites du plan

a) En coordonnées cartésiennes

La droite d'équation : $ax + by + c = 0$, $(a,b) \neq (0,0)$, est de vecteur directeur : $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ et de vecteur normal : $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

La droite passant par : $M_0 : \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ et de vecteur directeur $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ $(\alpha,\beta) \neq (0,0)$,
est d'équation : $\begin{vmatrix} x - x_0 & \alpha \\ y - y_0 & \beta \end{vmatrix} = 0$

b) En représentation paramétrique

La droite passant par $M_0 : \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ et de vecteur directeur $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$
est de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = x_0 + \lambda\alpha \\ y = y_0 + \lambda\beta \end{cases}$

c) Pour passer d'une représentation à une autre

- De paramétriques en cartésiennes : éliminer λ entre les deux équations.
- De cartésiennes en paramétriques : $\begin{cases} x = \lambda \\ y = -\frac{c}{b} - \frac{a}{b}\lambda \end{cases}$ par exemple pour $b \neq 0$.

31-2 Plans de l'espace affine

a) En coordonnées cartésiennes

Le plan d'équation : $ax + by + cz + d = 0$, est de vecteur normal : $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

Le plan passant par $M_0 : \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ et de vecteur normal $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est d'équation : $\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$.

b) En représentation paramétrique

Le plan passant par $M_0 : \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ et de plan directeur engendré par $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix}$ est de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = x_0 + \lambda\alpha + \mu\alpha' \\ y = y_0 + \lambda\beta + \mu\beta' \\ z = z_0 + \lambda\gamma + \mu\gamma' \end{cases}$

c) Pour passer d'une représentation à une autre

- De paramétriques en cartésiennes :
 - éliminer λ et μ entre les trois équations
 - ou bien directement l'équation est : $\begin{vmatrix} x - x_0 & \alpha & \alpha' \\ y - y_0 & \beta & \beta' \\ z - z_0 & \gamma & \gamma' \end{vmatrix} = 0$

- De cartésiennes en paramétriques :

- chercher un point $M_0 : \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ du plan,

- et chercher un vecteur $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ non nul, normal à $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ par exemple $\begin{pmatrix} -b \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$ si $(a,b) \neq (0,0)$

Le produit vectoriel de ces deux vecteurs fournit un second vecteur : $\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix}$ qui convient.

31-3 Droites de l'espace affine

- Par intersection de 2 plans d'équations : $\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$

Un vecteur directeur est $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$

- En paramétriques, la droite passant par $M_0 : \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ et de vecteur directeur $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ ($\alpha, \beta, \gamma \neq (0,0,0)$)
est de représentation paramétrique :
$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda\alpha \\ y = y_0 + \lambda\beta \\ z = z_0 + \lambda\gamma \end{cases}$$

31-4 Angles

On travaille toujours dans un repère orthonormal direct.

- l'angle de 2 vecteurs ou de 2 droites ou de 2 plans vérifie : $\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}$, applicable avec les vecteurs directeurs des droites ou les vecteurs normaux des plans selon les cas.
- pour l'angle entre une droite et un plan, il faut appliquer la formule précédente avec un vecteur directeur de la droite et un vecteur normal au plan.
Eventuellement le résultat est $\frac{\pi}{2} - \theta$ selon la question exacte posée.

31-5 Aires et Volumes élémentaires

On travaille dans un repère orthonormal.

- Dans le plan, l'aire **géométrique** du triangle A, B, C est : $\mathcal{A} = \frac{1}{2} \left| \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \right|$
C'est bien la valeur absolue du déterminant ...
- Dans l'espace, l'aire **géométrique** du triangle A, B, C est : $\mathcal{A} = \frac{1}{2} \left\| \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \right\|$
- Dans l'espace, le volume **géométrique** du parallélépipède construit sur (AB, AC, AD) est :
 $\mathcal{V} = \left| \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) \right|$

L'aire algébrique dépend à chaque fois de l'orientation choisie.

31-6 Distances

On travaille toujours dans un repère orthonormal.

- La distance de $M_0 : \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ à la droite d'équation $ax + by + c = 0$, est : $\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$
- La distance de $M_0 : \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ au plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$, est : $\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$
- La distance de 2 droites non parallèles de l'espace : $\begin{cases} D_1 : (A, \vec{u}) \\ D_2 : (B, \vec{v}) \end{cases}$ est : $\frac{|\det(\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v})|}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}$
- La distance d'un point M à une droite $D : (A, \vec{u})$ est donnée par : $\frac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$

32 Courbes Planes

32-1 Etude et Tracé de Courbes d'équation $y = f(x)$

a) Ensemble d'étude

On recherche l'ensemble de définition, les éventuelles parité ou imparité, la périodicité, pour aboutir à l'ensemble d'étude. On indiquera alors les transformations à appliquer à l'arc de courbe pour reconstituer la courbe entière.

b) Etude des variations

L'étude des variations se fait le plus souvent en étudiant le signe de la dérivée, obtenu en utilisant au besoin une fonction auxiliaire.

Pour le choix d'une fonction auxiliaire, il faut dans celle-ci « isoler » les éventuels

- logarithmes,
- et arctangentes

qui se transforment en fraction rationnelle quand on dérive.

c) Limites aux bornes

On cherche les limites à toutes les bornes de l'ensemble d'étude, avec au besoin,

- l'étude du prolongement par continuité en cas de limite finie,
- et l'étude locale de la dérivabilité en ces points, pour placer la tangente.

d) Inflexions

L'étude des inflexions se fait au moyen de la dérivée seconde : $f''(x_0) = 0$ caractérisent les points où il peut y avoir une inflexion géométrique.

Cette étude n'est faite qu'à la demande de l'énoncé.

Géométriquement, un point d'inflexion se caractérise par le fait que la courbe traverse sa tangente.

e) Branches infinies

On a une branche infinie quand : $f(x) \rightarrow \pm\infty$ ou $x \rightarrow \pm\infty$

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$, on a une asymptote verticale d'équation : $x = x_0$.
- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$, on a une asymptote horizontale d'équation : $y = b$.
- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$

Il faut continuer la recherche par : $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a$

- si $a = \pm\infty$, on a une branche parabolique de direction Oy .
- si $a = 0$, on a une branche parabolique de direction Ox .
- si a est fini non nul, il faut continuer la recherche par : $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax) = b$
 - ◇ si b est fini, on a une asymptote : $y = ax + b$
 - ◇ si b est infini, on a une branche parabolique de direction $y = ax$
 - ◇ si b n'a pas de limite, on a une branche infinie de direction asymptotique $y = ax$

f) Centre de symétrie

- Quand f est impaire, l'origine est centre de symétrie de la courbe représentative de f .
- Le point de coordonnées (a, b) est centre de symétrie de la courbe si et seulement si $f(x) + f(2a - x)$ est constant, il vaut alors $2b$.

g) Convexité

Une fonction 2 fois dérivable est convexe si et seulement si la dérivée seconde est positive.

Géométriquement, une courbe est convexe si et seulement si elle est en dessous de sa corde entre 2 points quelconques ou si et seulement si elle est au dessus de chacune de ses tangentes.

Une fonction convexe a sa concavité tournée vers le haut et une fonction concave a sa concavité tournée vers le bas.

La figure 16, page suivante, illustre la convexité.

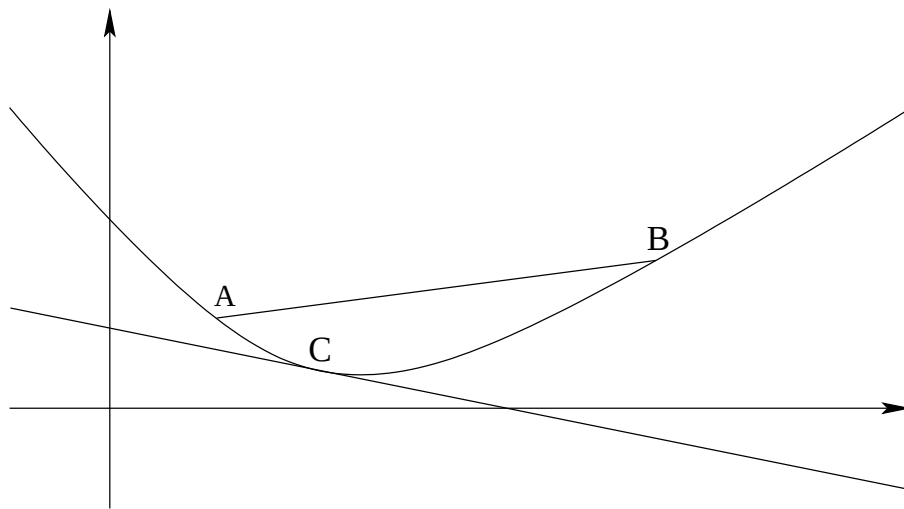


Figure 16 – Une fonction convexe est sous sa corde entre 2 points et au dessus de ses tangentes

32-2 Courbes planes en paramétriques

On a :
$$\begin{cases} x = f(t) = x(t) \\ y = g(t) = y(t) \end{cases}$$

a) Ensemble d'étude

On recherche les ensembles de définition, les éventuelles parité ou imparité, les périodicités, pour aboutir à l'ensemble d'étude. On indiquera alors les transformations à appliquer à l'arc de courbe pour reconstituer la courbe entière.

b) Variations

On étudie les variations de f et g .

Il faut construire le tableau de variation, qui contient les lignes $x'(t)$, $x(t)$, $y(t)$, $y'(t)$ et $\frac{y'(t)}{x'(t)}$ qui représente la pente de la tangente.

Remarquons que si $\frac{y'(t)}{x'(t)}$ est une forme indéterminée en un point, on peut la remplacer par sa limite qui représente encore la pente de la tangente.

c) Points stationnaires

Les points stationnaires vérifient :
$$\begin{cases} x'(t_0) = 0 \\ y'(t_0) = 0 \end{cases}$$

On appelle alors :

- p , avec $p \geq 1$, le premier rang où $\begin{pmatrix} x^{(p)}(t_0) \\ y^{(p)}(t_0) \end{pmatrix}$ est non nul, ce vecteur est alors tangent à la courbe.
- q , avec $q > p$, le premier rang où $\begin{pmatrix} x^{(q)}(t_0) \\ y^{(q)}(t_0) \end{pmatrix}$ est non colinéaire à $\begin{pmatrix} x^{(p)}(t_0) \\ y^{(p)}(t_0) \end{pmatrix}$

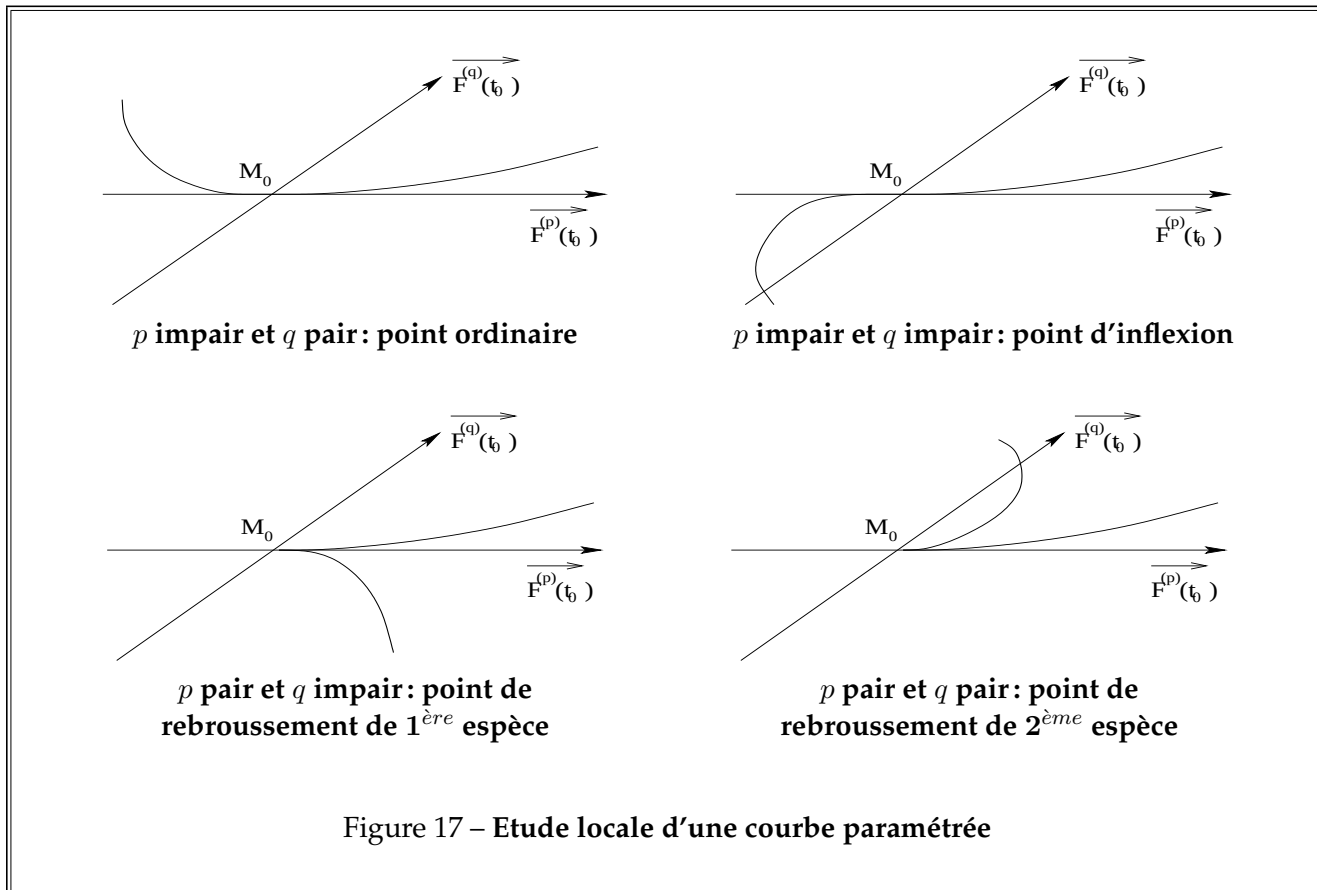
La courbe est toujours tangente à $\overrightarrow{F^{(p)}}(t_0)$,

la parité de p donne le signe de la coordonnée lorsque $t < t_0$,

la parité de q donne dans ce cas le signe de la deuxième coordonnée.

Dans les figures suivantes, le repère tracé est : $\left(M_0, \overrightarrow{F^{(p)}}(t_0), \overrightarrow{F^{(q)}}(t_0) \right)$.

On peut voir sur la figure 17, ci-dessous, l'ensemble des cas.



Remarquons que si la tangente est verticale ou horizontale, le calcul de q est inutile, les variations permettent alors de déterminer directement la nature du point.

d) Points d'inflexion

Les points d'inflexion géométrique vérifient nécessairement $\begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix} = 0$.

On ne fait cette étude qu'à la demande de l'énoncé.

e) Branches infinies

L'étude des branches infinies ne pose de problème qu'au cas où f et g tendent vers l'infini.

- Si $y(t) \rightarrow \pm\infty$, et $x(t) \rightarrow l$, quand $t \rightarrow t_0$: on a une asymptote verticale d'équation $x = l$.
- Si $x(t) \rightarrow \pm\infty$, et $y(t) \rightarrow l$, quand $t \rightarrow t_0$: on a une asymptote horizontale d'équation $y = l$.
- Si $x(t)$ et $y(t) \rightarrow \pm\infty$, quand $t \rightarrow t_0$, on calcule $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y(t)}{x(t)}$ appelée a :
 - si il n'y a pas de limite, on ne dit rien de plus,
 - si $a = \pm\infty$, on a une branche parabolique de direction Oy ,
 - si $a = 0$, on a une branche parabolique de direction Ox ,
 - dans les autres cas, on calcule $\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) - ax(t)$ appelée b :
 - ◊ si il n'y a pas de limite, on a une branche infinie de direction asymptotique $y = ax$
 - ◊ si $b = \pm\infty$, on a une branche parabolique de direction $y = ax$
 - ◊ dans les autres cas, on a une asymptote $y = ax + b$

32-3 Courbes planes en polaires

Il s'agit d'étudier les courbes définies en coordonnées polaires par : $\rho = f(\theta) = \rho(\theta)$

a) Ensemble d'étude

On cherche l'ensemble de définition, la périodicité éventuelle, on obtient un premier intervalle : celui-ci doit être un multiple de la période et de 2π .

On cherche ensuite à réduire cet intervalle.

On essaye de comparer $\rho(\theta)$ à : $\rho(-\theta)$, $\rho(\theta + \pi)$, $\rho(\pi - \theta)$, et $\rho(\frac{\pi}{2} - \theta)$.

On en déduit l'ensemble d'étude et d'éventuelles symétries de la courbe.

b) Variations

On ne fait l'étude des variations de ρ par le signe de ρ' que si **si cette étude est simple !**

On peut très bien s'en passer pour tracer la courbe.

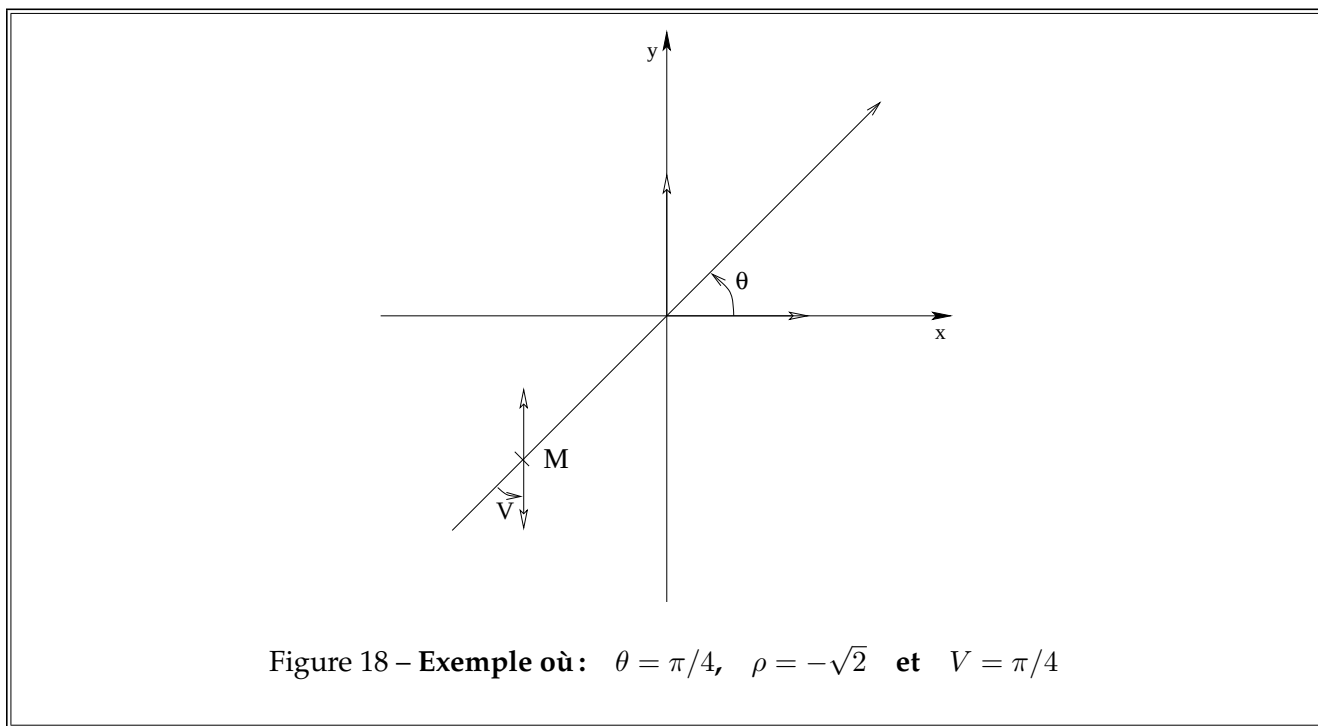
c) Signe de ρ

L'étude du signe de ρ est par contre **indispensable**.

Elle qui figure dans le tableau de « variations » et permet de déterminer dans quel cadran on trace la courbe.

Notons bien que, dans l'étude des courbes en polaires, ρ peut être **négatif**.

La figure 18, ci-dessous, montre un exemple de ρ négatif.



d) Tangentes

On étudie la tangente en quelques points particuliers, en utilisant : $\tan V = \frac{\rho}{\rho'}$, qui fournit l'angle, orienté, entre le rayon vecteur et la tangente.

En un point où $\rho(\theta_0) = 0$, la tangente à la courbe est toujours la droite $\theta = \theta_0$.

La figure 18, déjà vue, et la figure 19, page suivante, précisent les angles utilisés.

e) Branches infinies

Pour l'étude des branches infinies, on cherche : $\lim_{\theta \rightarrow \theta_0} \rho(\theta) \sin(\theta - \theta_0)$, qui est Y dans le repère tourné de θ_0 .

Tout se passe maintenant dans le repère tourné de θ_0 .

- s'il n'y a pas de limite, on a une branche infinie de direction asymptotique OX
- cette limite est infinie, on a une branche parabolique de direction OX

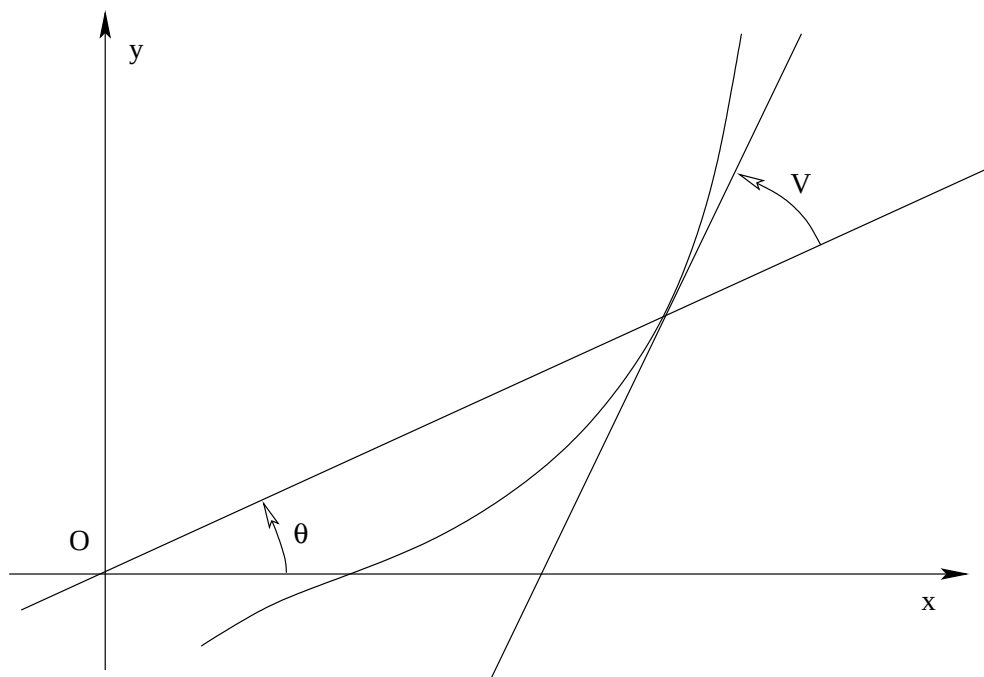


Figure 19 – Tangente en polaires : $\tan V = \frac{\rho}{\rho'}$

- cette limite est finie Y_0 , on a une asymptote d'équation $Y = Y_0$
La figure 20, ci-dessous, indique la position de l'asymptote.

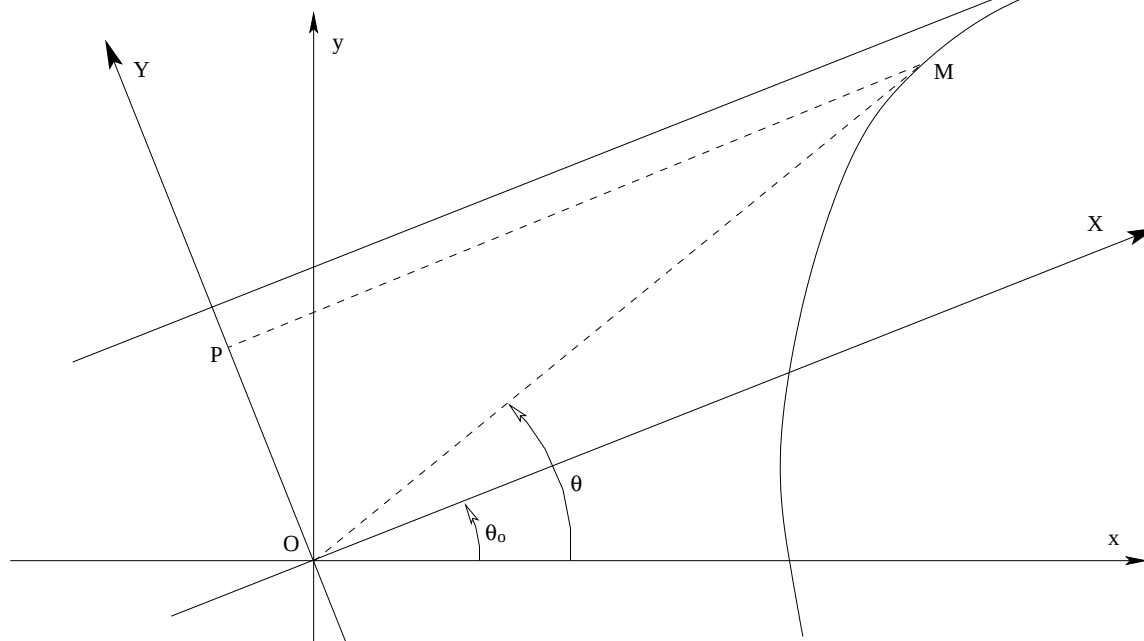


Figure 20 – Asymptote en polaires

f) Points d'inflexion

On cherche les points d'inflexion parmi les points où la courbure est nulle.

Ce sont les points qui vérifient : $\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho'' = 0$.

On ne fait cette étude qu'à la demande de l'énoncé.

32-4 Courbes usuelles en polaires

- On a les coniques d'équation $\rho = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$

Voir page 68.

- $\rho = \frac{A}{\cos(\theta - \theta_0)}$ est une droite Δ
- $\rho = A \cos(\theta - \theta_0)$ est le cercle passant par O de diamètre A et de centre sur la droite $\theta = \theta_0$

33 Courbure et Rayon de Courbure

33-1 Rayon de courbure d'une courbe plane

Définition : s , l'**abscisse curviligne** dans le sens des t ou θ croissants vérifie, selon les cas :

$$ds = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\theta$$

Définition : $(\Omega, \vec{T}, \vec{N})$ est le **repère de Frenet** au point Ω avec : $\vec{T} = \frac{d\vec{OM}}{ds} = \frac{\frac{d\vec{OM}}{dt}}{\left\| \frac{d\vec{OM}}{dt} \right\|}$

et $(\vec{T}, \vec{N})$ est orthonormal direct.

Définition : Le **rayon de courbure** R , la **courbure** γ sont donnés par : $\frac{d\vec{T}}{ds} = \gamma \vec{N} = \frac{1}{R} \vec{N}$

et on a aussi : $\frac{d\vec{N}}{ds} = -\gamma \vec{T} = -\frac{1}{R} \vec{T}$

- $R > 0$, on tourne à gauche (la courbe est orientée)
- $R < 0$, on tourne à droite.

La convention est différente de celle des physiciens pour lesquels R est le rayon de courbure géométrique, c'est à dire qu'on a toujours, en physique, $R > 0$.

Définition : Le **centre de courbure** Ω est donné par : $\Omega = M + R\vec{N}$

La figure 21, page suivante, donne l'ensembles des éléments géométriques

33-2 Recherche de la courbure

Dans le cas paramétrique ou en polaire, il est utile de considérer la fonction angulaire associée φ qui est l'angle entre Ox et $\vec{T}$ d'où,

- en paramétriques, $\vec{T} : \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dx}{ds} \\ \frac{dy}{ds} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} / \frac{ds}{dt} \\ \frac{dy}{dt} / \frac{ds}{dt} \end{pmatrix}$ et $\vec{N} : \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}$
- en polaires, on a : $\varphi = \theta + V$

Théorème : Pour calculer la courbure ou le rayon de courbure, on utilise le plus souvent :

$$\gamma = \frac{d\varphi}{ds} \quad \text{ou bien} \quad R = \frac{ds}{d\varphi}$$

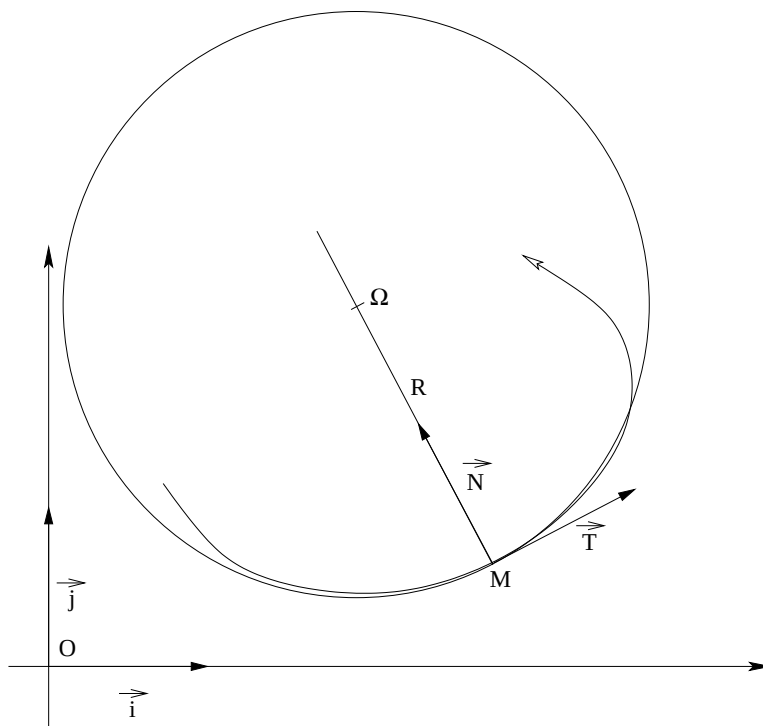


Figure 21 – Repère de Frenet et centre de courbure

- En paramétriques, on peut parfois « reconnaître » directement la fonction $\varphi(t)$ à partir des expressions de $\vec{T}$.

Si on ne reconnaît pas cette fonction, on a : $\tan \varphi = \frac{y'}{x'}$,

donc : $(1 + \tan^2 \varphi) \frac{d\varphi}{dt} = \left(\frac{y'}{x'}\right)'$ permet d'avoir $\frac{d\varphi}{dt}$

Alors, $R = \frac{ds}{d\varphi} = \frac{\frac{ds}{dt}}{\frac{d\varphi}{dt}}$ qui se calcule facilement.

- En polaires, $\varphi = \theta + V$ avec $\tan V = \frac{\rho}{\rho'}$, donc $\frac{d\varphi}{d\theta} = 1 + \frac{dV}{d\theta}$ se calcule facilement et :

$$R = \frac{ds}{d\varphi} = \frac{\frac{ds}{d\theta}}{\frac{d\varphi}{d\theta}}$$

a) Formules directes

On peut aussi rechercher, si on aime les calculs, des formules directes donnant courbure et rayon de courbure. Cela est parfois utile quand on cherche les éléments de courbure pour une valeur particulière du paramètre.

- En paramétriques : $\begin{cases} x = f(t) = x(t) \\ y = g(t) = y(t) \end{cases}$

$$\circ \vec{T} : \frac{1}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \quad \vec{N} : \frac{1}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \begin{pmatrix} -y' \\ x' \end{pmatrix}$$

$$\circ R = \frac{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{\begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}}$$

$$\circ \Omega : \begin{cases} X = x - y' \frac{x'^2 + y'^2}{\begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}} \\ Y = y + x' \frac{x'^2 + y'^2}{\begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}} \end{cases}$$

- En cartésiennes : $y = f(x)$, on considère qu'on a une courbe paramétrée par $\begin{cases} x = x \\ y = f(x) \end{cases}$.

Ceci évite d'avoir à mémoriser de nouvelles formules...

- En polaires : $\rho = \rho(\theta)$, $R = \frac{(\rho^2 + \rho'^2)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}$

b) Pour la valeur 0 du paramètre

Un simple développement limité fournit, par la formule de Taylor :

- en paramétriques, appliqué à $x(t)$ et $y(t)$, les valeurs de $x'(0)$, $y'(0)$, $x''(0)$ et $y''(0)$ nécessaires au calcul de la courbure.
- en polaires, appliqué à $\rho(\theta)$ les valeurs de $\rho(0)$, $\rho'(0)$ et $\rho''(0)$ qui donnent aussi facilement la courbure.

34 Surfaces : Généralités

34-1 Surfaces, plan tangent

Une surface peut être définie par une équation cartésienne : $F(x, y, z) = 0$

ou sous forme de nappe paramétrée : $\begin{cases} x = f(u, v) \\ y = g(u, v) \\ z = h(u, v) \end{cases}$

On passe d'une représentation paramétrique à une représentation cartésienne en éliminant les 2 paramètres entre les 3 équations. On obtient l'équation d'une surface qui contient la nappe paramétrée. Pour savoir si on a ajouté des points, il faut chercher si pour un point de la surface on peut retrouver les valeurs des paramètres qui correspondent à ce point.

a) Plan tangent à une surface définie en cartésiennes

Pour le plan tangent à (S) d'équation : $F(x, y, z) = 0$ en $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$, on se place dans le cas où F est de classe $\mathcal{C}^1$ au moins.

Le vecteur $\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \\ \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \end{pmatrix}$ est normal à la surface (repère orthonormal), si ce vecteur est non nul, le plan

tangent est donc d'équation : $(X - x_0) \frac{\partial F}{\partial x} + (Y - y_0) \frac{\partial F}{\partial y} + (Z - z_0) \frac{\partial F}{\partial z} = 0$.

b) Plan tangent à une nappe paramétrée

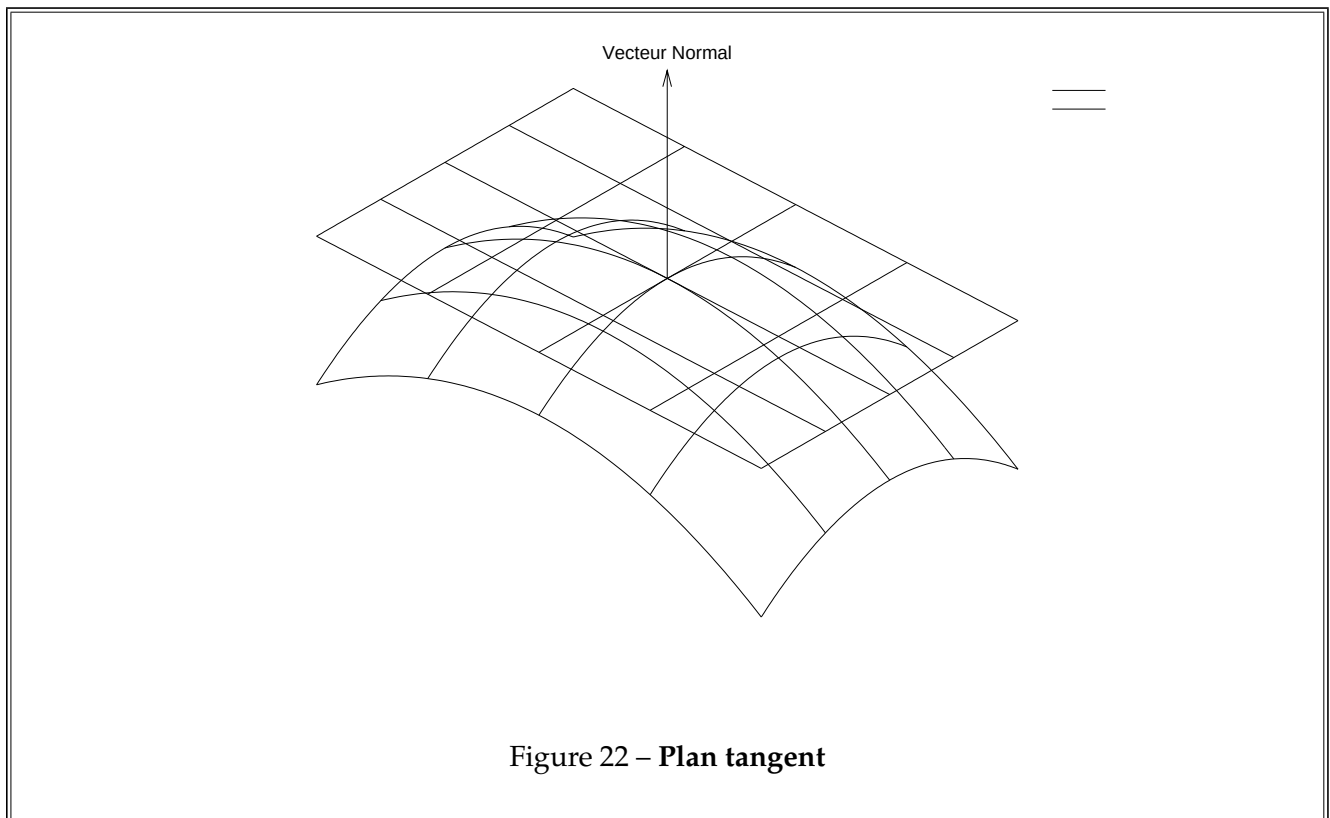
Pour le plan tangent à la nappe paramétrée : $\begin{cases} x = f(u, v) \\ y = g(u, v) \\ z = h(u, v) \end{cases}$ en $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ correspondant à (u_0, v_0) , on se place dans le cas où f, g, h sont de classe $\mathcal{C}^1$ au moins.

Les vecteurs : $\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial g}{\partial u}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial h}{\partial u}(u_0, v_0) \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial g}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial h}{\partial v}(u_0, v_0) \end{pmatrix}$ définissent la direction du plan tangent s'ils forment une famille libre.

Le plan tangent est donc normal au produit vectoriel : $\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} \\ \frac{\partial g}{\partial u} \\ \frac{\partial h}{\partial u} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial g}{\partial v} \\ \frac{\partial h}{\partial v} \end{pmatrix}.$

Si ce produit vectoriel n'est pas nul, le plan tangent est donc d'équation :
$$\begin{vmatrix} (X - x_0) & \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \\ (Y - y_0) & \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \\ (Z - z_0) & \frac{\partial h}{\partial u} & \frac{\partial h}{\partial v} \end{vmatrix} = 0$$

Le plan tangent à une surface est visualisé figure 22, ci-dessous.



34-2 Tangente à une courbe de l'espace

Une courbe de l'espace peut être définie par une intersection de surfaces :
$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

ou sous forme de représentation paramétrique :
$$\begin{cases} x = f(u) \\ y = g(u) \\ z = h(u) \end{cases}$$

- Dans le cas d'une intersection de surfaces, l'intersection des plans tangents, si elle est une droite, est la

tangente à la courbe au point considéré.

- Dans le cas d'une représentation paramétrique, le vecteur $\begin{pmatrix} f'(u_0) \\ g'(u_0) \\ h'(u_0) \end{pmatrix}$, s'il est non nul, dirige la tangente

qui est donc de représentation paramétrique
$$\begin{cases} X = x_0 + \lambda f'(u_0) \\ Y = y_0 + \lambda g'(u_0) \\ Z = z_0 + \lambda h'(u_0) \end{cases}$$

35 Cercles et Sphères

On travaille toujours dans un repère orthonormal.

35-1 Cercles dans le plan et sphères

a) Cercles dans le plan

- Le cercle de centre $\Omega : \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ et de rayon R est d'équation : $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$
- Le cercle de diamètre AB est d'équation : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

b) Sphères dans l'espace

- La sphère de centre $\Omega : \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ et de rayon R est d'équation : $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$
- La sphère de diamètre AB est d'équation : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

35-2 Cocyclicité

Théorème : (Angle au centre)

$$A, B \text{ et } C \text{ distincts appartiennent à un même cercle de centre } \Omega \Leftrightarrow \left| \widehat{(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B})} \right| = 2 \left| \widehat{(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})} \right|$$

Théorème : A, B, C et D distincts sont cocycliques ou alignés $\Leftrightarrow \widehat{(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC})} =_{[\pi]} \widehat{(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BD})}$

Théorème : Si a, b, c, d sont les affixes de A, B, C, D distincts dans le plan complexe, A, B, C et D appartiennent à un même cercle ou sont alignés $\Leftrightarrow \arg \left(\frac{c-b}{c-a} \right) =_{[\pi]} \arg \left(\frac{d-b}{d-a} \right)$

35-3 Cercles dans l'espace.

Le plus souvent, un cercle dans l'espace est donné par l'intersection d'une sphère et d'un plan. Cette intersection est un cercle, un point ou vide selon la distance du centre de la sphère au plan. On appelle **axe du cercle** la droite perpendiculaire au plan passant par le centre de la sphère.

L'intersection de deux sphères, selon la distance des centres par rapport à la somme des rayons, est aussi un cercle, un point ou vide.

36 Coniques

Une conique, éventuellement dégénérée, est une courbe plane ayant pour équation cartésienne $P(x, y) = 0$ avec $P(x, y)$ un polynôme du second degré.

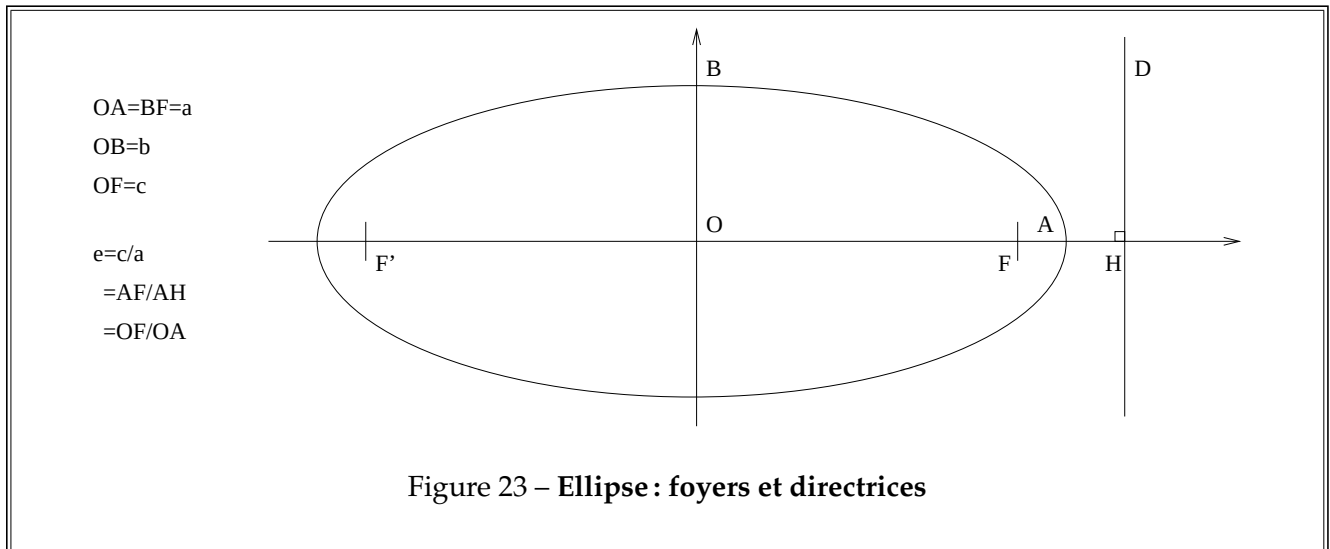
36-1 Ellipses

a) Equation réduite centrée

C'est : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

- a et b , avec $a > b > 0$, sont les demi grand axe et demi petit axe. Les foyers sont alors sur Ox
- $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, est la distance du centre aux foyers
- $e = \frac{c}{a}$, est l'excentricité

Les éléments de l'ellipse sont précisés figure 23, ci-dessous.



b) Equation par foyer F et directrice D

C'est : $\frac{d(M,F)}{d(M,D)} = e$, avec $e < 1$

c) Equation en coordonnées polaires

On a : $\rho = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$, un des foyers F étant à l'origine

- p est le paramètre de l'ellipse, distance du foyer à la directrice correspondante, e est l'excentricité
- l'axe focal est Ox
- On trouve les autres paramètres en écrivant $\rho(0) + \rho(\pi) = 2a$ qui donne $a = \frac{p}{1 - e^2}$

36-2 Paraboles

a) Equation réduite

C'est : $y^2 = 2px$, avec $p > 0$, le paramètre

- O est le sommet et Ox l'axe de symétrie
- l'excentricité e vaut 1 et l'unique foyer F est à la distance $\frac{p}{2}$ du sommet sur l'axe de symétrie

b) Equation par foyer F et directrice D

C'est : $\frac{d(M,F)}{d(M,D)} = e = 1$, La distance du foyer à la directrice est p .

c) Equation en coordonnées polaires

On a : $\rho = \frac{p}{1 + \cos \theta}$, le foyer F étant à l'origine.

- p est le paramètre de la parabole, distance du foyer à la directrice,

- l'axe de symétrie est Ox et contient le foyer.

36-3 Hyperboles

a) Equation réduite centrée

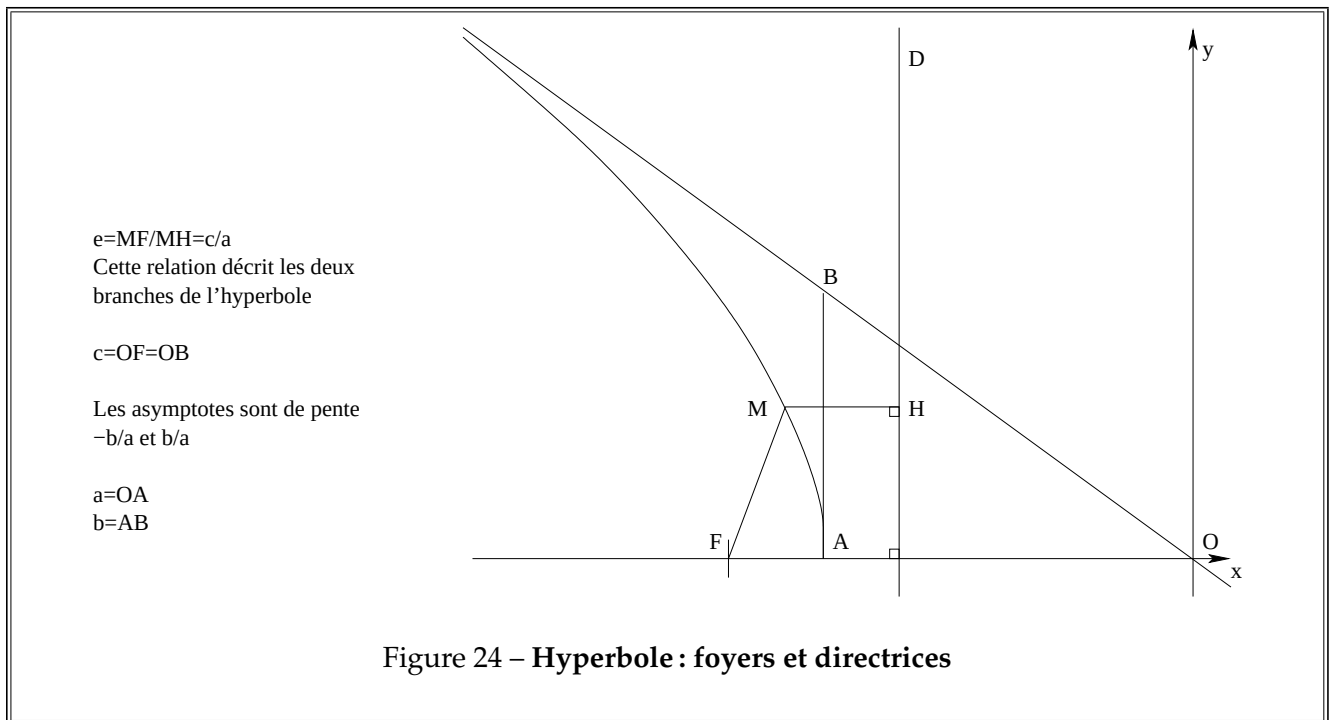
C'est : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

- les foyers sont alors sur Ox
- $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, est la distance du centre aux foyers
- $e = \frac{c}{a}$, est l'excentricité
- les asymptotes sont d'équation : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 0$
On les trouve en annulant le second membre dans l'équation réduite.

b) Equation par foyer F et directrice D

C'est : $\frac{d(M,F)}{d(M,D)} = e$, avec $e > 1$.

Les éléments de l'hyperbole sont précisés figure 24, ci-dessous.



c) Equation en coordonnées polaires

C'est : $\rho = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$ un des foyers F étant à l'origine

- p est le paramètre de l'hyperbole, distance du foyer à la directrice correspondante, e est l'excentricité
- l'axe focal est Ox

36-4 Identification d'une conique

On part d'un polynôme non nul du second degré en x et y

- cas où il n'y a pas de termes en xy
 - avaler, si possible, les termes en x et en y dans des carrés $\left(x^2 + ax = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4}\right)$
Cela revient à faire une translation de l'origine du repère.

- se ramener ensuite à une des formes canoniques décrites.
 - ◇ On trouve des paraboles, hyperboles et ellipses (ou cercles)
 - ◇ mais aussi des coniques dégénérées : couple de droites, droite, point, vide.
- cas où il y a des termes en xy
 - on repère la forme quadratique formée des seuls termes du second degré : $ax^2 + 2bxy + cy^2$
 on considère sa matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ qu'on diagonalise dans une base orthonormale directe de vecteurs propres, avec P la matrice de passage et λ et μ les deux valeurs propres.
 Cela revient à faire une rotation du repère.
 - alors $ax^2 + 2bxy + cy^2 = \lambda X^2 + \mu Y^2$ avec $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ qui nous sert aussi à transformer le reste de l'équation de la conique.
 - il n'y a donc plus de termes en xy dans ce repère. On est ramené au cas précédent.

37 Quadriques

Une quadrique, éventuellement dégénérée, est une surface ayant pour équation cartésienne $P(x,y,z) = 0$ avec $P(x,y,z)$ un polynôme du second degré.

37-1 Equations réduites

- **Ellipsoïde (E)** : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ avec $a > 0$ $b > 0$ $c > 0$
 Si $a = b$, il est de révolution d'axe Oz
 Il ne contient pas de droites.
- **Paraboloïde elliptique (PE)** : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2pz$ avec $a > 0$ $b > 0$
 Si $a = b$, il est de révolution d'axe Oz
 Il ne contient pas de droites.
- **Paraboloïde hyperbolique (PH)** : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2pz$ avec $a > 0$ $b > 0$
 Il n'est jamais de révolution, mais contient deux familles de droites obtenues en factorisant

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}, \text{ ce qui donne : } \begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = k \\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{2pz}{k} \end{cases} \text{ et : } \begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = k \\ \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \frac{2pz}{k} \end{cases} \text{ avec } k \text{ non nul.}$$

Par tout point, il passe deux droites distinctes tracées sur la surface, incluses également dans le plan tangent à ce point.

- **Hyperboloïde à 1 nappe (H1)** : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ avec $a > 0$ $b > 0$ $c > 0$
 Si $a = b$, il est de révolution d'axe Oz

Le cône asymptote est d'équation : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$

Il contient deux familles de droites obtenues en factorisant : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2}$, et $1 - \frac{y^2}{b^2}$

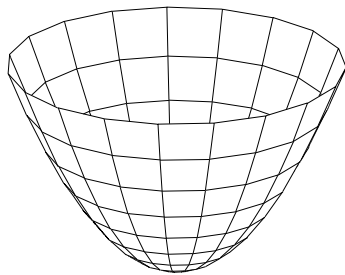
$$\text{ce qui donne : } \begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = k \left(1 - \frac{y}{b}\right) \\ \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = \frac{1}{k} \left(1 + \frac{y}{b}\right) \end{cases} \text{ et : } \begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = k \left(1 - \frac{y}{b}\right) \\ \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \frac{1}{k} \left(1 + \frac{y}{b}\right) \end{cases} \text{ avec } k \text{ non nul.}$$

Par tout point, il passe deux droites distinctes tracées sur la surface, incluses également dans le plan tangent à ce point.

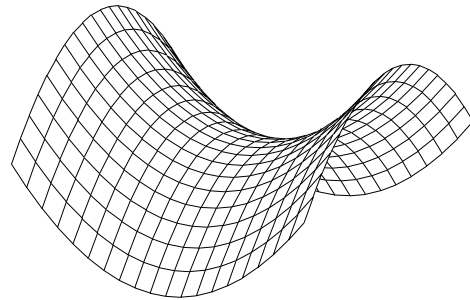
- **Hyperboloïde à 2 nappes (H2)** : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ avec $a > 0$ $b > 0$ $c > 0$
 Si $a = b$, il est de révolution d'axe Oz

Le cône asymptote est d'équation : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$
H2 ne contient pas de droites.

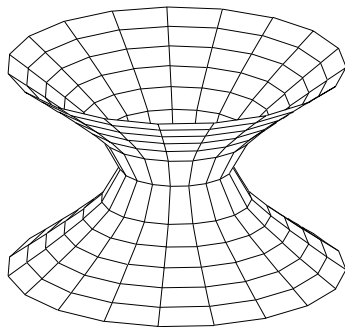
Sur la figure 25, ci-dessous, on a représenté les cinq quadriques propres.



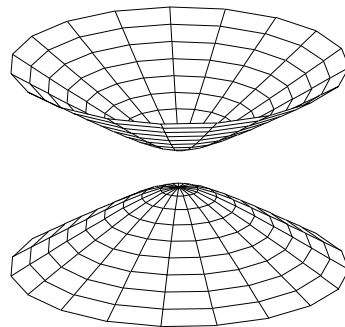
Paraboloïde Elliptique



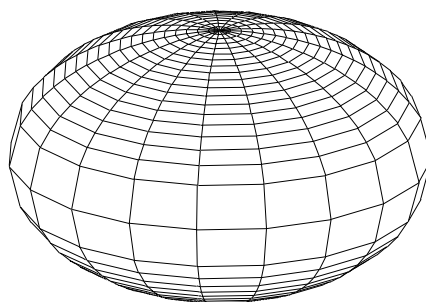
Paraboloïde Hyperbolique



Hyperboloïde à une nappe



Hyperboloïde à 2 nappes



Ellipsoïde

Figure 25 – Quadriques

37-2 Intersection avec un plan

	E	PE	PH	H1	H2
Ellipse	×	×		×	×
Parabole		×	×	×	×
Hyperbole			×	×	×
Deux droites			×	×	
Point	×	×			×
Vide	×	×			×

37-3 Identification d'une quadrique

On part d'un polynôme du second degré en x, y et z .

- cas où il n'y a de termes ni en xy , ni en xz ni en yz ,
 - avaler si possible les termes en x, y et en z dans des carrés $\left(x^2 + ax = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4}\right)$
Cela revient à faire une translation de l'origine du repère.
 - se ramener ensuite à une des formes canoniques décrites.
 - On trouve des paraboloides elliptiques et hyperboliques, hyperboloïdes à 1 ou 2 nappes et ellipsoïdes (ou sphères)
 - mais aussi des quadriques dégénérées: cylindres, cônes, ..., point, vide
- cas où il y a des termes en xy, xz ou yz ,
 - la forme quadratique est formée des termes du second degré: $ax^2 + 2bxy + 2cxz + dy^2 + 2eyz + fz^2$,
on considère sa matrice: $\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$, qu'on diagonalise dans une base orthonormale de vecteurs propres, avec P la matrice de passage et λ, μ et ν , les trois valeurs propres.
Si on a pris une base orthonormale directe, cela revient à faire une rotation du repère.
 - alors: $ax^2 + 2bxy + 2cxz + dy^2 + 2eyz + fz^2 = \lambda X^2 + \mu Y^2 + \nu Z^2$, avec $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$, qui nous sert aussi à transformer le reste de l'équation de la quadrique.
 - il n'y a donc plus de termes en xy, xz ou yz dans ce repère. On est ramené au cas précédent.

38 Surfaces de révolution, cylindres et cônes

38-1 Surfaces de révolution

Définition : Une **surface de révolution d'axe Δ** est formée d'une famille de cercles d'axe Δ

Un plan contenant l'axe de révolution est un **plan méridien**,
son intersection avec la surface est une **méridienne**.

La méridienne est symétrique par rapport à l'axe de révolution. On parle parfois de demi-méridienne.

Théorème : Une surface de révolution a une équation de la forme: $F(S, P) = 0$,
avec: $S(x, y, z) = R^2$, l'équation d'une sphère et $P(x, y, z) = k$, l'équation d'un plan.
L'axe de révolution est orthogonal à P passant par le centre de S .

Corollaire :

Dans le cas où l'axe est Oz la surface de révolution a une équation de la forme: $F(x^2 + y^2, z) = 0$

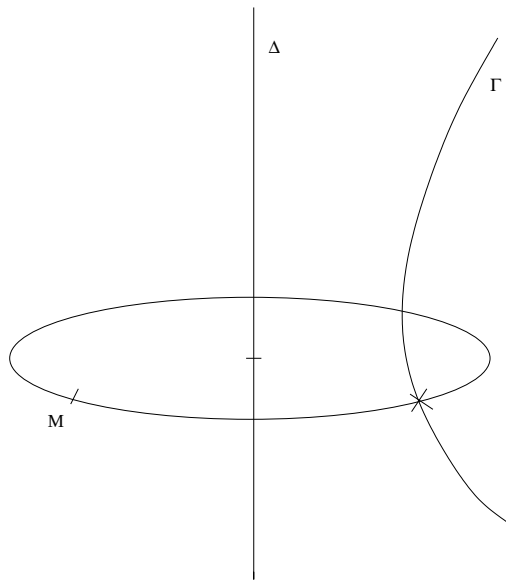


Figure 26 – Surface de révolution : axe et directrice

a) Surface de révolution Σ engendrée par la rotation de Γ autour de Δ

- faire une figure symbolique (figure 26, ci-dessous)

- partir d'un point **quelconque** de la surface Σ cherchée $M : \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$

- écrire qu'un point de Γ appartient à la fois

- à la sphère centrée sur un point arbitraire de Δ (choisi le plus simple possible) passant par M
- au plan perpendiculaire à Δ passant par M

- éliminer les paramètres, on obtient l'équation d'une surface Σ' de révolution qui contient Σ la surface cherchée.

Si Γ est donnée en paramétrique, un point de Γ correspond à une valeur du paramètre,

tandis que si Γ est donnée par intersection de surfaces, un point de Γ est repéré par $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$

b) Surface de révolution Σ d'axe Oz et de demi-méridienne $f(x, z) = 0$

- On reconstitue la méridienne complète $f(x, z) \times f(-x, z) = F(x^2, z) = 0$
- La surface est d'équation $F(x^2 + y^2, z) = 0$

38-2 Cylindres

Définition : Un **cylindre de direction** $\vec{u}$ est formée d'une famille de droites de direction $\vec{u}$

Ces droites sont les **génératrices**. Une courbe qui rencontre toutes les génératrices est une **directrice**.

L'intersection de la surface avec un plan orthogonal à la direction $\vec{u}$, est une **section droite** du cylindre.

Un cylindre n'est, en général, pas un cylindre de révolution!

Théorème : Un cylindre de direction $\vec{u}$ a une équation de la forme : $F(P_1, P_2) = 0$,

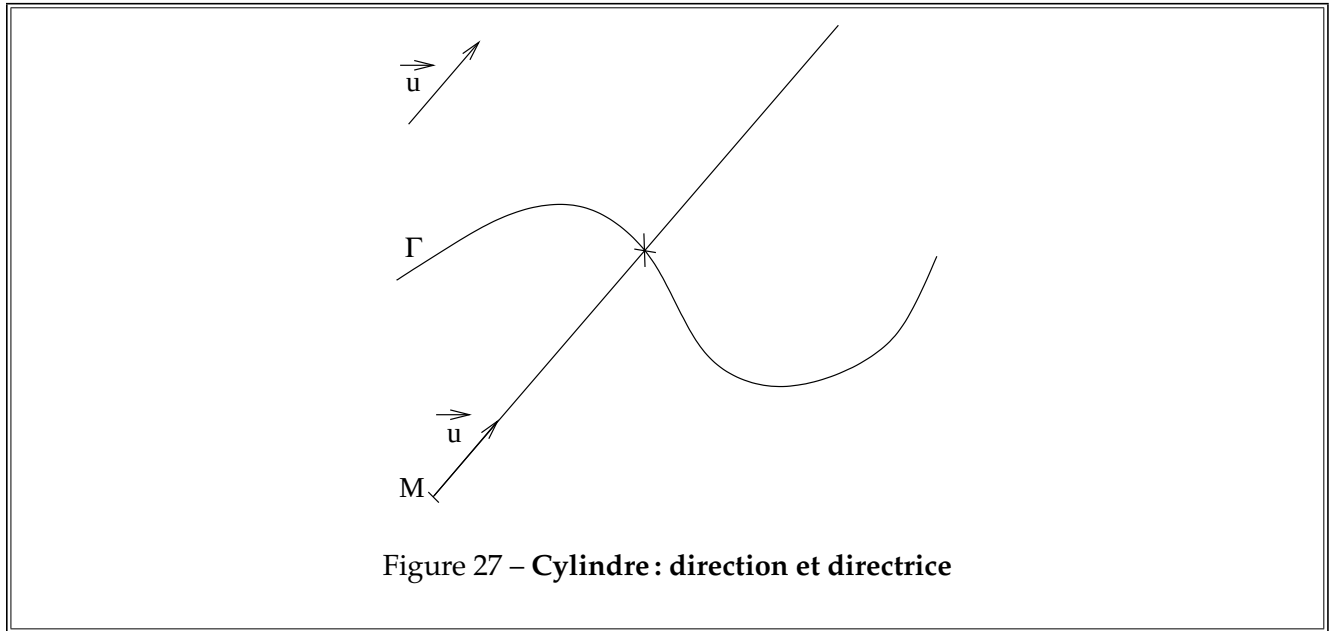
avec: $P_1(x,y,z) = k_1$, et $P_2(x,y,z) = k_2$, l'équation de deux plans.
De plus, $P_1 \cap P_2$ donne la direction $\vec{u}$ du cylindre.

Corollaire : Dans le cas où la direction est $\vec{k}$ le cylindre a une équation de la forme: $F(x,y) = 0$.

a) Cylindre de direction et de directrice donnés

On cherche le cylindre Σ de direction $\vec{u}$ et de directrice Γ

- faire une figure symbolique (figure 27, ci-dessous)



- partir d'un point **quelconque** de la surface Σ cherchée $M : \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$
- écrire que la droite (décrite en paramétrique) $(M, \vec{u})$ rencontre Γ
- éliminer les paramètres, on obtient l'équation d'un cylindre Σ' qui contient Σ le cylindre cherché.

b) Contour apparent

Pour le contour apparent de S , on écrit que le gradient de S en un point est normal à la direction du cylindre.

On note: $\vec{u} : \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$

On obtient le contour apparent par intersection de surfaces :

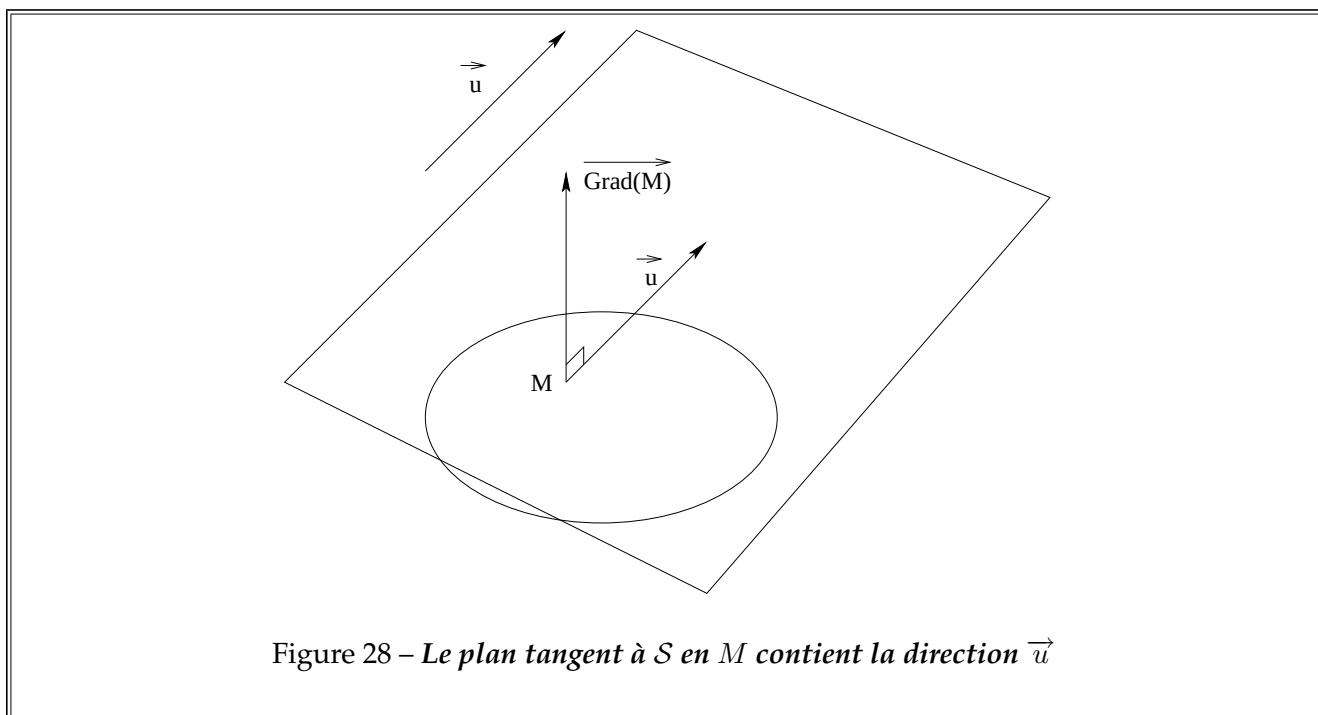
$$F(x,y,z) = 0$$

$$\alpha \frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) + \beta \frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z) + \gamma \frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) = 0$$

On n'hésitera pas à simplifier au maximum ces équations.

La figure 28, page suivante, illustre cette recherche.

Si le cylindre est circonscrit à une surface, on cherche le contour apparent, puis on cherche le cylindre de la direction donnée et de directrice ce contour apparent.



38-3 Cônes

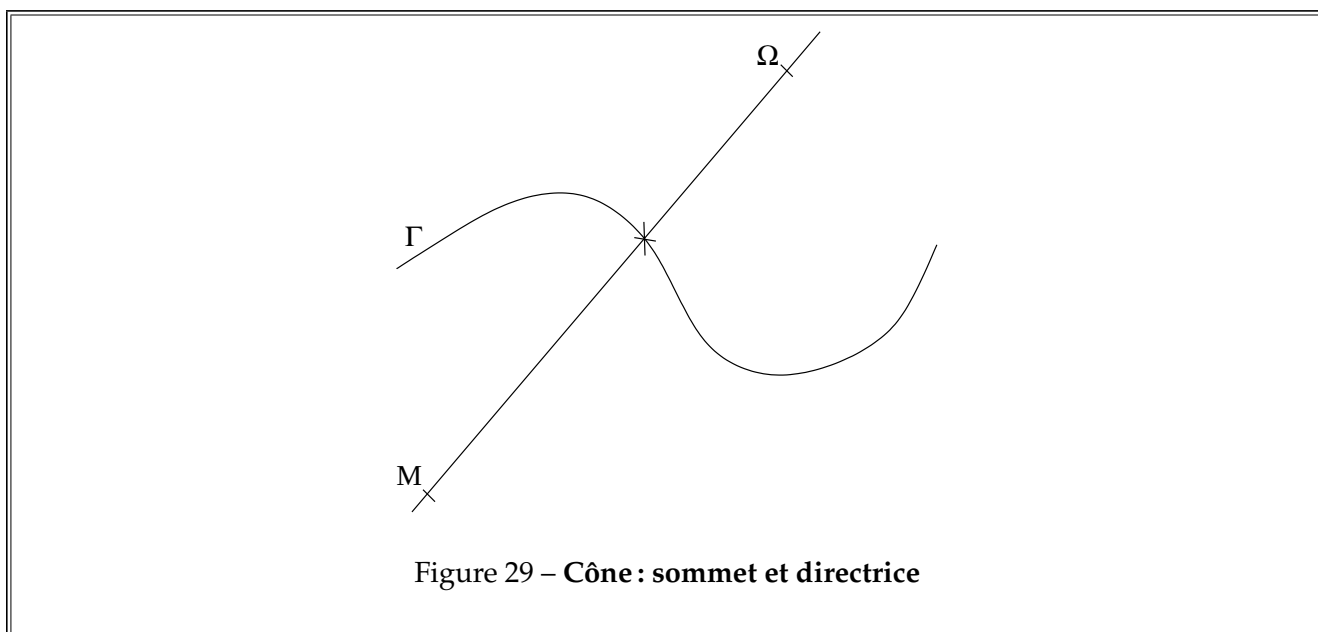
Définition : Une **cône de sommet** Ω est formée d'une famille de droites passant par Ω . Ces droites sont les **généatrices**. Une courbe qui rencontre toutes les génératrices est une **directrice**.

Un cône n'est, en général, pas un cône de révolution!

Théorème : Une surface d'équation cartésienne un polynôme en x, y, z est un cône de sommet O si et seulement si tous les monômes sont de même degré (degré cumulé en x, y, z).

a) Cône Σ de sommet Ω et de directrice Γ

- faire une figure symbolique (figure 29, ci-dessous)



- partir d'un point **quelconque** de la surface Σ cherchée $M : \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$
- écrire que la droite (décrite en paramétrique) (ΩM) rencontre Γ
- éliminer les paramètres, on obtient l'équation d'un cône Σ' qui contient Σ le cône cherché.

b) Contour apparent

Pour le contour apparent de S vu du point Ω , on écrit que le gradient de S en un de ses points P est normal au vecteur $\overrightarrow{\Omega P}$.

On note : $\Omega : \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

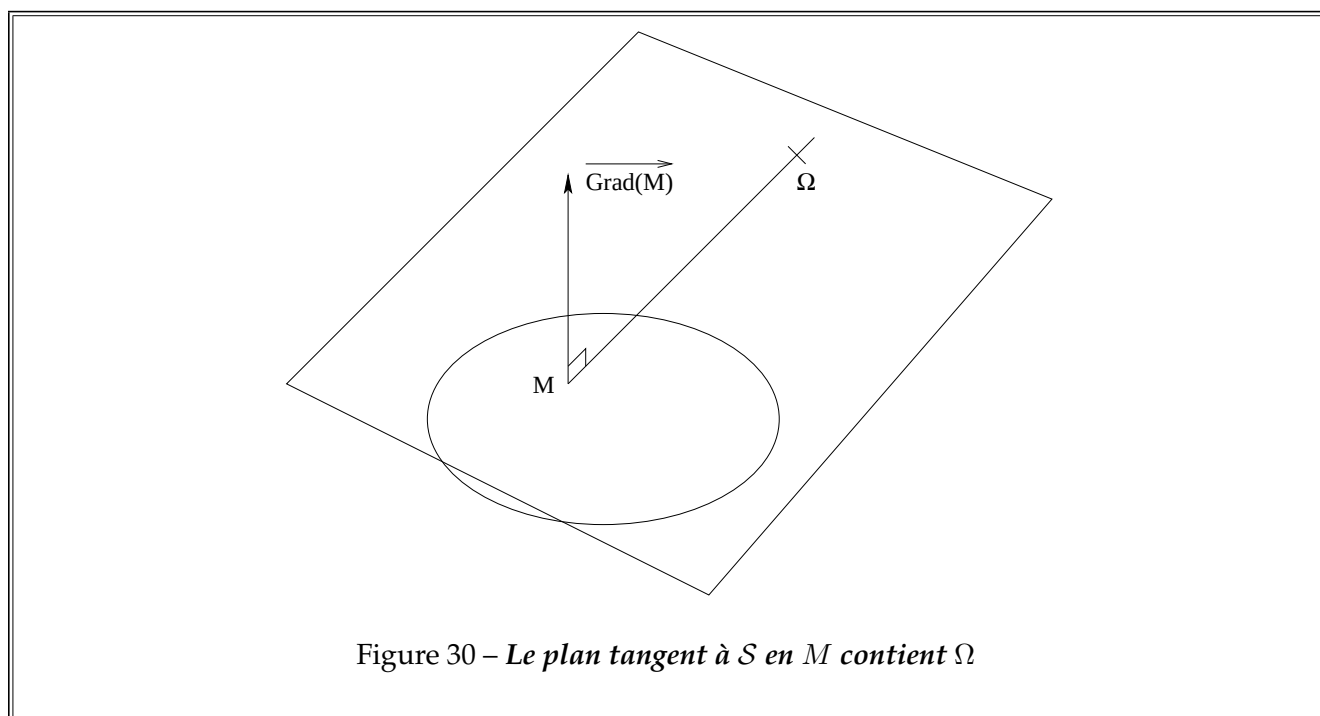
On obtient le contour apparent par intersection de surfaces :

$$F(x, y, z) = 0$$

$$(x - a) \frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) + (y - b) \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) + (z - c) \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) = 0$$

On n'hésitera pas à simplifier au maximum ces équations.

La figure 30, ci-dessous, illustre cette recherche.



Pour le cône circonscrit, on cherche d'abord le contour apparent puis le cône de sommet donné et de directrice ce contour apparent.

38-4 Cylindres et cônes de révolution

On ne cherche pas l'équation d'un cylindre ou d'un cône de révolution comme celle d'un cylindre ou d'un cône ni comme celle d'une surface de révolution!...

a) Cylindre de révolution

Pour un cylindre de révolution défini par son axe $D : (A, \vec{u})$ et son rayon R

On cherche l'ensemble des points M tels que la distance de M à D vaut R . (Voir Page 58)

On élève tout au carré pour enlever les valeurs absolues.

b) Cône de révolution

Pour un cône de révolution défini par son axe D dirigé par $\vec{u}$, son sommet Ω et son demi angle au sommet θ

On cherche l'ensemble des points M tels que l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{\Omega M})$ a pour mesure θ . (Voir Page 58)

On élève tout au carré pour enlever les valeurs absolues.

Maple

On présentera cet aide-mémoire sous forme de tableaux à trois colonnes : les mots-clefs, une description rapide de leur fonction et enfin, un exemple d'utilisation.

Rappelons qu'une erreur en Maple est le plus souvent à chercher **avant** l'endroit où Maple la détecte.

39 Bases

39-1 Manipulations de base

On ne confondra pas une **expression** et une **fonction**.

Par exemple : $\sin(t)$ est une expression de t , tandis que la fonction est : $\sin$.

; ou :	Exécution d'une commande avec ou sans affichage du résultat.	> 12*13;
+ - * /	Somme, différence, produit ou quotient d'expressions.	> (x+2)/t;
** ou ^	Exponentielle.	> 12**13;
&*	Produit de matrices ou vecteurs. Sans le &, Maple considère tous les produits comme commutatifs... De plus l'usage de <code>evalm</code> est indispensable pour avoir un affichage effectif des lignes et colonnes.	> evalm(P*(-1)&*A&*P);
iquo irem	Quotient et reste de la division des entiers.	> iquo(1732,13);
quo rem	Quotient et reste de la division euclidienne des polynômes (il faut préciser la variable).	> r:=rem(x^5,x^2+1,x);
!	Factorielle.	> 123!;
binomial	Coefficients binomiaux comme C_n^2	> binomial(2,n);
= < > <> <= >=	Opérateurs de comparaison, souvent utilisés dans un si ... alors ... sinon , ou dans une résolution d'équation ou inéquation.	> solve(x^2>1,x);
and or not	Opérateurs logiques, souvent utilisés dans un si ... alors ... sinon .	> evalb(a=1 or b=0);
@	Composée de fonctions (qui ne sont pas des expressions ...).	> f2:=f@f;
:=	Affectation, permet de donner une valeur à une variable.	> a:=(x+1)/(x-1);
'variable'	Permet de libérer, désaffecter une variable.	> a:='a';
->	Définition rapide d'une fonction (qui n'est toujours pas une expression).	> f:=x->x^2-1;f(2);
''	Variable valant le dernier résultat calculé.	> p:=(x+1)/x; > ''*2;

39-2 Constantes

Pi I infinity	Nombres π , i , et $+\infty$, on fera attention aux majuscules !	> Pi,pi; > evalf(Pi),evalf(pi);
---------------	---	------------------------------------

39-3 Sommes et produits

sum product	Calcul de toute somme ou produit indicés. On conseille d'utiliser des apostrophes.	> sum('1/(n^2)',n'=1..7); > sum('p',n'=0..infinity);
-------------	---	---

39-4 Fonctions d'évaluation

Les fonctions d'évaluation sont nombreuses et importantes, elles forcent Maple à effectuer une évaluation de la quantité afin de ne pas rester en calcul formel...

Ceci est très important car l'exécution d'une procédure ou d'un calcul n'est **pas du tout** la même selon que l'on travaille en calcul approché « flottant » ou en calcul formel « exact ». Quand on veut au final du calcul approché, il faut se mettre en calcul approché le plus tôt possible...

eval	Evaluation générale d'une expression. Cette instruction est surtout utilisée dans le corps des procédures pour forcer l'évaluation complète d'une expression.	> eval(Pi*3.14);
evalb	Evaluation d'une expression logique (booléenne), c'est une quantité vraie ou fausse, souvent utilisée dans un si... alors... sinon.	> evalb(x>=1);
evalf	Valeur approchée d'une expression, le nombre de chiffres significatifs est dans la variable Digits. Indispensable quand on ne veut pas que Maple reste inutilement en théorique.	> Digits:=50; > evalf(Pi/2);
evalc	Evaluation d'un complexe en partie réelle et partie imaginaire. Attention Maple considère a priori les variables libres comme complexes...	> evalc((2*I)^3);
evalm	Force l'évaluation d'un vecteur ou d'une matrice en ligne et colonnes, ce que Maple ne fait pas de lui même.	> evalm(A&*B);

39-5 Transformation générale d'expressions

subs	Substitue dans l'expression « p », l'expression « y » à la variable « x ».	> subs(x=y,p);
collect	Regroupe les termes d'une même puissance d'une expression par rapport à une variable.	> collect(p,x);
sort	Trie selon les puissances décroissantes une expression selon une variable.	> sort(p,x);
expand	Développe une expression polynomiale, trigonométrique, exponentielle ou logarithmique.	> expand((x-a)**7); > expand(sin(2*x)); > expand(ln((x+1)/(x-1))); > expand(exp(x+2*y));
combine options: trig exp ln power	Presque la fonction réciproque de expand. Regroupe les termes selon l'option choisie (linéarise avec trig...).	> combine(sin(x)^7,trig);
factor	Factorise une expression. Il faut souvent ajouter les éléments utilisés dans la factorisation, qu'on peut chercher avec solve.	> factor(x**2-2); > factor(x**2-2,sqrt(2)); > factor(x**2+2,sqrt(2)); > factor(x**2+2,{sqrt(2),I});
convert options: parfrac tan	Convert possède de nombreuses options pour transformer une expression, en particulier trigonométrique. Avec l'option parfrac, il décompose en « éléments simples » une fraction rationnelle. Il vaut mieux auparavant factoriser complètement le dénominateur.	> convert(p,tan); > convert(p,parfrac,x);

39-6 Simplification d'expressions

normal	Simplifie (un peu) les fractions rationnelles. Comme pour « convert », on a intérêt à factoriser le dénominateur avant la demande de simplification.	$p := (x^2 - 1) / (x^2 + 2x + 1);$ > normal(p);
simplify	Essaye de simplifier une expression, possède de nombreuses options... mais peut également s'utiliser sans option.	> simplify(p);

39-7 Structures de données

a..b	Intervalle de a à b. Utilisé dans les tracés de courbes et les intégrales par exemple.	> int(sin(t), t=0..Pi); > plot(sin(t), t=0..Pi);
{a,b,c} union intersect	Ensemble formé de a, b et c, et opérateurs d'union et d'intersection d'ensembles. Utilisé par exemple pour tracer plusieurs courbes sur un même graphe.	> E:=E union {a,b } > plot({sin(t),cos(t)}, t=0..Pi);
[a,b,c]	Liste formée de a, b et c. Utilisé par exemple pour tracer des courbes en paramétriques.	> plot([sin(t),cos(t),t=0..Pi], x=-2..2,y=-2..2);

40 Mathématiques usuelles

40-1 Fonctions mathématiques usuelles

Signalons que Maple possède de très nombreuses fonctions « usuelles » qui apparaissent lors d'une résolution d'équation, d'un calcul de primitive...

exp ln	Exponentielle et logarithmes. Maple les définit sur $\mathbb{C}$, comme la plupart des fonctions.	> exp(1); > ln(1+I);
sin cos tan	Sinus, cosinus et tangente.	> sin(Pi/2);
sinh cosh tanh	Sinus, cosinus et tangente hyperboliques.	> sinh(1);
arcsin arccos arctan	Arcsinus, arccosinus et arctangente.	> arctan(1);
abs	Valeur absolue ou module, selon qu'on est sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$.	> abs(3+4*I); > abs(-Pi);
Re Im	Partie réelle et imaginaire d'un complexe. Attention, pour Maple, a priori, une variable libre est complexe.	> Re(a+b*I);
conjugate	Conjugué d'un complexe.	> conjugate(1+I);
argument	Argument d'un nombre complexe.	> argument(1+I);

40-2 Limites et développements limités

limit	Calcul de limites d'une expression.	> limit(p,x=1); > limit(p,x=infinity);
series	Calcul du développement limité ou asymptotique d'une expression ; il faut préciser le point et l'ordre désiré...	> p:=series(p,x=1,5);
leadterm	Calcul du premier terme a priori non nul d'un développement limité. Quand il n'est pas nul, c'est un équivalent.	> series(leadterm(p),x=0,8);

40-3 Dérivées

diff	Dérivée d'une expression par rapport à la ou les variables spécifiées.	> diff(sin(x),x); > diff(sin(x),x,x);
D	Dérivée d'une fonction.	> D(sin);

40-4 Primitives et intégrales

int	Calcul d'une primitive (Maple n'introduit pas de constante), ou d'une intégrale, simple ou généralisée, d'une expression.	> int(p,x); > int(p,x=0..infinity);
Int	Forme « inerte » de la précédente. Pas de calcul.	> Int(p,x);
changevar et intparts du package student	Effectue un changement de variable ou une intégration par parties (indiquer la partie qu'on dérive) sur une intégrale inerte. Maple ne cherche donc pas à effectuer le calcul.	> changevar(t^2=u,Int(t/(t^2+1)),t); > intparts(Int(x^3*sin(x),x),x^3);

40-5 Résolution d'équations ou de systèmes d'équations

solve	Résolution de tous types d'équations et inéquations par rapport à une variable spécifiée. Mais, Maple ne donne pas nécessairement toutes les solutions...	> solve(a*x^2+2*a*x+1,x); > solve(a*x^2+2*a*x+1,a); > solve((sin(t)=cos(2*t)),t);
fsolve	Résolution approchée de tous types d'équations, avec les mêmes réserves que ci-dessus.	> fsolve(a*x^2+2*a*x+1,a); > fsolve((sin(t)=cos(2*t)),t);
dsolve option numeric	Résolution de tous types d'équations différentielles et de systèmes différentiels, avec ou sans conditions initiales. L'option numeric donne une résolution numérique approchée de l'équation ou du système, toujours posé avec des conditions initiales.	> E:=diff(y(x),x)+y(x)=cos(x); > dsolve(E,y(x)); > dsolve({E,y(0)=0},y(x)); > dsolve({E,y(0)=0},y(x), numeric);
rsolve	Résolution de suites récurrentes linéaires.	> rsolve(u(n)=3*u(n-1)-2*u(n-2),u);
linsolve	Résolution de systèmes linéaires présentés matriciellement, les paramètres sont la matrice du système et le vecteur second membre.	> linsolve(A,B);

41 Algèbre linéaire

Le package « linalg » doit être chargé auparavant : > with(linalg);

41-1 Vecteurs

Maple utilise des vecteurs qui sont mathématiquement des vecteurs **colonne**, mais qu'il écrit en ligne pour des questions de lisibilité sur l'écran !...

vector	Définition d'un vecteur colonne. U[2] désigne la deuxième coordonnée de U.	> U:=vector([1,4,9]); > U:=vector(3,i->i*i);
dotprod	Produit scalaire de 2 vecteurs.	> dotprod(U,V);
crossprod	Produit vectoriel de 2 vecteurs de $\mathbb{R}^3$.	> crossprod(U,V);
norm(· · · ,2)	Norme Euclidienne d'un vecteur.	> norm(U,2);

41-2 Procédé de Schmidt

GramSchmidt <i>option normalized</i>	Applique le procédé de Schmidt à une liste de vecteurs et renvoie une famille orthogonale de vecteurs engendrant le même sous-espace. L'option normalized permet d'avoir des vecteurs normés.	> GramSchmidt([U,V]); > GramSchmidt([U,V], normalized);
---	--	--

41-3 Matrices

matrix	Définition d'une matrice (par lignes). $A[2,3]$ est l'élément deuxième ligne, troisième colonne.	> A:=matrix([[1,2],[3,4]]); > B:=matrix(2,2,(i,j)->2*i+j);
transpose	Transpose une matrice ou un vecteur.	> transpose(A); > evalm(transpose(A));
inverse	Inverse une matrice carrée inversible.	> evalm(inverse(A)&*A);
rank	Rang d'une matrice (pour la valeur générale des paramètres...).	> r:=rank(A);
det trace	Déterminant et trace d'une matrice carrée.	> Δ:=det(A); > trace(A &* B) - trace(B &* A)

41-4 Éléments propres

charmat	Matrice caractéristique : $(A - \lambda I_n)$.	> U:=charmat(A,lambda);
charpoly	Polynôme caractéristique : $\det(A - \lambda I_n)$.	> P:=charpoly(A,x);
eigenvals	Valeurs propres, chacune avec son ordre de multiplicité . Mais Maple ne trouve pas nécessairement toutes les valeurs propres... Il vaut mieux factoriser d'abord le polynôme caractéristique, en ayant au besoin d'abord cherché les zéros avec un solve.	> eigenvals(A);
eigenvects	Valeurs propres, ordre de multiplicité et base de chaque sous-espace propre.	> eigenvects(A);

42 Graphiques

Le package « plots » doit, le plus souvent, être chargé auparavant : > with(plots);
Si on sélectionne le graphique à l'écran, Maple fournit une barre d'outils adaptée.

42-1 Courbes du plan

plot <i>option scaling constrained</i>	Tracé de courbes en cartésiennes, {...} permet de tracer plusieurs courbes sur un même graphe.	> plot(x^2,x=-2..2); > plot(x^2,x=-2..2, scaling=constrained); > plot({x^2,2*x+1},x=-2..2);
plot([...],...) <i>option scaling constrained</i>	Tracé de courbes en paramétriques, {...} permet de tracer plusieurs courbes sur un même graphe.	> plot([u/(1+u),1/(1-u),u=-3..3], x=-5..5,y=-5..5);
plot <i>option coords polar</i>	Tracé de courbes en polaires, {...} permet de tracer plusieurs courbes sur un même graphe.	> plot(sin(t)/(1+cos(t)),t=0..Pi, coords=polar,x=-5..5,y=-5..5);
implicitplot	Tracé de lignes de niveau : $f(x,y) = 0$.	> implicitplot(x*x+y*y=3, x=-2..2,y=-2..2);

42-2 Surfaces

plot3d	Tracé de surfaces en coordonnées cartésiennes : $z = f(x, y)$.	> plot3d(1/(x^2+y^2), x=-2..2,y=-2..2);
plot3d([...],...)	Tracé de nappes paramétrées.	> x:=cos(u)*cosh(v); > y:=sin(u)*cosh(v); > z:=sinh(v); > plot3d([x,y,z],u=0..6.3,v=-2..2);
plot3d option coords cylindrical	Tracé de nappes paramétrées en coordonnées cylindriques, ρ défini en fonction de θ et z .	> plot3d(sin(z),theta=0..6.3, z=0..2,coords=cylindrical);
plot3d option coords spherical	Tracé de nappes paramétrées en coordonnées sphériques, ρ défini en fonction de θ et φ .	> plot3d(1, theta=0..6.3,phi=0..1.58, coords=spherical);
implicitplot3d	Tracé de surfaces définies par une équation implicite $f(x, y, z) = 0$.	> implicitplot3d(x*x+y*y-z*z=1, x=-2..2,y=-2..2,z=-2..2);

42-3 Courbes de l'espace

spacecurve	Tracé d'une courbe dans l'espace.	> spacecurve([cos(t),sin(t),t], t=0..15);
------------	-----------------------------------	---

42-4 Tracé simultané de plusieurs courbes ou surfaces

En 2-D ou en 3-D, deux cas se présentent à chaque fois selon qu'on a à faire au même type de graphique ou non.

En 2-D, on peut associer des courbes définies en cartésiennes, polaires, paramétriques ou de façon implicite et en 3-D, on peut associer des surfaces ou courbes définies en paramétriques, cylindriques, sphériques ou des surfaces définies de façon implicite.

- Même type de graphiques : il suffit de placer les différentes expressions à tracer entre accolades {...}
- Types de graphiques différents :

display	Tracé simultané de plusieurs graphiques plans.	> A:=plot(...);B:=plot(...); > display([A,B], scaling=constrained);
display3d	Tracé simultané de plusieurs graphiques de l'espace.	> A:=plot3d(...); > B:=plot3d(...); > display([A,B], scaling=constrained);

43 Structures de contrôle et procédures

Ces structures de contrôle, répétitives ou alternatives sont le plus souvent utilisées dans le corps des procédures.

On verra dans la suite, page suivante, des exemples détaillés de procédures utilisant ces structures.

43-1 Structure alternative

if condition then instructions else instructions fi	Structure alternative : si la condition est réalisée, on effectue les commandes après le then, sinon, celles après le else. Le else est d'ailleurs optionnel et le fi termine toujours le if.	> if u=0 then y:=1 else y:=sin(u)/u fi;
--	---	---

43-2 Structure répétitive

for <i>variable</i> from <i>début</i> by <i>pas</i> to <i>fin</i> do <i>instructions</i> od	Les instructions entre do et od sont exécutées pour toutes les valeurs de la variable, depuis le début jusqu'à la fin, en utilisant le pas donné. On étudie ici la suite récurrente $u_{n+1} = u_n + \frac{n}{u_n}$.	> u:=1;n:=10; > for i from 1 to n do u:=(u+i/u) od;
while <i>condition</i> do <i>instructions</i> od	Les instructions entre do et od sont exécutées tant que la condition est vérifiée. Ici, dans une suite définie par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, on s'arrête quand deux termes consécutifs sont proches à 10^{-5} près.	> u:=1; > v:=f(u); > while abs(u-v)> 10^-5 do u:=v;v:=f(v) od; > u,v;
for <i>variable</i> from <i>début</i> by <i>pas</i> to <i>fin</i> while <i>condition</i> do <i>instructions</i> od	Les instructions entre do et od sont exécutées pour toutes les valeurs de la variable, depuis le début jusqu'à la fin, en utilisant le pas donné, tant que la condition est vérifiée. L'exemple est le même que ci-dessus, mais on s'interdit plus de 100 itérations.	> u:=1; > v:=f(u); > to 100 while abs(u-v)> 10^-5 do u:=v;v:=f(v) od; > u,v;

Dans tous les cas, on peut omettre :

- **for**, si on n'a besoin de la valeur de l'indice,
- **from**, si la valeur de début est 1,
- **by**, si le pas est 1,
- **to** ou **while**, mais pas les deux !...

43-3 Procédures

->	Définition d'une procédure ou fonction simple.	> f:=x->x**2*sin(x);
proc(<i>param</i>) local <i>variables</i> ; <i>instructions</i> end	Définition d'une procédure de paramètres <i>param</i> donnés. Le résultat de la procédure est le dernier résultat calculé. Ici, on écrit une procédure appelée suite qui calcule u_n pour une suite définie par $u_0 = a$ et par la relation de récurrence : $u_{n+1} = \frac{u_n + \frac{a}{u_n}}{2}$.	> suite:=proc(a,n) local u; u:=a; from 1 to n do u:=(u+1/u)/2 od u end;

Quand on écrit une procédure, il importe de bien distinguer :

- les variables Maple utilisées
- et leur sens mathématique.

44 Exemples de Programmes

Notons qu'aucun des programmes donnés ici en exemple n'est « protégé » contre une mauvaise utilisation avec des paramètres non pertinents...

44-1 Un programme très simple

On va maintenant créer une procédure qui calcule, pour un terme donné u_n , le terme suivant de la suite u_{n+1}

défini par : $u_{n+1} = \frac{u_n + \frac{a}{u_n}}{2}$.

On a donc deux paramètres : le terme donné de la suite, appelé u dans la procédure, et a .

```
suivant := proc( $u, a$ )  
local  $v$ ;  
     $v := u$ ;  
     $v := 1/2 * v + 1/2 * a/v$ ;  
     $v$   
end proc
```

44-2 Structure alternative

On va écrire une procédure qui calcule, pour une expression usuelle du second degré $ax^2 + bx + c$ à coefficients réels, le nombre de ses racines réelles. On a donc trois paramètres a, b, c .

```
nbrac := proc( $a, b, c$ )  
local  $\Delta, n$ ;  
     $\Delta := b^2 - 4 * a * c$ ;  
    if  $0 < \Delta$  then  $n := 2$  else if  $\Delta = 0$  then  $n := 1$  else  $n := 0$  end if end if;  
     $n$   
end proc
```

44-3 Structure itérative « pour » à nombre de pas connu

Ecrivons une procédure qui, pour la même suite qu'au 44-1, calcule, en calcul approché « flottant », u_n pour u_0, n et a paramètres donnés, que dans la procédure, on appellera respectivement : u, n, a .

```
suitef := proc( $u, a, n$ )  
local  $i, v$ ;  
     $v := \text{evalf}(u)$ ;  
    for  $i$  to  $n$  do  $v := \text{suivant}(v, a)$  end do;  
     $v$   
end proc
```

44-4 Structure itérative « tant que » à nombre de pas inconnu

Il s'agit ici d'étudier le comportement des suites définies par :

- $u_0 = 0.1$,
- et la relation de récurrence : $u_{n+1} = f(u_n)$,
- où $f(x) = 4ax(1-x)$.

Ecrire une procédure de paramètres a et n qui calcule u_n .

```
suite := proc( $a, n$ )  
local  $u$ ;  
     $u := .1$ ;  
    to  $n$  do  $u := 4 * a * u * (1 - u)$  end do;  
     $u$   
end proc
```

Ecrire maintenant une procédure qui calcule le premier n tel que $|u_{n+1} - u_n| \leq d$, de paramètres a et d , limitée à 500 itérations en cas de divergence ou de convergence très lente ...

En sortie, on donnera n, u_n, u_{n+1} pour voir s'il semble y avoir convergence ou non.

Mathématiquement, l'observation de ces suites ne prouve ni leur convergence, ni leur divergence.

```

rang := proc(a, d)
local i, u, v ;
    u := .1 ;
    v := 4 * a * u * (1 - u) ;
    for i to 500 while d < abs(u - v) do u := v ; v := 4 * a * u * (1 - u) end do ;
    i, u, v
end proc

```

44-5 Récurrence sur plusieurs rangs

On considère la suite de polynômes définie par :

- $P_0(x) = 1$
- $P_1(x) = x$
- $P_{n+2}(x) = x P_{n+1}(x) + P_n(x)$ pour n entier naturel

Ecrire une procédure de paramètre n , qui calcule de façon réduite et ordonnée P_n .

```

poly := proc(n)
local u, v, w ;
    u := 1 ; v := x ;
    from 2 to n do w := expand(x * v + u, x) ; u := v ; v := w end do ;
    v
end proc

```

On remarquera le « from 2 » qui traduit simplement le fait que le premier polynôme qu'on calcule effectivement est P_2 .

44-6 Un exemple en algèbre linéaire

On a bien sûr déjà chargé le package `linalg`.

On prend ici une matrice A qui possède 3 valeurs propres simples : 1, 4 et 7.

On constitue la suite de vecteurs définie par un premier vecteur X_0 et la relation : $X_{n+1} = \frac{A X_n}{\|A X_n\|}$.

On a donc une suite de vecteurs normés, sauf éventuellement le premier.

Quand cette suite converge, elle converge vers un vecteur propre, correspondant le plus souvent à la plus grande valeur propre en valeur absolue.

On a la matrice A et le vecteur de départ :

$$A := \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$X := [1, 1, 1]$$

On écrit donc une procédure à 2 paramètres A et X qui calcule la suite X_n jusqu'à ce que la norme de la différence de 2 vecteurs consécutifs soit assez petite.

Le nombre d'itérations est limité et on travaille bien sûr en « flottant ».
Ce qui donne :

```
valprop := proc(A, X)  
local Y, Z ;  
  Y := evalf(evalm(eval(X))) ;  
  Z := evalf(evalm(A &* Y/norm(A &* Y, 2))) ;  
  to 30 while .00001 < norm(evalm(Z - Y), 2) do  
    Y := evalm(Z) ;  
    Z := evalf(evalm(A &* Y/norm(A &* Y, 2)))  
  end do ;  
  evalf(norm(evalm(' &* '(A, Z)), 2))  
end proc
```

On essaye cette procédure :

```
> valprop(A,X);  
  
6.999999999
```


Index

- A -

abscisse curviligne	64
aire	32, 38, 58
algèbre	20
sous-algèbre	20
algèbres usuelles	20
angles	58
application linéaire	11
endomorphisme	11
image d'une -	12
image réciproque d'une -	12
matrice d'une -	13
changement de base	15
automorphisme	11

- B -

barycentre	54
binôme (formule du)	7

- C -

cercles	
dans l'espace	68
dans le plan	68
cocyclicité	68
changement de variable	34, 36, 39, 40
Chasles (relation de)	32
coefficients binomiaux	7
cônes	76
de révolution	77
coniques	68-71
en polaires	69, 70
identification	70
continuité	23, 49
contour apparent	75, 77
convergence	44
d'une intégrale généralisée	35
d'une série de Fourier	47
d'une série entière	44
courbes	
centre de symétrie	59
convexité	59
de l'espace	67
en cartésiennes	58
en paramétriques	60
en polaires	61
courbure	64
centre de -	64
en paramétriques	64
en polaires	65
pour la valeur 0 du paramètre	66
critère	
d'équivalence	36, 42
de comparaison	36, 42
de d'Alembert	42
des séries alternées	42
croissances comparées	24
cylindres	74
de révolution	77
cylindriques	40

- D -

dérivée	
d'un produit	24
d'une composée	24
dérivabilité	24
déterminant	15
d'un produit de matrices	15
d'une matrice triangulaire	15

par blocs	16
ordre 2 et 3	15
ordre quelconque	15
développement	
limité	25
diagonalisabilité	16
cond. nécessaire et suffisante	16
condition suffisante	16
distances	58
droites	
de l'espace affine	57
du plan affine	56

- E -

ellipses	69
ellipsoïde	71
endomorphisme	11
orthogonal	19
symétrique	18
ensemble	
de définition	23
équations différentielles	51-53
linéaires	51
du premier ordre	52
du second ordre	52
non linéaires	52
recollement de solutions	51
espace vectoriel	10
base d'un -	11
de dimension finie	11
euclidien	18
préhilbertien	18
somme de -	10
somme directe de -	10
sous-espace	10
supplémentaires	10
espaces vectoriels usuels	11

- F -

famille	
génératrice	11
libre	11
faux problème	35
fonction	
convexe	59
définie par une intégrale	
généralisée	37
simple	34
de plusieurs variables	49-51
extrémums	50
limite d'une -	23
monotone	23
usuelles	26
variations	23
forme linéaire	11
formes indéterminées	23
fractions rationnelles	9
déc. en éléments simples	9-10
Frenet (repère de)	64

- G -

groupe	7
linéaire	19
morphisme de -	7
orthogonal	19
sous-groupe	7

- H -

homomorphisme	11
---------------	----

hyperboles	70
hyperboloïde	
à deux nappes	71
à une nappe	71

- I -

inégalité	
dans les intégrales	32
de Schwarz	18, 34
de Taylor-Lagrange	25
des accroissements finis	25
triangulaire	18
intégrale	
double et triple	37-40
généralisée	35-37
simple	32-35
intégration	
de séries	48
par parties	34, 36
isométries	54-56
affines	
de l'espace	56
du plan	56
vectorielles	
de l'espace	55
du plan	55
isomorphisme	11

- J -

jacobien	51
----------	----

- L -

limites usuelles	23
------------------	----

- M -

maple	79-88
changevar	82
charpoly	83
collect	80
combine	80
comparaisons	79
constantes	79
convert	80
diff	82
display	84
dsolve	82
eigenvals	83
eigenvecs	83
ensemble	81
eval	80
evalb	80
evalm	79, 80
expand	80
factor	80
fonctions usuelles	81
for	85, 86
fsolve	82
GramSchmidt	83
if	84, 86
int	82
intervalle	81
intparts	82
leadterm	81
limit	81
linalg	82
linsolve	82
liste	81
matrix	83
norm	82

normal	81	racines	8	somme de Riemann	35
opérations		racines d'un –	8	sous-espace propre	16
sur les matrices	79	scindé	8	sphériques	40
usuelles	79	primitives	31–32	sphères	68
parfrac	80	existence	32	suite	21
plot	83	fraction rationnelle	31	équivalentes	21
plot3d	84	en exponentielle	32	adjacentes	22
proc	85–88	en radicaux	32	bornée	21
product	80	trigonométrique	32	convergente	21
series	81	polynôme et exponentielle	32	croissante majorée	21
simplify	81	usuelles	32	et série	21
solve	82	produit scalaire	17	limite d'une –	21
sort	80	dans une base orthonormale	18	récurrenente	22
spacecurve	84	projecteur	12, 19	linéaire	22
subs	80	projection		sous-suite	21
sum	80	orthogonale	19	vectorielle	21
vector	82			surfaces	71–78
while	85, 86			de révolution	73
matrice		– Q –		plan tangent	66
de passage	14	quadriques	71–73	symétries	
jacobienne	51	équations réduites	71	centrales	55
orthogonale	20	identification	73	orthogonales	54–56
puissance de –	17			systemes	
symétrique	18	– R –		différentiels	53
moyenne (formule de)	34	rang	11	autonomes	53
		théorème du –	12	linéaires	13
– N –		rayon de courbure	64	– T –	
nombres complexes		Rolle (théorème de)	25	Taylor	
racines		rotations		-Young	25
$n^{\text{èmes}}$	8	vectorielles		avec reste intégral	25
carrées	8	de l'espace	55	transposée	14
norme	10	du plan	55	triangularisation	17
euclidienne	18	– S –		trigonométrie	27–30
– P –		séries		arc double	29
paraboles	69	d'intégrales	48	fonctions réciproques	30
paraboloïde		de Fourier	46–48	formule de Moivre	30
elliptique	71	coefficients	47	produits en sommes	30
hyperbolique	71	convergence	47	sommes d'arcs	30
Parseval (formule de)	48	entières	44–45, 48	sommes en produits	30
plans		développements usuels	45	symétries	29
de l'espace affine	57	rayon de convergence	44	trois conditions (théorème des)	34, 36
point critique	50	géométriques	41	– V –	
polaires	39	numériques	41–44	valeur propre	16
polynôme		somme de –	43	vecteur propre	16
caractéristique	16	Schmidt (procédé de –)	19	vissage	56
division euclidienne	9	Schwarz (théoreme de)	50	volume	38, 58
factorisation	8	semblables	15		

Sommaire

I Déterminant de n vecteurs dans une base $\mathcal{B}$	1	III-2 Déterminant d'un produit	4
I-1 Forme n -linéaire alternée sur E	1	III-3 Déterminant de 2 matrices semblables	4
I-2 Déterminant dans une base $\mathcal{B}$	1	III-4 Déterminant de la transposée	4
I-3 Propriétés élémentaires	1	IV Calcul de déterminants	5
I-4 Déterminant dans une base $\mathcal{B}'$	2	IV-1 En dimension 2 et 3	5
I-5 Caractérisation des bases	2	IV-2 Dét. d'une matrice triangulaire	5
II Déterminant d'un endomorphisme	2	IV-3 Dév. selon une ligne ou colonne	6
II-1 Déterminant dans une base $\mathcal{B}$	2	IV-4 Opérations sur les lignes et colonnes .	6
II-2 Déterminant d'un endomorphisme . .	3	IV-5 Dét. d'une mat. triangulaire par blocs	6
II-3 Caractérisation des automorphismes .	3	IV-6 Exemples	7
II-4 Déterminant de la composée	3	V Compléments	8
III Déterminant d'une matrice carrée	4	V-1 Produit de matrices définies par blocs	8
III-1 Déterminant d'une matrice carrée A .	4	V-2 Avec Maple	8
		V-3 Les mathématiciens du chapitre	9

Dans tout le chapitre, E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base.

I Déterminant de n vecteurs dans une base $\mathcal{B}$

I-1 Forme n -linéaire alternée sur E

Définition : E un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$, $f : \begin{cases} E^n & \rightarrow \mathbb{K} \\ (u_1, u_2, \dots, u_n) & \mapsto f(u_1, u_2, \dots, u_n) \end{cases}$

On dit que f est n -linéaire alternée

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(u_1, u_2, \dots, \lambda u_i + \mu u'_i, \dots, u_n) = \lambda f(u_1, u_2, \dots, u_i, \dots, u_n) + \mu f(u_1, u_2, \dots, u'_i, \dots, u_n) \\ f(u_1, u_2, \dots, u_i, \dots, u_j, \dots, u_i, \dots, u_n) = -f(u_1, u_2, \dots, u_j, \dots, u_i, \dots, u_n) \end{cases}$$

pour tous les vecteurs $u_1, \dots, u_n$, tous les scalaires λ, μ et pour $i \neq j$

C'est à dire qu'elle est linéaire par rapport à chacune des variables et que l'échange de 2 variables la transforme en son opposé.

Ainsi, quand on a 2 fois le même vecteur, la forme est égale à son opposée et donc nulle...

I-2 Déterminant de n vecteurs dans une base $\mathcal{B}$

Théorème : Si f est n -linéaire alternée et si $f(e_1, e_2, \dots, e_n) = 1$, alors f est complètement définie.

Démonstration : Il suffit en effet de développer par n -linéarité et d'utiliser le caractère alterné pour remettre les vecteurs dans le « bon » ordre. Le résultat s'exprime donc en fonction de $f(e_1, e_2, \dots, e_n)$ car les autres termes sont nuls. Le coefficient ne dépend que des règles de calcul et non pas de f . On a donc le résultat dès qu'on fixe la valeur de $f(e_1, e_2, \dots, e_n)$. ■

Définition : Le déterminant de $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ dans $\mathcal{B}$ est $f(u_1, u_2, \dots, u_n)$ où f est la forme n -linéaire alternée vérifiant $f(e_1, e_2, \dots, e_n) = 1$. On le note $\det(u_1, u_2, \dots, u_n)_{\mathcal{B}}$

I-3 Propriétés élémentaires

Théorème : Echanger 2 vecteurs multiplie le déterminant par -1 .

Théorème : Si on a deux fois le même vecteur dans un déterminant, celui-ci est nul.

Théorème : Si un vecteur est combinaison linéaire des autres vecteurs, le déterminant est nul.

Démonstration : En développant par linéarité par rapport à ce vecteur, on n'obtient que des déterminants qui contiennent 2 fois le même vecteur, et sont donc nuls. ■

Théorème : Ajouter à un vecteur une combinaison linéaire des autres vecteurs ne change pas le déterminant.

Démonstration : Ceci est une conséquence immédiate du théorème précédent. ■

Théorème : Multiplier **un seul** des vecteurs par λ multiplie le déterminant par λ .

I-4 Déterminant dans une base $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$

Théorème : 2 formes n -linéaires alternées sont proportionnelles.

Démonstration : Les règles de calcul qui permettent de tout exprimer en fonction de $f(e_1, e_2, \dots, e_n)$ restent les mêmes que l'on travaille avec la forme n -linéaire alternée f ou g .

Ainsi, on a : $f(u_1, u_2, \dots, u_n) = K f(e_1, e_2, \dots, e_n)$ et : $g(u_1, u_2, \dots, u_n) = K g(e_1, e_2, \dots, e_n)$.

K est le même dans les deux cas, il ne dépend que de $u_1, u_2, \dots, u_n$, pas de f ou g .

On a donc bien un λ tel que : $g(u_1, u_2, \dots, u_n) = \lambda f(u_1, u_2, \dots, u_n)$ pour tous les $u_1, u_2, \dots, u_n$. ■

Or les déterminants dans différentes bases sont des formes n -linéaires alternées et sont donc proportionnels.

Ceci nous donne : $\det(u_1, u_2, \dots, u_n)_{\mathcal{B}'} = \lambda \times \det(u_1, u_2, \dots, u_n)_{\mathcal{B}}$ pour tout $(u_1, u_2, \dots, u_n)$.

$$\text{Et enfin : } \begin{cases} \det(u_1, u_2, \dots, u_n)_{\mathcal{B}'} = \det(u_1, u_2, \dots, u_n)_{\mathcal{B}} \times \det(e_1, e_2, \dots, e_n)_{\mathcal{B}'} \\ \det(u_1, u_2, \dots, u_n)_{\mathcal{B}} = \det(u_1, u_2, \dots, u_n)_{\mathcal{B}'} \times \det(e'_1, e'_2, \dots, e'_n)_{\mathcal{B}} \end{cases}$$

Ce sont les formules de changement de base des déterminants de vecteurs.

Pour la première relation, on calcule λ en remplaçant $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ par $(e_1, e_2, \dots, e_n)$.

Pour l'autre, on échange simplement les rôles de $\mathcal{B}$ et de $\mathcal{B}'$.

Si on applique ce dernier résultat à $(e_1, e_2, \dots, e_n)$,

on obtient : $1 = \det(e_1, e_2, \dots, e_n)_{\mathcal{B}'} \times \det(e'_1, e'_2, \dots, e'_n)_{\mathcal{B}}$

Ce qui prouve qu'un déterminant d'une base dans une autre est non nul.

I-5 Caractérisation des bases

Théorème : $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ est une base de $E \Leftrightarrow \det(u_1, u_2, \dots, u_n)_{\mathcal{B}} \neq 0$

Démonstration : Si la famille est liée, le déterminant est clairement nul.

Si la famille est libre, $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ est une base qu'on note $\mathcal{B}'$,

d'où : $\det(u_1, u_2, \dots, u_n)_{\mathcal{B}'} = \det(u_1, u_2, \dots, u_n)_{\mathcal{B}} \times \det(e_1, e_2, \dots, e_n)_{\mathcal{B}'} = 1$.

Ce qui entraîne $\det(u_1, u_2, \dots, u_n)_{\mathcal{B}} \neq 0$, comme on vient de le voir. ■

II Déterminant d'un endomorphisme

II-1 Déterminant d'un endomorphisme dans une base $\mathcal{B}$

Définition : $\varphi : E \rightarrow E$ un endomorphisme et $\mathcal{B}$ une base de E ,

$$\det(\varphi)_{\mathcal{B}} = \det(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \dots, \varphi(e_n))_{\mathcal{B}}$$

II-2 Déterminant d'un endomorphisme

Théorème : Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont 2 bases de E ,

$$\det(\varphi)_{\mathcal{B}} = \det(\varphi)_{\mathcal{B}'}$$

Démonstration : Comme φ est linéaire, l'application $(u_1, u_2, \dots, u_n) \mapsto \det(\varphi(u_1), \varphi(u_2), \dots, \varphi(u_n))_{\mathcal{B}}$ est une forme n -linéaire alternée !

C'est donc un déterminant. Ainsi, comme deux déterminants sont proportionnels :

$$\det(\varphi(u_1), \varphi(u_2), \dots, \varphi(u_n))_{\mathcal{B}} = \lambda \times \det(u_1, u_2, \dots, u_n)_{\mathcal{B}}$$

et de plus, en remplaçant les u_i par e_i : $\lambda = \det(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \dots, \varphi(e_n))_{\mathcal{B}} = \det(\varphi)_{\mathcal{B}}$

$$\text{Ce qui donne : } \begin{cases} \det(\varphi(u_1), \varphi(u_2), \dots, \varphi(u_n))_{\mathcal{B}} = \det(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \dots, \varphi(e_n))_{\mathcal{B}} \times \det(u_1, u_2, \dots, u_n)_{\mathcal{B}} \\ \det(\varphi(u_1), \varphi(u_2), \dots, \varphi(u_n))_{\mathcal{B}} = \det(\varphi)_{\mathcal{B}} \times \det(u_1, u_2, \dots, u_n)_{\mathcal{B}} \end{cases}$$

De même, dans la base $\mathcal{B}'$: $\det(\varphi(u_1), \varphi(u_2), \dots, \varphi(u_n))_{\mathcal{B}'} = \det(\varphi)_{\mathcal{B}'} \times \det(u_1, u_2, \dots, u_n)_{\mathcal{B}'}$.

Propriété qu'on applique aux vecteurs e_i d'où le premier résultat :

$$\det(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \dots, \varphi(e_n))_{\mathcal{B}'} = \det(\varphi)_{\mathcal{B}'} \times \det(e_1, e_2, \dots, e_n)_{\mathcal{B}'}$$

On utilise maintenant la propriété générale de changement de base avec les vecteurs $\varphi(e_i)$, ce qui donne le second résultat :

$$\det(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \dots, \varphi(e_n))_{\mathcal{B}'} = \det(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \dots, \varphi(e_n))_{\mathcal{B}} \times \det(e_1, e_2, \dots, e_n)_{\mathcal{B}'}$$

$$\det(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \dots, \varphi(e_n))_{\mathcal{B}'} = \det(\varphi)_{\mathcal{B}} \times \det(e_1, e_2, \dots, e_n)_{\mathcal{B}'}$$

On égale et on simplifie par $\det(e_1, e_2, \dots, e_n)_{\mathcal{B}'}$ dont on a montré qu'il est bien non nul, ce qui nous permet de conclure :

$$\det(\varphi)_{\mathcal{B}} = \det(\varphi)_{\mathcal{B}'}$$

■

Conclusion : On peut parler du déterminant d'un endomorphisme puisqu'il ne dépend pas de la base choisie. On a donc le libre choix de la base pour calculer ce déterminant.

II-3 Caractérisation des automorphismes

Théorème : Soit φ un endomorphisme de E ,

$$\varphi \text{ est un automorphisme} \Leftrightarrow \det(\varphi) \neq 0$$

Démonstration : On sait que φ est un automorphisme $\Leftrightarrow (\varphi(e_1), \varphi(e_2), \dots, \varphi(e_n))$ est une base.

Ce qui équivaut à : $\det(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \dots, \varphi(e_n))_{\mathcal{B}} \neq 0$, c'est à dire $\det(\varphi) \neq 0$

■

II-4 Déterminant de la composée de 2 endomorphismes

Théorème : φ et ψ deux endomorphismes de E , alors

$$\det(\varphi \circ \psi) = \det(\varphi) \times \det(\psi)$$

Démonstration : La propriété est immédiate quand ψ n'est pas inversible car alors $\varphi \circ \psi$ ne l'est pas non plus et les deux termes sont nuls.

Si ψ est inversible, on note $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n) = (\psi(e_1), \psi(e_2), \dots, \psi(e_n))$. Alors

$$\begin{aligned} \det(\varphi \circ \psi) &= \det(\varphi(e'_1), \varphi(e'_2), \dots, \varphi(e'_n))_{\mathcal{B}} \\ &= \det(\varphi(e'_1), \varphi(e'_2), \dots, \varphi(e'_n))_{\mathcal{B}'} \times \det(e'_1, e'_2, \dots, e'_n)_{\mathcal{B}} \\ &= \det(\varphi) \times \det(\psi(e_1), \psi(e_2), \dots, \psi(e_n))_{\mathcal{B}} \\ &= \det(\varphi) \times \det(\psi) \end{aligned}$$

■

III Déterminant d'une matrice carrée

III-1 Déterminant d'une matrice carrée A

Une matrice carrée $n \times n$ s'interprète comme la matrice d'un endomorphisme φ de E dans la base $\mathcal{B}$. On pose donc :

Définition : $\det(A) = \det(\varphi)$

III-2 Déterminant d'un produit de 2 matrices, de la matrice inverse d'une matrice inversible

Théorème : $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$$\det(A \times B) = \det(A) \times \det(B)$$

Démonstration : $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi)$, $B = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\psi)$, alors :

$$A \times B = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi \circ \psi)$$

$$\det(\varphi \circ \psi) = \det(\varphi) \times \det(\psi)$$

$$\det(A \times B) = \det(A) \times \det(B)$$

■

Théorème : $A \in GL_n(\mathbb{K})$

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

Démonstration : $A \times A^{-1} = I_n$, $\det(I_n) = \det(Id_E) = \det(e_1, e_2, \dots, e_n)_{\mathcal{B}} = 1$,
d'où : $\det(A) \times \det(A^{-1}) = 1$

■

III-3 Déterminant de 2 matrices semblables

Théorème : A et B , 2 matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors : $\det(A) = \det(B)$

Démonstration : On a $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1} \times A \times P$, d'où :

$$\begin{aligned} \det(B) &= \det(P^{-1}) \times \det(A) \times \det(P) \\ &= \det(P^{-1}) \times \det(P) \times \det(A) \\ &= \det(P^{-1} \times P) \times \det(A) \\ &= \det(A) \end{aligned}$$

■

III-4 Déterminant de la transposée d'une matrice

Théorème : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors

$$\det({}^tA) = \det(A)$$

La démonstration est ici admise.

IV Calcul de déterminants

IV-1 En dimension 2 et 3

On va d'abord retrouver un résultat bien connu :

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} &= \det(u_1, u_2) = \det(a.e_1 + b.e_2, c.e_1 + d.e_2)_B \\ &= ac \det(e_1, e_1)_B + ad \det(e_1, e_2)_B + bc \det(e_2, e_1)_B + bd \det(e_2, e_2)_B \\ &= 0 + ad - bc + 0 = ad - bc \end{aligned}$$

En dimension 3, on peut utiliser la règle de Sarrus, qui se montre de la même façon, en n'oubliant pas qu'elle n'est **absolument pas généralisable** à un ordre autre que 3...

$$\begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix} = aei + dhc + gbf - ceg - fha - ibd$$

IV-2 Déterminant d'une matrice triangulaire.

Théorème : $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & x & \cdots & \cdots & y \\ 0 & a_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_{n-1} & z \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix} = a_1 \times a_2 \times \dots \times a_{n-1} \times a_n$

Démonstration : On factorise par a_1 , et, en enlevant le bon nombre de fois le premier vecteur aux autres, on amène des 0 sur la première ligne et on obtient :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & x & \cdots & \cdots & y \\ 0 & a_2 & s & & t \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_{n-1} & u \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix} = a_1 \times \begin{vmatrix} 1 & x & \cdots & \cdots & y \\ 0 & a_2 & s & & t \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_{n-1} & u \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix} = a_1 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & s & & t \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_{n-1} & u \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix}$$

On recommence ensuite avec a_2 . On obtient ainsi de suite par une récurrence admise :

$$\Delta = a_1 \times a_2 \times \dots \times a_{n-1} \times a_n \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = a_1 \times a_2 \times \dots \times a_{n-1} \times a_n$$

■

IV-3 Développement suivant une ligne ou une colonne

La règle des signes est :

$$\begin{vmatrix} + & - & + & \cdots & \cdots & \cdots & (-1)^{n+1} \\ - & + & - & & & & \\ + & - & + & & (-1)^{i+j} & & \\ \vdots & & & \ddots & & & \\ \vdots & & & & \ddots & & \\ \vdots & & & & & + & - \\ (-1)^{n+1} & & & & & - & + \end{vmatrix}$$

On remarque qu'on a $(-1)^{i+j}$ en $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne.

On développe suivant une ligne ou une colonne en tenant compte de la règle de signes $(-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij}$ où a_{ij} est le coefficient de la matrice et Δ_{ij} est le déterminant obtenu en enlevant la ligne i et la colonne j correspondante. On admet ce résultat.

Théorème : On peut développer selon la $j^{\text{ème}}$ colonne :

$$\Delta = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij}$$

ou développer selon la $i^{\text{ème}}$ ligne :

$$\Delta = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij}$$

Il est important de noter qu'on peut **choisir** sa ligne ou sa colonne.

Corollaire : En utilisant les notations précédentes, M , une matrice inversible, alors :

$$M^{-1} = \frac{1}{\Delta} \times \text{transposée de } \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & (-1)^{i+j} \Delta_{ij} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

Démonstration : Le calcul de $M \times$ transposée de $\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & (-1)^{i+j} \Delta_{ij} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$ donne Δ pour les termes de la diagonale et 0 pour les autres puisque cela revient à développer un déterminant qui a 2 colonnes identiques. ■

IV-4 Opérations sur les lignes et les colonnes d'un déterminant.

- inverser deux lignes ou deux colonnes multiplie le déterminant par -1
- ajouter à une ligne (ou une colonne) une combinaison linéaire des autres lignes (ou colonnes) ne change pas le déterminant.

IV-5 Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs

Théorème : $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$, $O \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, O est la matrice nulle de $\mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ et $p + q = n$. Alors,

$$\begin{vmatrix} A & B \\ O & C \end{vmatrix} = \det(A) \times \det(C)$$

On admet ce résultat.

Cette propriété **ne se généralise pas** au déterminant d'une matrice définie par blocs et non triangulaire par blocs.

Exemple : On va calculer le déterminant : $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \pi & \ln 2 & 17 \\ 3 & 4 & e & \ln 7 & -23 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \pi^2 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}$.

Ce déterminant est celui d'une matrice triangulaire par blocs, dont on fait ressortir ici la structure :

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \pi & \ln 2 \\ e & \ln 7 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 17 \\ -23 \end{pmatrix} \\ 0 & 0 & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \pi^2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (-3) \end{pmatrix}.$$

On a donc, en appliquant deux fois le théorème précédent :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} \times |-3| = (-2) \times 2 \times (-3) = 12. \text{ Attention, ce ne sont pas des valeurs absolues...}$$

IV-6 Exemples

On notera les déterminants avec un indice qui correspond à leur rang, qui est toujours plus grand que 1.

a) Utilisation d'une formule de récurrence

Soit le déterminant $\Delta_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}_n$ qu'on développe selon la 1^{ère} colonne

$$\Delta_n = \Delta_{n-1} - 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}_{n-1} = \Delta_{n-1} - \Delta_{n-2} \text{ en développant ce déterminant selon la 1^{ère} ligne.}$$

On obtient ainsi la relation de récurrence $\Delta_n = \Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}$ qu'on résout en calculant Δ_1 et Δ_2 .

b) Manipulation de lignes ou colonnes

Soit le déterminant $\Delta_n = |\text{abs}(i-j)|_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 2 & \ddots & \ddots & \ddots & 2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ n-1 & \cdots & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}_n$ avec $n \geq 3$.

A chaque ligne, de la dernière à la seconde, on enlève la précédente. Ces opérations sont faites successivement... Il faut bien vérifier qu'on peut les faire successivement et qu'on n'utilise pas une ligne ou une colonne qui a été modifiée... et qui donc n'existe plus !

$$\text{On obtient donc : } \Delta_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}_n$$

A chaque ligne, de la dernière à la troisième, on enlève la précédente. Ces opérations sont faites successivement...

On obtient donc :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}_n = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & \cdots & n-1 \\ 2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}_{n-1} = -(-1)^n (n-1) \begin{vmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \end{vmatrix}_{n-2}$$

obtenu en développant successivement selon la première et la dernière colonne.

Enfin, $\Delta_n = (-1)^{n+1} (n-1) 2^{n-2}$

V Compléments

V-1 Produit de matrices définies par blocs

Il ne s'agit pas ici à proprement parler de calculs de déterminants...

Si deux matrices sont définies par blocs, on peut parfois effectuer leur produit en travaillant par blocs. C'est à dire :

$$\begin{pmatrix} (A) & (B) \\ (C) & (D) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} (A') & (B') \\ (C') & (D') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (A) \times (A') + (B) \times (C') & (A) \times (B') + (B) \times (D') \\ (C) \times (A') + (D) \times (C') & (C) \times (B') + (D) \times (D') \end{pmatrix}$$

Les dimensions des matrices doivent être compatibles, à savoir :

- Le nombre de **colonnes** de A et C doit être le nombre de **lignes** de A' et B' .
- Le nombre de **colonnes** de B et D doit être le nombre de **lignes** de C' et D' .

D'autre part, rappelons que le produit de matrices n'est pas commutatif, l'ordre dans lequel on écrit ces produits est donc fondamental...

V-2 Avec Maple

Comme pour tout l'algèbre linéaire, il faut d'abord charger le pack `linalg` :

```
> with(linalg);
```

Ensuite, c'est simplement l'instruction `det` qui calcule un déterminant :

```
> det(A);
```

```
> inverse(A);
```

 inverse une matrice inversible.

```
> transpose(A);
```

 transpose une matrice, et

```
> rank(A);
```

 donne son rang. Pour ces 3 instructions, on se méfiera quand la matrice dépend d'un paramètre.

Dans ce cas, la réponse fournie correspond en général au cas général.

On rappelle `vector` et `matrix` pour créer un vecteur ou une matrice, on rappelle que le produit des matrices est « &* » car Maple considère à priori tous les produits comme commutatifs.

Enfin, l'instruction `evalm` est souvent nécessaire pour avoir le contenu effectif d'une matrice à l'écran.

V-3 Les mathématiciens du chapitre

Vandermonde Alexandre 1735-1796 Mathématicien français, il est le premier à étudier les déterminants pour eux-mêmes.

Laplace Pierre 1749-1827 Mathématicien, physicien et astronome, fils de fermier normand, il généralisera, entre autres, les règles de calcul des déterminants données par Vandermonde.

Sommaire

1 Familles de vecteurs	1	3 Eléments propres	3
1-1 Famille libre	1	3-1 Valeurs propres et vecteurs propres . .	3
1-2 Famille génératrice	1	3-2 Sous espaces propres	3
1-3 Propriétés	1	3-3 Cas des valeurs propres distinctes . .	3
		3-4 Exemples	4
2 Equations linéaires	2	4 Trace	4
2-1 Equation linéaire	2	4-1 Trace d'une matrice	4
2-2 Equation linéaire homogène ($b = 0$) .	2	4-2 Trace d'un endomorphisme	5
2-3 Equation linéaire non homogène ($b \neq 0$)	2	5 Compléments	5
2-4 Superposition des solutions	2	5-1 Avec Maple	5
		5-2 Les mathématiciens du chapitre	5

Dans tout le chapitre, E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), de dimension finie ou non.
Les différentes parties de ce chapitre, formé de compléments, sont largement indépendantes.

1 Familles de vecteurs

I désigne un ensemble d'indices, non nécessairement fini. Par exemple $\{1, 2, \dots, n\}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{R} \dots$
 $\mathcal{F}$ désigne la famille des $(u_i)_{i \in I}$

1-1 Famille libre

Définition : $\mathcal{F}$ est libre $\Leftrightarrow$ toute sous-famille finie de $\mathcal{F}$ est libre.
C'est à dire :

$$\forall J \subset I, J \text{ finie} \quad \sum_{j \in J} \alpha_j u_j = 0 \Rightarrow \forall j \in J, \quad \alpha_j = 0$$

Exemple : Dans $\mathbb{R}[X]$, $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille libre.

1-2 Famille génératrice

Définition : $\mathcal{F}$ est génératrice $\Leftrightarrow$ tout vecteur de E est combinaison linéaire de vecteurs de $\mathcal{F}$.
C'est à dire :

$$\forall u \in E, \exists J \subset I, J \text{ finie} \quad \exists (\alpha_j)_{j \in J} \quad \text{tel que } u = \sum_{j \in J} \alpha_j u_j$$

Exemple : Dans $\mathbb{R}[X]$, $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est aussi une famille génératrice.

1-3 Propriétés

- Ceci étend bien les définitions en dimension finie.
- Toute sous-famille d'une famille libre est libre.
- Toute sur-famille d'une famille génératrice est génératrice.
- $\varphi : E \rightarrow F$ linéaire, $(u_i)_{i \in I}$ génératrice de $E \Rightarrow (\varphi(u_i))_{i \in I}$ est génératrice de $\text{Im}(E)$

Théorème : $\left. \begin{array}{l} (u_i)_{i \in I} \text{ libre} \\ (u, (u_i)_{i \in I}) \text{ liée} \end{array} \right\} \Rightarrow u \text{ est combinaison linéaire des } (u_i)_{i \in I}$

Démonstration : Une liaison contenant des coefficients non nuls contient nécessairement u avec un coefficient non nul...

On écrit : $\lambda u + \sum_{i \in I} \lambda_i u_i = 0$

Si $\lambda = 0$, alors $\sum_{i \in I} \lambda_i u_i = 0$, mais comme cette famille est libre, chaque λ_i est nul, ce qui est impossible.

Si $\lambda \neq 0$, alors : $u = -\frac{\sum_{i \in I} \lambda_i u_i}{\lambda}$, ce qui prouve le résultat annoncé. ■

Théorème : L'image d'une famille libre par une application linéaire **injective** est libre.

Démonstration : $\sum_{j \in J} \alpha_j \varphi(u_j) = 0 \Rightarrow \varphi\left(\sum_{j \in J} \alpha_j u_j\right) = 0 \Rightarrow \sum_{j \in J} \alpha_j u_j = 0 \Rightarrow \forall j \in J, \alpha_j = 0$ ■

2 Equations linéaires

Dans cette partie, E et F sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), de dimension finie ou non. D'autre part, $\varphi : E \rightarrow F$ est une application linéaire.

2-1 Equation linéaire

Définition : Une équation linéaire est une équation du type $\varphi(u) = b$. La résoudre, c'est chercher tous les vecteurs u tels que $\varphi(u) = b$.

Exemple : Il y a de très nombreux exemples différents. On peut citer :

- les systèmes linéaires classiques,
- les suites vérifiant une relation de récurrence linéaire, qu'on étudiera au chapitre suivant,
- les équations différentielles linéaires...

2-2 Equation linéaire homogène ($b = 0$)

Théorème : L'ensemble des solutions de $\varphi(u) = 0$ est un sous-espace vectoriel de E , noté $\ker(\varphi)$. En particulier, $u = 0$ est toujours solution.

2-3 Equation linéaire non homogène ($b \neq 0$)

Théorème : Si $b \notin \text{Im}(\varphi)$, alors l'ensemble des solutions est vide.

Si $b \in \text{Im}(\varphi)$, alors $\exists u_0 \in E, \varphi(u_0) = b$.

L'ensemble des solutions est alors

$$u_0 + \ker(\varphi) = \{u \in E, \exists y \in \ker(\varphi), u = u_0 + y\}$$

Démonstration : $(u - u_0)$ est solution de l'équation homogène associée. ■

2-4 Superposition des solutions

Théorème : Soit l'équation linéaire $\varphi(u) = b_1 + b_2$, avec u_1 solution de $\varphi(u) = b_1$, et u_2 solution de $\varphi(u) = b_2$. Alors $u_1 + u_2$ est solution de $\varphi(u) = b_1 + b_2$, la solution générale étant $u_1 + u_2 + \ker(\varphi)$.

Démonstration : $\varphi(u_1 + u_2) = \varphi(u_1) + \varphi(u_2) = b_1 + b_2$. ■

3 Éléments propres d'un endomorphisme

Notation : E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), de dimension finie ou non.

$\varphi : E \rightarrow E$ est un endomorphisme.

3-1 Valeurs propres et vecteurs propres

Définition : $\lambda \in \mathbb{K}$ et $u \in E$ est un couple valeur propre, vecteur propre de $\varphi \Leftrightarrow \begin{cases} u \neq 0 \\ \varphi(u) = \lambda.u \end{cases}$

Un vecteur propre n'est jamais nul.

Théorème : $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de $\varphi \Leftrightarrow \ker(\varphi - \lambda.Id_E) \neq \{0\}$

Définition : L'ensemble des valeurs propres de φ est le **spectre** de φ .

3-2 Sous espaces propres

Définition :

Si $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de φ , on appelle **sous-espace propre** de φ associé à la valeur propre λ ,

$$E_\lambda = \{u \in E, \varphi(u) = \lambda.u\}$$

C'est donc l'ensemble des vecteurs propres associés à λ auxquels on adjoint le vecteur nul.

Théorème : Le sous espace propre de φ associé à la valeur propre λ , E_λ est un sous-espace vectoriel de E .

Démonstration : $E_\lambda = \ker(\varphi - \lambda.Id_E)$ est donc un sous espace vectoriel puisque c'est un noyau. ■

On note $E_\lambda = \ker(\varphi - \lambda.Id_E)$ même quand λ n'est pas valeur propre de φ .

D'une façon plus particulière, $E_0 = \ker(\varphi)$.

Ainsi, 0 est valeur propre $\Leftrightarrow \varphi$ n'est pas injective.

Théorème : 2 sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes sont en somme directe.

Démonstration : Soit $u \in E_\lambda \cap E_\mu$, alors $\varphi(u) = \lambda.u = \mu.u$, d'où $(\lambda - \mu).u = 0$ et comme $\lambda - \mu \neq 0$, $u = 0$. ■

3-3 Vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes

Théorème : E un $\mathbb{K}$ -e.v., $\varphi \in \mathcal{L}(E)$,

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n : n$ valeurs propres **distinctes** 2 à 2,

$u_1, u_2, \dots, u_n : n$ vecteurs propres associés,

alors la famille $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ est libre.

Démonstration : On pose

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n = 0$$

à laquelle on applique φ :

$$\alpha_1 \lambda_1 u_1 + \alpha_2 \lambda_2 u_2 + \dots + \alpha_n \lambda_n u_n = 0$$

à laquelle on retire λ_n fois la relation précédente, d'où :

$$\alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_n) u_1 + \alpha_2 (\lambda_2 - \lambda_n) u_2 + \dots + \alpha_{n-1} (\lambda_{n-1} - \lambda_n) u_{n-1} = 0$$

Pour conclure, il suffit de remarquer que si $(u_1, u_2, \dots, u_{n-1})$ est libre, alors $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ est libre.

Comme (u_1) est libre, on a le résultat. ■

3-4 Exemples

1) Homothétie de rapport λ

Une homothétie de rapport λ possède une unique valeur propre λ et $E_\lambda = E$.

Tous les vecteurs, sauf le vecteur nul, sont propres.

2) $E = F \oplus G$

- Soit p la projection sur F parallèlement à G .

1 et 0 sont les deux valeurs propres, $E_1 = F$ et $E_0 = G$.

On écrit la décomposition canonique selon la somme directe d'un vecteur non nul, propre pour λ , $u = v + w$, à laquelle on applique p , d'où $p(u) = v = \lambda v + \lambda w$ ce qui donne $(\lambda - 1)v + \lambda w = 0$.

v et w ne sont pas tous les 2 nuls puisque u ne l'est pas.

Comme λ ne peut à la fois être égal à 1 et à 0, v et w sont liés et donc l'un des 2 est nul. Ce qui entraîne $\lambda = 1$ et $w = 0$ ou $\lambda = 0$ et $v = 0$.

Il ne reste qu'à conclure.

- Soit s la symétrie par rapport à F , parallèlement à G .

1 et -1 sont les deux valeurs propres, $E_1 = F$ et $E_{-1} = G$.

Le résultat est immédiat en écrivant $s = 2p - Id$.

3) Soit $E = \mathcal{C}^0[\mathbb{R}]$ et $\varphi : E \rightarrow E$ telle que $\varphi(f) : x \mapsto \int_0^x f(t) dt$

En un mot, $\varphi(f)$ est la primitive de f qui s'annule en 0.

On va chercher les éléments propres de φ .

Il faut d'abord vérifier que φ est bien un endomorphisme, c'est à dire que c'est une application de E dans E qui est linéaire.

$\varphi(f)$ est clairement continue puisque c'est une primitive d'une application continue.

De plus φ est bien linéaire par linéarité de l'intégration, φ est donc bien un endomorphisme.

Cherchons en les éléments propres, c'est à dire les applications f non identiquement nulles et les scalaires λ tels que $\varphi(f) = \lambda \cdot f$

On écrit cette égalité pour un x quelconque :

$$\varphi(f)(x) = \lambda f(x) \text{ ou encore } \int_0^x f(t) dt = \lambda f(x) \text{ pour tout } x \text{ réel.}$$

Si $\lambda = 0$, pour tout x réel, $\int_0^x f(t) dt = 0$, en dérivant, $f(x) = 0$, f est l'application nulle et n'est donc pas un vecteur propre, 0 n'est donc pas valeur propre.

Donc $\lambda \neq 0$, d'où f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et en dérivant, pour tout x réel, $f(x) = \lambda f'(x)$. On conserve la condition $f(0) = 0$ pour avoir une équivalence.

f est donc solution de l'équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants sans second membre $\lambda y' - y = 0$, ce qui donne $y = K \exp(x/\lambda)$. La valeur en 0 nous donne $K = 0$ et donc f est encore l'application nulle...

Finalement φ n'a pas de valeur propre.

4 Trace d'un endomorphisme et d'une matrice

Notons d'abord que la notion de trace est hors programme mais très pratique...

4-1 Trace d'une matrice

Définition : La trace d'une matrice, notée $tr(A)$, est la somme des éléments diagonaux. avec les notations classiques, pour une matrice $n \times n$, on a :

$$tr(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

Exemple : La trace de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ est $1 + 4 + 7 = 12$.

Théorème : A, B deux matrices $n \times n$, alors,

$$\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$$

Démonstration : L'élément $i^{\text{ème}}$ ligne et colonne de AB est $\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ji}$,

$$\text{tr}(AB) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ji} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n b_{ji} a_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} a_{ji} = \text{tr}(BA)$$

car les indices de sommation sont muets. ■

Théorème : 2 matrices semblables ont la même trace.

Démonstration : $A' = P^{-1}AP$,

$$\text{tr}(A') = \text{tr}(P^{-1}AP) = \text{tr}(P^{-1}(AP)) = \text{tr}((AP)P^{-1}) = \text{tr}(APP^{-1}) = \text{tr}(A)$$

■

Exemple : Les deux matrices $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ 6 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ ne diffèrent que par l'interversion des deux premières colonnes mais ne sont pas semblables puisqu'elles n'ont pas la même trace !...

4-2 Trace d'un endomorphisme

Comme 2 matrices semblables ont la même trace, la trace d'un endomorphisme est définie comme la trace de sa matrice dans n'importe quelle base.

5 Compléments

5-1 Avec Maple

Comme pour tout l'algèbre linéaire, il faut d'abord charger le pack `linalg` :

`> with(linalg);`

`> linsolve(A, B);` permet de résoudre les systèmes linéaires écrits matriciellement, A étant la matrice et B le vecteur second membre. La réponse est le, ou les, vecteurs X tels que $AX = B$.

`> eigenvals(A);` fournit les valeurs propres d'une matrice et

`> eigenvects(A);` les valeurs propres et une base de chaque vecteur propre. Dans la mesure, bien sûr, où Maple sait résoudre l'équation qui permet de calculer les valeurs propres...

Comme toujours avec Maple, on se méfiera quand la matrice ou le vecteur dépendent d'un paramètre. La réponse fournie correspond en général au cas général.

5-2 Les mathématiciens du chapitre

Cayley Arthur 1821-1895 Mathématicien anglais, on lui doit la notion de groupe et il passe pour être l'inventeur des matrices.

Jordan Camille 1838-1922 Ce mathématicien français est célèbre pour ses travaux en algèbre linéaire, entre autres...

Peano Giuseppe 1858-1932 Italien, c'est lui qui donna la définition axiomatique des espaces vectoriels.

Sommaire

1 Suites vérifiant $u_{n+1} - a u_n = b$ 1	2 Suites vérifiant $u_{n+2} + a u_{n+1} + b u_n = c$ 1
1-1 $u_{n+1} - a u_n = 0$ 1	2-1 $u_{n+2} + a u_{n+1} + b u_n = 0$ 1
1-2 $u_{n+1} - a u_n = b$ 1	2-2 $u_{n+2} + a u_{n+1} + b u_n = c$ 2
	3 Avec Maple 2

Le but est de déterminer toutes les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui vérifient

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a u_{n+2} + b u_{n+1} + c u_n = d, \quad a, b, c, d \in \mathbb{K} \quad (1)$$

On considère E l'espace vectoriel des suites sur $\mathbb{K}$, et

$$\varphi : \begin{cases} E & \rightarrow E \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} & \mapsto (a u_{n+2} + b u_{n+1} + c u_n)_{n \in \mathbb{N}} \end{cases}$$

φ est clairement linéaire. Il s'agit de résoudre

$$\varphi((u_n)_{n \in \mathbb{N}}) = (d)_{n \in \mathbb{N}}$$

où $(d)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite constante. On se retrouve donc face à une équation linéaire.

On va donc chercher les solutions de l'équation homogène associée :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a u_{n+2} + b u_{n+1} + c u_n = 0$$

Ces solutions forment un sous espace vectoriel de E .

Il suffira d'ajouter une suite qui est solution particulière de (1).

1 Suites vérifiant $u_{n+1} - a u_n = b$

1-1 $u_{n+1} - a u_n = 0$

Ce sont les suites géométriques de raison a , $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = a^n u_0$.

1-2 $u_{n+1} - a u_n = b$

On cherche d'abord une solution particulière sous forme de suite constante $v_n = k$, ce qui donne $(1 - a)k = b$.

- Si $a \neq 1$, on trouve $k = \frac{b}{1-a}$, et donc $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = a^n \alpha + \frac{b}{1-a}$ où α s'exprime en fonction des conditions initiales : $\alpha = u_0 - \frac{b}{1-a}$.
- Si $a = 1$, la suite est arithmétique, $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 + nb$

Une fois qu'on a l'expression générale de la solution, on tient compte des conditions initiales éventuelles.

2 Suites vérifiant $u_{n+2} + a u_{n+1} + b u_n = c$

2-1 $u_{n+2} + a u_{n+1} + b u_n = 0$

Théorème : L'ensemble des suites vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} + a u_{n+1} + b u_n = 0$ est un $\mathbb{K}$ -e.v. de dimension 2.

Démonstration : La structure d'espace vectoriel est donnée par le fait que c'est le noyau d'une application linéaire.

Une suite est déterminée par ses deux premiers termes.

On considère $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $\alpha_0 = 1, \alpha_1 = 0, \beta_0 = 0, \beta_1 = 1$.

La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$v_n = u_0 \alpha_n + u_1 \beta_n$$

vérifie la relation de récurrence et $v_0 = u_0$, $v_1 = u_1$, ce qui prouve que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et donc $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ forment une famille génératrice, donc une base de l'ensemble des solutions. ■

En pratique, on recherche les suites géométriques de raison non nulle r vérifiant

$$u_{n+2} + a u_{n+1} + b u_n = 0$$

ce qui revient à chercher les solutions de

$$r^2 + a r + b = 0$$

- 2 racines distinctes r_1, r_2 (ce qui correspond sur $\mathbb{C}$, à $\Delta \neq 0$, ou sur $\mathbb{R}$, à $\Delta > 0$)
On a alors

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\alpha r_1^n + \beta r_2^n)_{n \in \mathbb{N}}$$

- 1 racine double r (ce qui correspond à $\Delta = 0$)
Montrons que $(n r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie aussi la relation de récurrence.

$$\begin{aligned} (n+2) r^{n+2} + a (n+1) r^{n+1} + b n r^n &= n r^n (r^2 + a r + b) + r^{n+1} (2r + a) \\ &= 0 \text{ car } r = \frac{-a}{2} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc

$$(\alpha r^n + \beta n r^n)_{n \in \mathbb{N}}$$

- Pas de racine (ce qui correspond sur $\mathbb{R}$, à $\Delta < 0$)
On résout sur $\mathbb{C}$, $r_2 = \overline{r_1}$, $r_1 = |r| e^{i\theta}$, $(|r|^n e^{in\theta})$ et $(|r|^n e^{-in\theta})$ sont donc solution sur $\mathbb{C}$.
Ce qui fait que $(|r|^n \cos n\theta)$ et $(|r|^n \sin n\theta)$ sont solution sur $\mathbb{C}$ par combinaison linéaire de solutions.
Mais ces solutions sont réelles et donc **aussi** solution sur $\mathbb{R}$!!! Elles forment clairement une famille libre et forment donc une base de l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$.
Les solutions sont donc

$$(\alpha |r|^n \cos n\theta + \beta |r|^n \sin n\theta)_{n \in \mathbb{N}}$$

2-2 $u_{n+2} + a u_{n+1} + b u_n = c$

On cherche donc une solution particulière sous la forme...

- une suite constante $u_n = k$
On obtient $k(1 + a + b) = c$, on a donc une solution quand $1 + a + b \neq 0$.
- quand $(1 + a + b = 0)$, on cherche une suite arithmétique $u_n = k n$
On obtient $k((n+2) + (n+1)a + nb) = c$, d'où $k(2 + a) = c$, on a donc une solution quand $2 + a \neq 0$.
- quand on a à la fois : $\begin{cases} 1 + a + b = 0 \\ 2 + a = 0 \end{cases}$, on cherche une suite $u_n = k n^2$
On obtient $k((n+2)^2 + (n+1)^2 a + n^2 b) = c$, d'où $k(4 + a) = c$ et donc $2k = c$. On a donc toujours une solution.

Une fois qu'on a l'expression générale de la solution, on tient compte des conditions initiales éventuelles.

3 Avec Maple

Comme pour tout l'algèbre linéaire, il faut d'abord charger le pack `linalg`:

```
> with(linalg);
```

C'est ensuite `rsolve` qui permet de rechercher ces suites. Donnons un exemple :

```
> rsolve(u(n)=-3*u(n-1)-2*u(n-2), u);
```

Sommaire

1 Réduction en dimension finie	1	4-1 Principe général	5
1-1 Polynôme caractéristique	1	4-2 Recherche de la diagonalisabilité . . .	5
1-2 Ordre de multiplicité	2	4-3 Diagonalisation	5
2 Diagonalisation en dimension finie	3	4-4 Matrice symétrique réelle	5
2-1 Diagonalisabilité	3	4-5 Utilisation de la trace	6
2-2 C.N.S. de diagonalisabilité	3	4-6 Forme ultime en dimension 3	6
2-3 Diagonalisabilité et diagonalisation . .	4	4-7 Exemple	7
3 Cas non diagonalisable	4	5 Puissances de matrices	8
3-1 Trigonalisation	4	5-1 Matrice diagonalisable	8
3-2 Recherche d'une base trigonalisante .	4	5-2 Avec une matrice nilpotente	8
3-3 Cas d'un endomorphisme nilpotent .	4	5-3 Polynôme annulateur	8
4 Réduction d'une matrice carrée $n \times n$	5	6 Compléments	9
		6-1 Avec Maple	9
		6-2 Les mathématiciens du chapitre	10

Le but de ce chapitre est, pour un endomorphisme donné, de rechercher une base dans laquelle son expression sera la plus « simple » possible ou de rechercher les conditions que doit vérifier une telle base.

1 Réduction d'un endomorphisme en dimension finie

E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de dimension n , $n \in \mathbb{N}^*$. $\mathcal{B}$ est une base de E .
 φ est un endomorphisme de E .

1-1 Polynôme caractéristique

Définition : On appelle polynôme caractéristique de φ le déterminant de $\varphi - \lambda.Id_E$ noté

$$P_\varphi(\lambda) = \det(\varphi - \lambda.Id_E)$$

Théorème : $P_\varphi(\lambda)$ est un polynôme de degré n en λ .

Son terme de plus haut degré est $(-1)^n \lambda^n$.

Son terme constant est $\det(\varphi)$.

Il se calcule par $P_\varphi(\lambda) = \det(A - \lambda.I_n)$ où $A = \mathcal{M}_B(\varphi)$ et I_n est la matrice identité.

Démonstration : $A - \lambda.I_n$ est la matrice dans la base $\mathcal{B}$ de $\varphi - \lambda.Id_E$ et comme un déterminant se calcule dans n'importe quelle base, on a $P_\varphi(\lambda) = \det(A - \lambda.I_n)$.

$$P_\varphi(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{1,1} - \lambda & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n-1} & a_{n,n} - \lambda \end{vmatrix} = (a_{1,1} - \lambda) \Delta_{1,1} - a_{2,1} \Delta_{2,1} + \dots + (-1)^{n+1} a_{n,1} \Delta_{n,1}$$

Par récurrence, $-a_{2,1} \Delta_{2,1} + \dots + (-1)^{n+1} a_{n,1} \Delta_{n,1}$ ne peut contenir de terme en λ^n , donc le terme de plus haut degré est celui de $(a_{1,1} - \lambda) \Delta_{1,1}$, c'est à dire celui de $-\lambda \Delta_{1,1}$. Par récurrence, c'est donc $(-1)^n \lambda^n$.

Enfin, $\lambda = 0$ fournit le terme constant $P_\varphi(0) = \det(\varphi - 0.Id_E) = \det(\varphi)$. ■

Théorème : Les racines sur $\mathbb{K}$ de $P_\varphi(\lambda)$ sont **exactement** « les » valeurs propres de φ .

Démonstration : Si λ_i est valeur propre de φ , $(\varphi - \lambda_i.Id_E)$ n'est pas injective, donc n'est pas un isomorphisme et donc son déterminant est nul.

Réciproquement, si $\det(\varphi - \lambda_i.Id_E) = 0$, $(\varphi - \lambda_i.Id_E)$ n'est pas injective, $\ker(\varphi - \lambda_i.Id_E) \neq \{0\}$ et donc λ_i est valeur propre de φ . ■

Théorème : Si la matrice d'un endomorphisme dans une certaine base est triangulaire, les valeurs propres de cet endomorphisme sont les termes de la diagonale de cette matrice.

Démonstration : $\det(A - \lambda I_n)$ est le produit des éléments diagonaux, car cette matrice est toujours triangulaire. Les racines de ce polynôme en λ sont bien les éléments de la diagonale de A . ■

1-2 Ordre de multiplicité des valeurs propres, dimension des sous espaces propres

Définition : L'ordre de multiplicité de λ_i racine de $P_\varphi(\lambda)$ est l'ordre de multiplicité de λ_i valeur propre de φ .

On parle donc de valeur propre simple, double, multiple...

Chaque valeur propre est toujours donnée avec son ordre de multiplicité.

Théorème : Pour λ_i valeur propre de φ ,

$$1 \leq \dim E_{\lambda_i} \leq \text{Ordre de multiplicité de la valeur propre } \lambda_i$$

Démonstration : Comme λ_i est valeur propre de φ , $\dim E_{\lambda_i} \geq 1$.

Soit $p = \dim E_{\lambda_i}$ et $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ une base de E_{λ_i} qu'on complète par $(e_{p+1}, \dots, e_n)$ en une base de E .

Dans cette base, φ a pour matrice

$$\begin{pmatrix} \lambda_i & 0 & \dots & 0 & a_{1,p+1} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \lambda_i & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & 0 & a_{p+1,p+1} & \dots & a_{p+1,n} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_{n,p+1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} \quad \text{d'où}$$

$$P_\varphi(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda_i - \lambda & 0 & \dots & 0 & a_{1,p+1} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \lambda_i - \lambda & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & 0 & a_{p+1,p+1} - \lambda & \dots & a_{p+1,n} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_{n,p+1} & \dots & a_{n,n} - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda_i - \lambda)^p \begin{vmatrix} a_{p+1,p+1} - \lambda & \dots & a_{p+1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,p+1} & \dots & a_{n,n} - \lambda \end{vmatrix}$$

en remarquant par exemple que la matrice est triangulaire par blocs.

Ceci prouve que λ_i est racine de $P_\varphi(\lambda)$ d'ordre au moins p . ■

Si λ_i est une valeur propre simple, alors $\dim E_{\lambda_i} = 1$

2 Diagonalisation d'un endomorphisme en dimension finie

2-1 Diagonalisabilité

Définition : Un endomorphisme φ de E est diagonalisable $\Leftrightarrow E$ possède une base formée de vecteurs propres de φ

Dans une base de vecteurs propres, la matrice de φ est diagonale. Les valeurs propres se trouvent sur la diagonale, chacune autant de fois que son ordre de multiplicité.

2-2 Condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité

Théorème : E de dimension n , $\varphi \in \mathcal{L}(E)$,

φ est diagonalisable $\Leftrightarrow$ la somme des dimensions des sous espaces propres est n .

La démonstration est admise.

Théorème : (Condition nécessaire et suffisante)

φ est diagonalisable $\Leftrightarrow \begin{cases} P_{\varphi}(\lambda) \text{ est scindé et} \\ \text{Pour chaque } \lambda_i \text{ multiple, } \dim E_{\lambda_i} = \text{ordre de multiplicité de } \lambda_i \end{cases}$

Un polynôme scindé est un polynôme qui peut se factoriser en produit d'expressions du 1^{er} degré.

$X^2 + 2X + 1$ est scindé sur $\mathbb{R}$ comme sur $\mathbb{C}$,

$X^2 + X + 1$ est scindé sur $\mathbb{C}$ mais pas sur $\mathbb{R}$.

En particulier, sur $\mathbb{C}$, tous les polynômes sont scindés.

En pratique :

- Si le polynôme caractéristique n'est pas scindé (c'est à dire qu'on travaille sur $\mathbb{R}$ et $P_{\varphi}(\lambda)$ possède des racines complexes non réelles), alors φ n'est pas diagonalisable.

Exemple : $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ Son polynôme caractéristique est : $4\lambda^2 + 1$ qui n'a pas de racines réelles, et donc, cette matrice n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

- Si le polynôme caractéristique est scindé, la somme des ordres de multiplicité des valeurs propres est n , φ est diagonalisable $\Leftrightarrow$ la dimension de chaque sous espace propre est égale à l'ordre de multiplicité de cette valeur propre.

Il suffit de regarder cette égalité pour les seules valeurs propres multiples.

Exemple : $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable. En effet, 2 est valeur propre double et le sous-espace propre n'est pas de dimension 2, puisqu'alors tout vecteur serait propre pour la valeur propre 2, ce qui n'est pas le cas du deuxième vecteur de la base.

Théorème : (condition suffisante)

Si φ admet n valeurs propres distinctes, alors φ est diagonalisable.

Démonstration : Toutes les valeurs propres sont simples, chaque sous espace propre est donc de dimension 1... ■

Dans le cas où l'endomorphisme est diagonalisable, on obtient une base de vecteurs propres en mettant bout à bout une base de chaque sous espace propre.

3 Réduction d'un endomorphisme non diagonalisable

3-1 Trigonalisation

Théorème : E de dimension n , $\varphi \in \mathcal{L}(E)$, tel que le polynôme caractéristique de φ est scindé, alors il existe une base où la matrice de φ est triangulaire. Les valeurs propres se trouvent sur la diagonale, chacune autant de fois que son ordre de multiplicité.

La démonstration est admise.

3-2 Recherche d'une base trigonalisante

On va travailler sur un exemple courant :

E est de dimension 3, λ_1 est valeur propre simple, λ_2 valeur propre double de φ .

De plus $\dim E_{\lambda_1} = \dim E_{\lambda_2} = 1$. φ n'est donc pas diagonalisable mais est trigonalisable.

En principe, dans une telle recherche, l'énoncé doit vous guider. Ici,

- On cherche e_1 base de E_{λ_1}
- On cherche e_2 base de E_{λ_2}
- On cherche e_3 tel que $(\varphi - \lambda_2 \cdot \text{Id}_E)(e_3) = e_2$
- On vérifie que (e_1, e_2, e_3) est bien une base de E

Dans cette base, la matrice de φ est
$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

3-3 Triangularisation d'un endomorphisme ou d'une matrice nilpotents

Rappelons qu'une matrice A est nilpotente si et seulement si il existe p tel que $A^p = 0$. On a la même définition pour un endomorphisme nilpotent.

Si X est un vecteur propre de A pour la valeur propre λ , alors il est aussi vecteur propre de A^p pour la valeur propre λ^p .

Que l'on travaille sur $\mathbb{C}$ ou sur $\mathbb{R}$, le polynôme caractéristique est scindé et l'unique valeur propre est nulle.

A est donc semblable à une matrice strictement triangulaire.

On peut même montrer que A est semblable à une matrice de la forme
$$\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \varepsilon_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$
 où les ε_i

valent 0 ou 1. Mais ceci est hors-programme.

4 Réduction d'une matrice carrée $n \times n$

4-1 Principe général

Soit A une matrice carrée $n \times n$ sur $\mathbb{K}$, elle est donc aussi la matrice d'un endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ dans la base canonique. Les résultats obtenus pour cet endomorphisme sont appliqués à cette matrice. Le polynôme caractéristique de la matrice est celui de l'endomorphisme.

Si le polynôme caractéristique est scindé, la trace est la somme des valeurs propres.

Théorème : Si A est diagonalisable, de valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ distinctes ou confondues, de vecteurs propres associés $e_1, e_2, \dots, e_n$. On appelle P la matrice de passage constituée en colonnes, et dans cet ordre,

des coordonnées de $e_1, e_2, \dots, e_n$ écrits dans la base d'origine. Alors

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

On ne suivra la méthode donnée que si n est « petit » et quand l'énoncé ne guide pas vers une autre.

4-2 Recherche de la diagonalisabilité

- On calcule $P_A(\lambda)$.
 - Si $P_A(\lambda)$ n'est pas scindé, A n'est pas diagonalisable. On a terminé.
- On factorise $P_A(\lambda)$, en particulier, on cherche les valeurs propres multiples.
 - S'il n'y en a pas, A est diagonalisable. On a terminé.

On cherche la dimension de chaque sous espace propre associé à une valeur propre multiple.

On utilisera parfois $\dim E_{\lambda_i} = n - \text{rang}(A - \lambda_i \cdot I_n)$.

- Si chaque dimension est l'ordre de multiplicité de la valeur propre, A est diagonalisable. On a terminé.
- Sinon, A n'est pas diagonalisable. On a terminé.

4-3 Diagonalisation

Dans ce paragraphe, on supposera que A est effectivement diagonalisable.

- Calculer $P_A(\lambda)$.
- Factoriser $P_A(\lambda)$, chercher les valeurs propres.
- Pour chaque valeur propre, chercher une base du sous espace propre associé.
- On obtient une base de vecteurs propres en mettant bout à bout les différentes bases des sous espaces propres.

4-4 Matrice symétrique réelle

Théorème : Une matrice **symétrique réelle** est diagonalisable avec, au besoin, une matrice de passage orthogonale.

Ce théorème, très utile en pratique, n'est ici que pour mémoire, on se reportera au chapitre suivant.

4-5 Utilisation de la trace

Rappelons que la trace d'une matrice est une notion hors-programme souvent présente dans les problèmes. La trace d'un endomorphisme est la somme de éléments diagonaux de sa matrice dans une base quelconque. Ce qui nous donne :

Théorème : Quand le polynome caractéristique est scindé, la trace d'un endomorphisme, qui est la somme des éléments diagonaux de sa matrice dans une base quelconque, est égale à la somme des valeurs propres.

Démonstration : Il suffit de se placer dans une base où la matrice est triangulaire. Les valeurs propres sont alors sur la diagonale. ■

Ceci permet souvent de vérifier la cohérence des calculs de valeurs propres...

4-6 Diagonalisabilité et diagonalisation

Quand une matrice A est **diagonalisable**, une erreur courante est de dire que, *dans une certaine base*, A est diagonale, ce qui est bien sûr grossièrement faux et même stupide.

On a simplement une matrice de passage P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$ ou bien $D = P^{-1}AP$.

La confusion provient de ce que A et D sont les matrices d'un **même** endomorphisme dans deux bases différentes...

Il est par contre exact de dire que si un endomorphisme f est diagonalisable, et s'il est de matrice A dans la base $\mathcal{B}$, il existe une base $\mathcal{B}'$ dans laquelle sa matrice est D , diagonale.

P étant la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$, on a alors : $A = PDP^{-1}$ et $D = P^{-1}AP$.

4-7 Forme ultime en dimension 3

On considère ici un endomorphisme en dimension 3 dont le **polynôme caractéristique est scindé**.

On va décrire la **meilleure** forme que peut avoir sa matrice dans une certaine base, selon les ordres de multiplicité des valeurs propres et la dimension des sous-espaces propres associés.

a) Trois valeurs propres simples

L'endomorphisme est diagonalisable et a pour matrice $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}$ dans une base bien choisie.

b) Deux valeurs propres, une simple et une double

- Si l'endomorphisme est diagonalisable, il a pour matrice $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$ dans une base bien choisie.
- Si l'endomorphisme n'est pas diagonalisable, il a pour matrice $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$ dans une base bien choisie.

On constitue cette base comme dans l'exemple étudié au paragraphe 3-2.

c) Une valeur propre triple

- Si l'endomorphisme est diagonalisable, il a pour matrice $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ dans une base bien choisie.

C'est l'homothétie de rapport λ . L'endomorphisme a d'ailleurs cette matrice dans n'importe quelle base ...

- Si l'endomorphisme n'est pas diagonalisable, il a pour matrice $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ si le sous-espace propre est

de dimension 2 ou $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ si le sous-espace propre est de dimension 1, toujours dans une base bien choisie.

Ici, l'énoncé doit vous guider dans la recherche de cette base.

4-8 Exemple

On va diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$ avec $n \geq 3$.

Cette matrice est symétrique réelle, donc diagonalisable.

a) Première méthode

La matrice est clairement de rang 2, 0 est donc valeur propre d'ordre exactement $n - 2$ compte tenu de la diagonalisabilité.

Le sous-espace propre, qui est le noyau, est facile à déterminer, il est défini par $\begin{cases} x_n = 0 \\ x_1 + \cdots + x_{n-1} = 0 \end{cases}$

Il ne nous manque que la ou les deux valeurs propres non nulles. Compte tenu de la trace nulle, ce sont deux valeurs propres opposées.

On cherche les vecteurs $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ tels que $AX = \lambda X$, avec $\lambda \neq 0$,

$$\text{ce qui donne } \begin{cases} x_n = \lambda x_1 \\ x_n = \lambda x_2 \\ \vdots \\ x_n = \lambda x_{n-1} \\ x_1 + \cdots + x_{n-1} = \lambda x_n \end{cases} \quad \text{ou encore } \begin{cases} x_n = \lambda x_1 \\ x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} \\ (n-1)x_1 = \lambda^2 x_1 \end{cases}$$

On utilise alors cette dernière équation. $x_1 = 0$ entraîne $X = 0$ ce qui est impossible. On a donc $\lambda = \pm\sqrt{n-1}$

qui sont les deux autres valeurs propres. Les sous-espaces propres correspondants sont engendrés par $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix}$.

b) Deuxième méthode

On va plus classiquement chercher le polynôme caractéristique.

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & -\lambda \end{vmatrix}_n = -\lambda \Delta_{n-1} + (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} 0 & -\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -\lambda \\ 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{vmatrix}_{n-1}$$

$= -\lambda \Delta_{n-1} - (-\lambda)^{n-2}$ en développant selon la première ligne puis le déterminant restant selon la première colonne.

On obtient finalement $\Delta_n = (-1)^n (\lambda^n - (n-1)\lambda^{n-2})$ par simple récurrence facile à obtenir. Ce qui fournit bien sûr les mêmes valeurs propres qu'avec la méthode précédente.

Il ne reste qu'à chercher les sous-espaces propres correspondants.

5 Puissances de matrices

Un problème courant est de calculer la puissance $m^{\text{ème}}$ d'une matrice. Même si l'énoncé doit vous guider, on passe ici en revue quelques cas habituels.

5-1 Matrice diagonalisable

$$D = P^{-1}AP$$

et donc

$$A = PDP^{-1}$$

$$A^2 = PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^2P^{-1}$$

et par récurrence très facile

$$A^m = PD^mP^{-1}$$

de plus, si $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$ alors $D^m = \begin{pmatrix} \lambda_1^m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^m & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n^m \end{pmatrix}$

Il ne reste « qu'un calcul » de produit de 3 matrices pour calculer A^m .

5-2 Utilisation d'une matrice dont une puissance est nulle

Si $A = (B + C)$, avec $BC = CB$, alors $A^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} B^{m-k} C^k$ par la formule du binôme.

Si, de plus, $C^3 = 0$ par exemple, alors $A^m = \sum_{k=0}^2 \binom{m}{k} B^{m-k} C^k$ car tous les autres termes sont nuls.

Comme enfin, dans ce cas, on connaît les puissances de B (qui est le plus souvent diagonale...).

Heureusement que l'énoncé vous guide.

Il arrive qu'on utilise une combinaison des deux méthodes précédentes quand la matrice est simplement trigonalisable.

Si A est semblable à $A' = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

La puissance $m^{\text{ème}}$ de la première matrice est facile à obtenir, la deuxième est bien nilpotente et elles commutent... On calcule donc A'^m selon la deuxième méthode puis A^m avec la matrice de passage.

5-3 Utilisation d'un polynôme annulateur

Supposons par exemple que

$$A^2 - 3A + 2I_n = 0$$

On va montrer deux façons classiques de procéder.

a) Par division euclidienne de polynômes

On factorise

$$X^2 - 3X + 2 = (X - 1)(X - 2)$$

Par simple division euclidienne, on écrit :

$$X^m = Q(X)(X-1)(X-2) + aX + b$$

On pose alors successivement $X = 1$ puis $X = 2$.

Ce qui donne $\begin{cases} 1 = a + b \\ 2^m = 2a + b \end{cases}$ d'où $\begin{cases} a = 2^m - 1 \\ b = 2 - 2^m \end{cases}$ et enfin

$$A^m = (2^m - 1)A + (2 - 2^m)I_n$$

Cette méthode est intéressante quand le degré du polynôme annulateur est petit. Elle est applicable quelle que soit la dimension de la matrice A .

b) Par suites récurrentes linéaires

On a :

$$\begin{aligned} A^2 &= 3A - 2I_n \\ A^3 &= 3A^2 - 2A \\ &= 3(3A - 2I_n) - 2A \\ &= 7A - 6I_n \end{aligned}$$

Par récurrence immédiate, les puissances de A sont donc combinaison linéaire de A et de I :

$$A^m = a_m A + b_m I_n$$

On écrit alors A^{m+1} de 2 façons :

$$\begin{aligned} A^{m+1} &= a_m A^2 + b_m A \\ &= a_m (3A - 2I_n) + b_m A \\ &= (3a_m + b_m)A - 2a_m I_n \\ &= a_{m+1}A + b_{m+1}I_n \end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} a_{m+1} &= 3a_m + b_m \\ b_{m+1} &= -2a_m \end{aligned}$$

Ou encore :

$$a_{m+2} = 3a_{m+1} - 2a_m$$

Il ne reste qu'à rechercher, en tenant compte des conditions initiales, cette suite récurrente linéaire.

6 Compléments

6-1 Avec Maple

Comme pour tout l'algèbre linéaire, il faut d'abord charger le pack `linalg` :

```
> with(linalg);
```

```
> charpoly(A, lambda);
```

 calcule le polynôme caractéristique de A de variable λ .

```
> eigenvals(A);
```

 fournit les valeurs propres d'une matrice et

```
> eigenvects(A);
```

 fournit les valeurs propres et une base de chaque sous espace propre. Dans la mesure, bien sûr, où Maple sait résoudre l'équation qui permet de calculer les valeurs propres...

On aura parfois intérêt à voir les racines du polynôme caractéristique de A par :

```
> solve(charpoly(A, lambda), lambda);
```

De plus, comme toujours, on se méfiera des cas particuliers quand il y a des paramètres...

6-2 Les mathématiciens du chapitre

Cayley Arthur 1821-1895 On doit à cet anglais de nombreux travaux sur les matrices, la diagonalisation, la notion de polynôme caractéristique...

Sommaire

1	Produit Scalaire sur E	1	4	Espaces Vectoriels Euclidiens	8
1-1	Forme bilinéaire symétrique sur E . . .	1	4-1	Prod. scal. dans une base orthonormale	9
1-2	Forme quadratique associée	1	4-2	Matrice d'une forme bilinéaire	9
1-3	Forme quadratique définie positive . .	2	4-3	Endomorphisme orthogonal	10
1-4	Produit Scalaire sur E	2	4-4	Matrice orthogonale	11
1-5	Exemples classiques	3	5	Isométries Vectorielles	11
1-6	Inégalité de Cauchy-Schwarz	3	5-1	Symétries orthogonales	11
2	Norme dérivant d'un produit scalaire	4	5-2	Isométries vectorielles du plan	12
2-1	Norme sur E	4	5-3	Isométries vectorielles de l'espace . . .	12
2-2	Norme dérivant d'un produit scalaire	4	5-4	Rotations vectorielles de l'espace . . .	14
2-3	Théorème de Pythagore	5	6	Endomorphismes Symétriques	15
3	Orthogonalité, Orthonormalité	5	6-1	Endomorphismes symétriques	15
3-1	Orthogonalité	5	6-2	Réduction dans une base orthonormale	16
3-2	Orthogonal d'une partie	5	6-3	Identification d'une conique	16
3-3	Famille orthogonale, orthonormale . .	6	6-4	Petits rappels sur les coniques	17
3-4	Théorème et procédé de Schmidt . . .	6	7	Compléments	18
3-5	Projection orthogonale	7	7-1	Avec Maple	18
			7-2	Les mathématiciens du chapitre	19

Dans tout le chapitre, E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

1 Produit Scalaire sur E

1-1 Forme bilinéaire symétrique sur E

Définition : Soit $\Psi : \begin{cases} E \times E \rightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) \mapsto \Psi(u, v) \end{cases}$

On dit que Ψ est **bilinéaire symétrique** sur $E \Leftrightarrow \begin{cases} \forall u \in E, \Psi_u : v \mapsto \Psi_u(v) = \Psi(u, v) \text{ est linéaire} \\ \forall v \in E, \Psi_v : u \mapsto \Psi_v(u) = \Psi(u, v) \text{ est linéaire} \\ \forall u, v \in E, \Psi(u, v) = \Psi(v, u) \end{cases}$

Théorème : Pour montrer qu'une forme est bilinéaire symétrique, il suffit de montrer qu'elle est linéaire par rapport à une variable, au choix, et qu'elle est symétrique.

Démonstration : On sait $\begin{cases} \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \\ \forall u, u_1, u_2 \in E \\ \forall v \in E \end{cases} \quad \begin{cases} \Psi(\lambda.u_1 + \mu.u_2, v) = \lambda \Psi(u_1, v) + \mu \Psi(u_2, v) \\ \Psi(u, v) = \Psi(v, u) \end{cases}$

D'où $\Psi(u, \lambda.v_1 + \mu.v_2) = \Psi(\lambda.v_1 + \mu.v_2, u) = \lambda \Psi(v_1, u) + \mu \Psi(v_2, u) = \lambda \Psi(u, v_1) + \mu \Psi(u, v_2)$ en faisant jouer la symétrie et la linéarité par rapport à chaque variable. On obtient bien la deuxième linéarité. ■

1-2 Forme quadratique associée à une forme bilinéaire symétrique

Définition : Une **forme quadratique** sur $\mathbb{R}^n$ est une application de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ qui se met sous la forme d'un polynôme homogène de degré 2 des coordonnées du vecteur de $\mathbb{R}^n$.

Théorème : Si Ψ est une forme bilinéaire symétrique sur E , alors $q : \begin{cases} E \rightarrow \mathbb{R} \\ u \mapsto q(u) = \Psi(u, u) \end{cases}$ est une forme quadratique, c'est la **forme quadratique associée** à Ψ .

On a : $q(\lambda.u) = \lambda^2 q(u)$, ce qui prouve que q n'est pas linéaire !

Théorème : Si q une forme quadratique sur E , alors $\Psi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\Psi(u, v) = \frac{q(u+v) - q(u) - q(v)}{2}$$

est une forme bilinéaire symétrique.

On dit alors que Ψ est la **forme polaire** de q .

Démonstration : La symétrie est évidente, on admet la bilinéarité.

$$\begin{aligned} \frac{q(u+v) - q(u) - q(v)}{2} &= \frac{\Psi(u+v, u+v) - \Psi(u, u) - \Psi(v, v)}{2} \\ &= \frac{(\Psi(u, u) + \Psi(u, v) + \Psi(v, u) + \Psi(v, v)) - \Psi(u, u) - \Psi(v, v)}{2} \\ &= \frac{\Psi(u, v) + \Psi(v, u)}{2} \\ &= \Psi(u, v) \end{aligned}$$

■

1-3 Forme quadratique définie positive

Définition : q une forme quadratique,
on dit que q est **positive** $\Leftrightarrow \forall u \in E, q(u) \geq 0$.

Définition : q une forme quadratique positive,
on dit que q est **définie-positive** $\Leftrightarrow \forall u \in E, (q(u) = 0 \Leftrightarrow u = 0)$.
On dit aussi que q est **positive non-dégénérée**.

Le même vocabulaire s'applique à la forme bilinéaire symétrique.

1-4 Produit Scalaire sur E

Définition : Un produit scalaire sur E est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur E .
 $\Psi(u, v)$ se note le plus souvent $\langle u, v \rangle$.

Exemple : Le produit scalaire usuel du plan ou de l'espace. La forme quadratique est alors le carré scalaire.

Pour montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire, on montre successivement :

- la linéarité par rapport à une variable,
- la symétrie,
- la positivité de la forme quadratique et enfin,
- son caractère défini-positif.

Définition : Un espace vectoriel **préhilbertien** est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire.

Un espace vectoriel préhilbertien est donc un espace vectoriel réel. Il peut être de dimension finie ou infinie.

Définition : Un espace vectoriel **euclidien** est un espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire.

Un espace vectoriel euclidien est donc un espace vectoriel réel.

1-5 Exemples classiques

a) Produit scalaire défini par une intégrale

On va montrer que sur $\mathbb{R}[X]$, $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t) Q(t) dt$ est un produit scalaire.

Il faut d'abord montrer que c'est une forme bilinéaire symétrique, c'est à dire qu'elle est linéaire par rapport à la première variable et symétrique.

On considère des polynômes quelconques P_1, P_2, Q et des scalaires quelconques λ, μ .

- $\langle \lambda P_1 + \mu P_2, Q \rangle = \lambda \langle P_1, Q \rangle + \mu \langle P_2, Q \rangle$ par simple linéarité de l'intégration.
- $\langle P, Q \rangle = \langle Q, P \rangle$ car $P(t) Q(t) = Q(t) P(t)$ pour tout t

Il faut ensuite montrer que la forme quadratique est positive puis définie-positive.

On considère un polynôme quelconque P .

- $\langle P, P \rangle = \int_0^1 P^2(t) dt \geq 0$ par positivité de l'intégrale. La forme est positive.
- $\langle P, P \rangle = \int_0^1 P^2(t) dt = 0$ implique que $\forall t \in [0,1], P^2(t) = 0$ car c'est un polynôme, donc une application **continue**, qui est de plus positive et d'intégrale nulle (théorème des 3 conditions). On a donc $\forall t \in [0,1], P(t) = 0$ et enfin, $\forall t \in \mathbb{R}, P(t) = 0$, c'est à dire $P = 0$ car un **polynôme** qui a une infinité de racines est nul.

La forme est donc bien définie positive.

Finalement, sur $\mathbb{R}[X]$, $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t) Q(t) dt$ est un produit scalaire.

b) Produit scalaire sur un espace de matrices

Montrons que $\langle A, B \rangle = \text{tr}({}^tAB)$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Il faut montrer la linéarité par rapport à la première (ou la deuxième) variable, la symétrie, puis il faut montrer que la forme quadratique associée est positive, puis définie-positive.

- $\langle A, \lambda B + \mu C \rangle = \text{tr}({}^tA(\lambda B + \mu C)) = \text{tr}(\lambda {}^tAB + \mu {}^tAC) = \lambda \text{tr}({}^tAB) + \mu \text{tr}({}^tAC)$
Ce qui donne : $\langle A, \lambda B + \mu C \rangle = \lambda \langle A, B \rangle + \mu \langle A, C \rangle$ en utilisant la linéarité de la trace.
- $\langle B, A \rangle = \text{tr}({}^tBA) = \text{tr}({}^t({}^tBA)) = \text{tr}({}^tAB) = \langle A, B \rangle$, en utilisant le fait qu'une matrice et sa transposée ont la même trace.

La forme est donc bilinéaire symétrique.

- tAB a pour coefficient $i^{\text{ème}}$ ligne, $j^{\text{ème}}$ colonne : $\sum_{j=1}^n a_{ji} b_{ji}$, celui de tAA est : $\sum_{j=1}^n a_{ji}^2$

$$\text{d'où : } \langle A, A \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ji}^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \geq 0.$$

La forme est bien positive.

- $\langle A, A \rangle = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 = 0 \Rightarrow \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}, a_{ij} = 0$ et enfin $A = 0$.

La forme est définie positive.

On a bien un produit scalaire. De plus : $\|A\|^2 = \langle A, A \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2$.

1-6 Inégalité de Cauchy-Schwarz (ou de Schwarz)

Théorème : $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur E , alors,

$$\forall u, v \in E, |\langle u, v \rangle| \leq \sqrt{\langle u, u \rangle} \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

L'égalité n'est vérifiée que si u et v sont liés.

Démonstration : On a $\forall \lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\langle u + \lambda.v, u + \lambda.v \rangle &\geq 0 \\ \langle v, v \rangle \lambda^2 + 2 \langle u, v \rangle \lambda + \langle u, u \rangle &\geq 0\end{aligned}$$

expression du second degré en λ , qui ne change pas de signe, elle a donc un discriminant négatif,

d'où : $\frac{\Delta}{4} = \langle u, v \rangle^2 - \langle v, v \rangle \langle u, u \rangle \leq 0$ Ce qui assure le résultat.

Remarquons que l'égalité : $|\langle u, v \rangle| = \sqrt{\langle u, u \rangle} \sqrt{\langle v, v \rangle}$ ne se produit que si $\Delta = 0$, donc si $\langle v, v \rangle \lambda^2 + 2 \langle u, v \rangle \lambda + \langle u, u \rangle = 0$ pour un certain λ .

Cela revient à $\langle u + \lambda.v, u + \lambda.v \rangle = 0$ et enfin $u + \lambda.v = 0$, u et v sont liés. ■

Exemple : On va appliquer l'inégalité de Schwarz avec le produit scalaire précédent et $Q(t) = t$, compte tenu que $\int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}$, on obtient $\left(\int_0^1 t P(t) dt \right)^2 \leq \frac{1}{3} \int_0^1 P^2(t) dt$ qui est un résultat valable pour tout polynôme P .

On n'oubliera donc pas que l'inégalité de Schwartz permet de montrer de nombreuses inégalités « étonnantes ».

2 Norme dérivant d'un produit scalaire

2-1 Norme sur E

Définition : $\begin{cases} E \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ u \mapsto \|u\| \end{cases}$ est une norme $\Leftrightarrow \begin{cases} \forall u, v \in E, \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| \text{ (inégalité triangulaire)} \\ \forall u \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \|\lambda.u\| = |\lambda| \|u\| \text{ (positive homogénéité)} \\ \|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0 \text{ (séparation)} \end{cases}$

La norme d'un vecteur u est souvent notée $\|u\|$

Même si on parle souvent de la norme d'un vecteur, il y a des infinités de normes différentes...

Exemple : $E = \mathbb{R}^2$, $\begin{cases} \|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ est la norme usuelle, mais} \\ \|(x, y)\| = |x| + |y| \text{ est une autre norme, de même que} \\ \|(x, y)\| = \max(|x|, |y|) \text{ en est une troisième} \end{cases}$

2-2 Norme dérivant d'un produit scalaire

Théorème : Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur E , alors : $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle} = \sqrt{q(u)}$ est une norme sur E .

Démonstration : $\|\lambda.u\| = \sqrt{\langle \lambda.u, \lambda.u \rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle u, u \rangle} = |\lambda| \|u\|$

d'autre part, $\|u + v\|^2 = \sqrt{\langle u + v, u + v \rangle}^2 = \langle u + v, u + v \rangle = \langle u, u \rangle + 2 \langle u, v \rangle + \langle v, v \rangle$

d'où, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $\|u + v\|^2 \leq \|u\|^2 + 2 \|u\| \|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2$ ce qui donne la deuxième relation. Enfin : $\|u\| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\langle u, u \rangle} = 0 \Leftrightarrow \langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$ ■

Tout produit scalaire induit donc une norme sur E , souvent appelée norme euclidienne.

L'inégalité de Cauchy-Schwarz se réécrit alors :

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$$

Par contre, toutes les normes ne proviennent pas d'un produit scalaire... On verra des contre-exemples dans le chapitre suivant.

2-3 Théorème de Pythagore

Théorème : $\|\cdot\|$ une norme euclidienne et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ son produit scalaire, alors $\forall u, v \in E$,

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2 \langle u, v \rangle$$

Corollaire : $\|\cdot\|$ une norme euclidienne et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ son produit scalaire, alors

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 \Leftrightarrow \langle u, v \rangle = 0$$

La démonstration a été faite dans la démonstration du théorème précédent.

3 Orthogonalité, Orthonormalité

3-1 Orthogonalité

Définition : u et v sont orthogonaux pour $\langle \cdot, \cdot \rangle \Leftrightarrow \langle u, v \rangle = 0$

Exemple : $E = C^0([0, 2\pi])$, $\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(t) g(t) dt$, alors $\begin{cases} f : t \rightarrow \sin t \\ g : t \rightarrow \cos t \end{cases}$ sont orthogonales.

En effet, c'est encore le théorème des 3 conditions qui permet de prouver qu'on a encore affaire à un produit scalaire et $\int_0^{2\pi} \sin t \cos t dt = \left[\frac{1}{2} \sin^2 t \right]_0^{2\pi} = 0$, ce qui prouve l'orthogonalité.

Le vecteur nul est orthogonal à tous les vecteurs.

3-2 Orthogonal d'une partie

Théorème : Soit A une partie non vide de E , préhilbertien,

$$A^\perp = \{u \in E, \forall v \in A, \langle u, v \rangle = 0\}$$

est un sous espace vectoriel de E .

Si A ne contient qu'un seul vecteur v , on le note alors $v^\perp$.

Démonstration : $A^\perp$ est clairement non vide. Montrons qu'il est stable par combinaison linéaire.

$$\text{Soit } \begin{cases} u_1, u_2 \in A^\perp \\ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \\ v \in A \end{cases}, \text{ alors } \langle \lambda u_1 + \mu u_2, v \rangle = \lambda \langle u_1, v \rangle + \mu \langle u_2, v \rangle = 0.$$

Comme v est quelconque, ceci prouve que $\lambda u_1 + \mu u_2 \in A^\perp$ qui est donc un sous espace vectoriel. ■

Exemple : Dans $\mathbb{R}[X]$, muni du nouveau produit scalaire (admis) $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t) Q(t) dt$, on va chercher l'orthogonal de l'ensemble $\mathcal{P}$ des polynômes pairs, dont on admet qu'il constitue un sous-espace vectoriel. Soit Q est un polynôme quelconque orthogonal à tous les polynômes pairs.

On considère $Q_{\mathcal{P}}$ et $Q_{\mathcal{I}}$ définis par $Q_{\mathcal{P}}(t) = \frac{Q(t) + Q(-t)}{2}$ et $Q_{\mathcal{I}}(t) = \frac{Q(t) - Q(-t)}{2}$ qui sont respectivement pairs et impairs.

On a $Q = Q_{\mathcal{P}} + Q_{\mathcal{I}}$.

Soit P un polynôme pair quelconque.

$$\langle P, Q \rangle = 0 = \int_{-1}^1 P(t) Q(t) dt = \int_{-1}^1 P(t) Q_{\mathcal{P}}(t) dt + \underbrace{\int_{-1}^1 P(t) Q_{\mathcal{I}}(t) dt}_{\text{impair}} = \int_{-1}^1 P(t) Q_{\mathcal{P}}(t) dt$$

En prenant $P = Q_{\mathcal{P}}$, on obtient en utilisant encore le théorème des 3 conditions $Q_{\mathcal{P}} = 0$ et donc Q est impair. Comme tout polynôme impair convient, l'orthogonal de l'ensemble $\mathcal{P}$ des polynômes pairs est l'ensemble des polynômes impairs.

Théorème : $(Vect(u_1, u_2, \dots, u_n))^\perp = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}^\perp$

Démonstration : Il est clair que $(Vect(u_1, u_2, \dots, u_n))^\perp \subset \{u_1, u_2, \dots, u_n\}^\perp$

D'autre part, soit $v \in \{u_1, u_2, \dots, u_n\}^\perp$, $\langle v, u_1 \rangle = \langle v, u_2 \rangle = \dots = \langle v, u_n \rangle = 0$

On a donc $\langle v, \lambda_1.u_1 + \lambda_2.u_2 + \dots + \lambda_n.u_n \rangle = 0$ ou encore $v \in (Vect(u_1, u_2, \dots, u_n))^\perp$ ■

3-3 Famille orthogonale, orthonormale de vecteurs

Définition : Une famille $(u_i)_{i \in I}$ de vecteurs est **orthogonale** $\Leftrightarrow$ deux vecteurs quelconques de cette famille, u_i, u_j , pour $i \neq j$ sont orthogonaux.

Définition : Une famille $(u_i)_{i \in I}$ de vecteurs est **orthonormale** $\Leftrightarrow$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{deux vecteurs quelconques de cette famille, } u_i, u_j, \text{ pour } i \neq j \text{ sont orthogonaux.} \\ \text{tout vecteur } u_i \text{ de cette famille est normé } (\|u_i\| = 1). \end{array} \right.$

On passe d'une famille orthogonale de vecteurs **non nuls** à une famille orthonormale en normant chaque vecteur.

Théorème : Toute famille orthonormale ou toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.

Démonstration : Soit $\lambda_1.u_1 + \lambda_2.u_2 + \dots + \lambda_n.u_n = 0$, on fait le produit scalaire par u_n , tous les $\langle u_i, u_n \rangle$ sont nuls sauf $\langle u_n, u_n \rangle$ d'où $\lambda_n = 0$. Par récurrence immédiate, tous les λ_i sont nuls, la famille est libre. ■

3-4 Théorème et procédé de Schmidt

Théorème : Soit $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une famille libre de vecteurs de E préhilbertien, alors, il existe une famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ orthonormale de vecteur telle que

$$Vect(e_1, e_2, \dots, e_n) = Vect(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$$

Démonstration : Il suffit de fabriquer une famille orthonormale $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$,

la dimension de $Vect(e_1, e_2, \dots, e_n)$ étant n , les ε_i sont non nuls.

La démonstration repose sur le fait qu'on ne change pas l'espace vectoriel engendré par une famille

- en ajoutant à cette famille des vecteurs de l'espace vectoriel engendré ou
- en enlevant à cette famille un ou des vecteurs combinaison linéaire des autres.

La démonstration se fait par récurrence sur n .

Pour $n = 1$, $\varepsilon_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}$ convient.

On l'admet au rang n , on le montre au rang $n + 1$.

$$\begin{aligned} Vect(e_1, e_2, \dots, e_n, e_{n+1}) &= Vect(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n, e_1, e_2, \dots, e_n, e_{n+1}) \\ &= Vect(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n, e_{n+1}) \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon_{n+1}^* = e_{n+1} + \lambda_1.\varepsilon_1 + \lambda_2.\varepsilon_2 + \dots + \lambda_n.\varepsilon_n$ avec $\lambda_i = -\frac{\langle e_{n+1}, \varepsilon_i \rangle}{\langle \varepsilon_i, \varepsilon_i \rangle}$,

alors $\langle \varepsilon_{n+1}^*, \varepsilon_i \rangle = 0$ pour $1 \leq i \leq n$.

On pose $\varepsilon_{n+1} = \frac{\varepsilon_{n+1}^*}{\|\varepsilon_{n+1}^*\|}$ avec toujours les mêmes orthogonalités.

Et donc

$$\begin{aligned} Vect(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n, e_{n+1}) &= Vect(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n, e_{n+1}, \varepsilon_{n+1}) \\ &= Vect(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n, \varepsilon_{n+1}) \end{aligned}$$

La famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n, \varepsilon_{n+1})$ est bien orthonormale. ■

Corollaire : Tout espace vectoriel euclidien, ou tout sous espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien possède au moins une base orthonormale.

Démonstration : On applique le théorème de Schmidt à une base quelconque. ■

En pratique, la démonstration du théorème nous guide vers le procédé de Schmidt :

- On part d'une base quelconque $(e_1, e_2, \dots, e_n)$
- On pose $\varepsilon_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}$ C'est le premier vecteur de la base orthonormale.
- On pose $\varepsilon_2^* = e_2 + \lambda \cdot \varepsilon_1$ On cherche λ tel que $\langle \varepsilon_2^*, \varepsilon_1 \rangle = 0$, ce qui donne $\lambda = -\langle e_2, \varepsilon_1 \rangle$
- On pose $\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_2^*}{\|\varepsilon_2^*\|}$ C'est le deuxième vecteur de la base orthonormale.
- On pose $\varepsilon_3^* = e_3 + \lambda \cdot \varepsilon_1 + \mu \cdot \varepsilon_2$ On cherche λ et μ tel que $\begin{cases} \langle \varepsilon_3^*, \varepsilon_1 \rangle = 0 \\ \langle \varepsilon_3^*, \varepsilon_2 \rangle = 0 \end{cases}$, d'où $\begin{cases} \lambda = -\langle e_3, \varepsilon_1 \rangle \\ \mu = -\langle e_3, \varepsilon_2 \rangle \end{cases}$
- On pose $\varepsilon_3 = \frac{\varepsilon_3^*}{\|\varepsilon_3^*\|}$ C'est le troisième vecteur de la base orthonormale.
- On continue ainsi en n'oubliant pas qu'à chaque étape, le calcul s'allonge...
- En pratique, on travaille en théorie le plus longtemps possible ! On profite ainsi de nombreuses simplifications a priori.

Exemple : Dans $E = \mathbb{R}_2[X]$, muni du nouveau produit scalaire (admis) $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t) Q(t) dt$, on va chercher une base orthonormale. On part de la base $(1, X, X^2)$

On a $\varepsilon_1^* = 1$ puis $\varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ le premier vecteur normé, ceci par un calcul simple.

$\varepsilon_2^* = X + \lambda \varepsilon_1$, on écrit $\langle \varepsilon_2^*, \varepsilon_1 \rangle = 0 = \langle X, \varepsilon_1 \rangle + \lambda = \lambda$, et on obtient $\varepsilon_2 = X \sqrt{\frac{3}{2}}$, encore par un calcul simple.

$\varepsilon_3^* = X^2 + \lambda \varepsilon_2 + \mu \varepsilon_1$, on écrit $\langle \varepsilon_3^*, \varepsilon_1 \rangle = 0 = \langle X^2, \varepsilon_1 \rangle + \mu$ d'où $\mu = -\frac{\sqrt{2}}{3}$ et $\langle \varepsilon_3^*, \varepsilon_2 \rangle = 0 = \langle X^2, \varepsilon_2 \rangle + \lambda = \lambda$

D'où $\varepsilon_3^* = X^2 - \frac{1}{3}$ qu'il suffit de normer pour obtenir $\varepsilon_3 = \frac{X^2 - \frac{1}{3}}{\frac{2}{15}\sqrt{10}} = \frac{(3X^2 - 1)\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$

On voit que le calcul devient vite complexe...

3-5 Projection orthogonale sur un sous espace de dimension finie

Théorème : E un espace vectoriel préhilbertien, F un sous espace vectoriel de dimension finie muni d'une base orthonormale $(e_1, e_2, \dots, e_n)$. Alors

$$p : u \rightarrow p(u) = \langle u, e_1 \rangle \cdot e_1 + \dots + \langle u, e_n \rangle \cdot e_n$$

définit un projecteur. Et comme $(u - p(u)) \in F^\perp$, on dit que p est la projection orthogonale sur F .

La figure 1, page suivante, illustre ce théorème.

Démonstration : Pour montrer que $(u - p(u)) \in F^\perp$, il suffit de montrer qu'il est orthogonal à chaque e_i .

$$\begin{aligned} \langle u - p(u), e_i \rangle &= \langle u, e_i \rangle - \langle \langle u, e_1 \rangle \cdot e_1 + \dots + \langle u, e_n \rangle \cdot e_n, e_i \rangle \\ &= \langle u, e_i \rangle - \langle \langle u, e_i \rangle \cdot e_i, e_i \rangle \end{aligned}$$

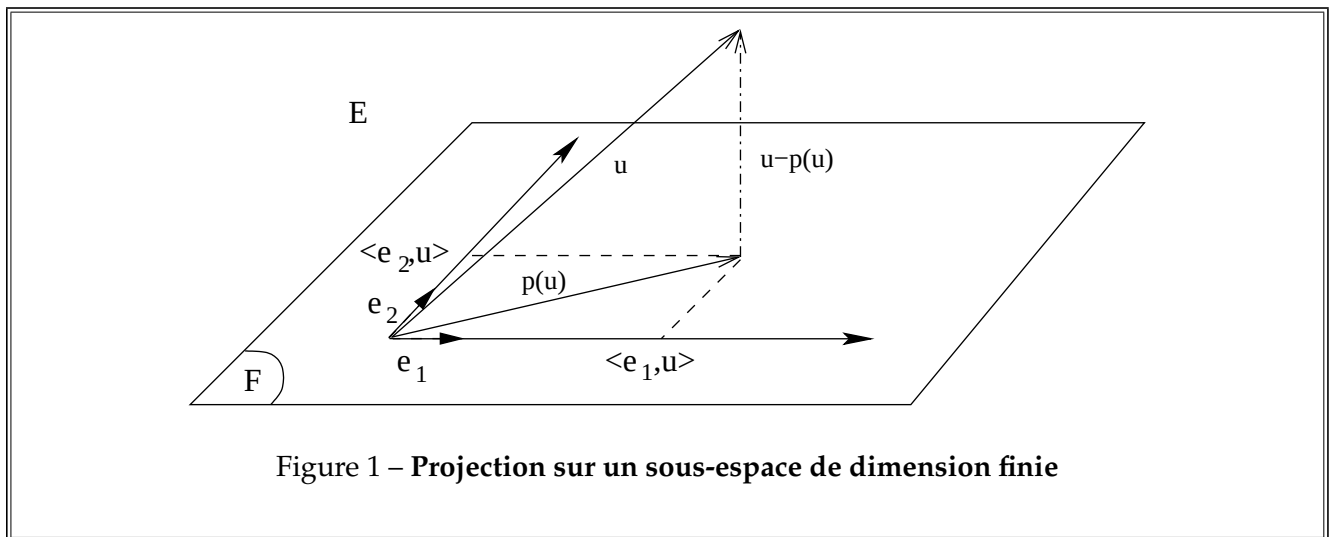
car tous les autres termes sont nuls. D'où

$$\langle u - p(u), e_i \rangle = \langle u, e_i \rangle - \langle u, e_i \rangle \langle e_i, e_i \rangle = 0$$

p est clairement linéaire par linéarité du produit scalaire par rapport à la première variable.

Il reste à montrer que p est un projecteur, c'est à dire $p \circ p = p$.

$$\begin{aligned} p \circ p(u) &= p(p(u)) \\ &= p(\langle u, e_1 \rangle \cdot e_1 + \dots + \langle u, e_n \rangle \cdot e_n) \\ &= \langle u, e_1 \rangle \cdot p(e_1) + \dots + \langle u, e_n \rangle \cdot p(e_n) \\ &= \langle u, e_1 \rangle \cdot e_1 + \dots + \langle u, e_n \rangle \cdot e_n \end{aligned}$$



car $p(e_i) = \langle e_i, e_i \rangle \cdot e_i = e_i$.
D'où

$$p \circ p(u) = p(u)$$

et enfin

$$p \circ p = p$$

Lorsque E est de dimension finie, on montre facilement que $E = F \oplus F^\perp$ et p est la projection sur F parallèlement à $F^\perp$, on appelle souvent q la projection sur $F^\perp$ parallèlement à F , on a alors $Id = p + q$. ■

En pratique, comme il faut une base orthonormale du sous espace sur lequel on projette, on cherchera p si $\dim F \leq \dim F^\perp$, et q sinon. On projette sur le plus petit...

Exemple : Dans $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel, on cherche p la projection orthogonale sur le plan P d'équation $x + y - z = 0$

$$P^\perp = Vect \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \text{ de base orthonormale } \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$\text{Avec } u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \text{ on a } q(u) = \left\langle u, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \end{pmatrix} = \frac{x + y - z}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{D'où } p(u) = u - q(u) = \begin{pmatrix} x - \frac{x + y - z}{3} \\ y - \frac{x + y - z}{3} \\ z + \frac{x + y - z}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2x - y + z \\ -x + 2y + z \\ x + y + 2z \end{pmatrix}$$

$$\text{La matrice de cette projection dans la base canonique est donc : } \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

4 Espaces Vectoriels Euclidiens

Rappelons que ce sont les espaces vectoriels réels de dimension finie munis d'un produit scalaire.

4-1 Produit scalaire et norme dans une base orthonormale

Théorème : E étant muni d'une base orthonormale $(e_1, \dots, e_n)$, $U : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $V : \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ les vecteurs colonnes des coordonnées de u et v dans la base, alors $\langle u, v \rangle = {}^t U V = \sum_{i=1}^n x_i y_i$

De plus, la **norme** euclidienne est $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$

Démonstration : Par bilinéarité :

$$\langle u, v \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n x_i \cdot e_i, \sum_{j=1}^n y_j \cdot e_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \langle e_i, e_j \rangle,$$

Les produits scalaires $\langle e_i, e_j \rangle$ sont nuls pour $i \neq j$ et valent 1 sinon.
Ce qui donne :

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

■

4-2 Matrice d'une forme bilinéaire symétrique, d'une forme quadratique dans une base

Comme on passe d'une forme bilinéaire symétrique à une forme quadratique et réciproquement, ce sera la même matrice.

Par bilinéarité, avec les mêmes notations,

$$\Psi(u, v) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \Psi(e_i, e_j)$$

Définition : $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $M = (\Psi(e_i, e_j))_{1 \leq i, j \leq n}$ est appelée matrice de Ψ , forme bilinéaire symétrique, dans la base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. C'est une matrice symétrique. On a alors :

$$\Psi(u, v) = {}^t U M V$$

Dans le cas particulier où $E = \mathbb{R}^n$:

- Si on a la forme bilinéaire symétrique écrite $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j m_{i,j}$, il suffit de mettre $m_{i,j}$ en $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne de M .
- Si on a la forme quadratique écrite $q(u) = \sum_{i=1}^n m_{i,i} x_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n x_i y_j m_{i,j}$, il suffit de mettre sur la diagonale les coefficients de x_i^2 et ailleurs la **moitié** des coefficients de $x_i x_j$, c'est à dire ici $m_{i,j}$.

Exemple : En dimension 2, considérons la forme quadratique : $q(u) = 2x^2 + xy$.

Sa matrice dans la même base est : $\begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

4-3 Endomorphisme orthogonal, groupe orthogonal

Définition : Un endomorphisme φ de E un espace vectoriel euclidien, est dit **orthogonal**

$\Leftrightarrow \varphi$ conserve le produit scalaire

$\Leftrightarrow \forall u, v \in E, \langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle = \langle u, v \rangle$

Théorème : φ est orthogonal $\Leftrightarrow \varphi$ conserve la norme $\Leftrightarrow \forall u \in E, \|\varphi(u)\| = \|u\|$

Démonstration : On a :

$$\begin{aligned} \|\varphi(u+v)\|^2 &= \langle \varphi(u+v), \varphi(u+v) \rangle \\ &= \langle \varphi(u), \varphi(u) \rangle + 2 \langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle + \langle \varphi(v), \varphi(v) \rangle = \|u+v\|^2 \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\|u+v\|^2 = \langle u, u \rangle + 2 \langle u, v \rangle + \langle v, v \rangle = \langle u, u \rangle + 2c + \langle v, v \rangle$$

D'où $\langle u, v \rangle = \langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle$. La réciproque est évidente en prenant $u = v$. ■

Théorème : Un endomorphisme orthogonal est un automorphisme.

Démonstration : Il suffit de montrer que φ est injective car E est de dimension finie.

$$\varphi(u) = 0 \Leftrightarrow \|\varphi(u)\| = 0 \Leftrightarrow \|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$$

■

Théorème : Un endomorphisme orthogonal conserve l'orthogonalité.

Théorème : Un endomorphisme est orthogonal

$\Leftrightarrow$ il transforme une base orthonormale en une base orthonormale

$\Leftrightarrow$ il transforme toute base orthonormale en une base orthonormale.

Démonstration : Les implications directes sont claires car c'est un automorphisme qui conserve l'orthogonalité. Pour la réciproque,

on considère $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormale, et φ un endomorphisme tel que $(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \dots, \varphi(e_n))$ soit une base orthonormale.

$$\begin{aligned} \langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \langle \varphi(e_i), \varphi(e_j) \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ &= \langle u, v \rangle \end{aligned}$$

■

Théorème : L'ensemble des endomorphismes orthogonaux de E , muni de la loi $\circ$ de composition des applications est un groupe noté $O(E)$, sous groupe de $GL(E)$.

Démonstration : On montre que $O(E)$ est un sous groupe de $GL(E)$.

$O(E)$ est non vide car il contient l'identité.

Si φ et ψ appartiennent à $O(E)$,

$$\begin{aligned} \langle \psi \circ \varphi(u), \psi \circ \varphi(v) \rangle &= \langle \psi(\varphi(u)), \psi(\varphi(v)) \rangle = \langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle \\ &= \langle u, v \rangle \end{aligned}$$

Si φ appartient à $O(E)$, φ est un automorphisme, on peut donc considérer φ^{-1} .

$$\begin{aligned} \langle \varphi^{-1}(u), \varphi^{-1}(v) \rangle &= \langle \varphi \circ \varphi^{-1}(u), \varphi \circ \varphi^{-1}(v) \rangle \\ &= \langle u, v \rangle \end{aligned}$$

■

4-4 Matrice orthogonale

Définition : Une matrice M est **orthogonale**

$\Leftrightarrow M$ est la matrice d'un endomorphisme orthogonal dans une base orthonormale.

Théorème : M est orthogonale

$\Leftrightarrow$ les vecteurs colonnes de M sont normés et orthogonaux 2 à 2

$\Leftrightarrow$ les vecteurs lignes de M sont normés et orthogonaux 2 à 2

$\Leftrightarrow M^{-1} = {}^tM$

$\Leftrightarrow M {}^tM = {}^tMM = I$ (une seule égalité suffit).

Démonstration : M est la matrice de φ , endomorphisme orthogonal, dans la base orthonormale $(e_1, e_2, \dots, e_n)$. Les vecteurs colonnes de M sont les vecteurs d'une base orthonormale, ils sont donc normés et orthogonaux 2 à 2.

Réciproquement, si les vecteurs colonnes sont normés et orthogonaux 2 à 2, φ transforme une base orthonormale en une base orthonormale. φ est donc orthogonal et M orthogonale.

L'équivalence à $M {}^tM = I$ en découle immédiatement.

$M {}^tM = I \Leftrightarrow M^{-1} = {}^tM \Leftrightarrow {}^tM M = I \Leftrightarrow {}^tM$ est orthogonale.

Et enfin, cela équivaut à ce que les vecteurs lignes de M sont normés et orthogonaux 2 à 2. ■

Une matrice orthogonale s'interprète donc comme la matrice d'un endomorphisme orthogonal dans une base orthonormale ou comme une matrice de changement de bases orthonormales.

Notation : Si $E = \mathbb{R}^n$, le groupe orthogonal de E se note $O(n)$. La loi est alors le produit des matrices.

5 Isométries Vectorielles du Plan et de l'Espace

Dans une base orthonormale, la matrice d'une isométrie, application qui conserve la norme des vecteurs, est orthogonale, ce qui est une propriété caractéristique. Une matrice orthogonale est donc la matrice d'une isométrie dans une base orthonormale.

C'est cette isométrie dont on cherche à identifier les éléments géométriques.

5-1 Cas particulier des symétries orthogonales

Théorème : Une isométrie vectorielle est une **symétrie** orthogonale $\Leftrightarrow$ Sa matrice dans une base orthonormale est **symétrique**.

Démonstration : Soit φ l'isométrie et M sa matrice, orthogonale, dans une base orthonormale.

Si φ est une symétrie orthogonale, $\varphi \circ \varphi = Id$, donc $M^2 = I$ d'où $M = M^{-1} = {}^tM$.

M est donc symétrique.

Réciproquement, si M est symétrique, $M = {}^tM = M^{-1}$ donc $M^2 = I$ et $\varphi \circ \varphi = Id$, on a bien montré que φ est une symétrie orthogonale. ■

Cette isométrie est donc la symétrie orthogonale par rapport à l'ensemble des vecteurs invariants. L'interprétation géométrique de cette isométrie ne dépend donc que de la dimension de cet espace vectoriel.

a) Symétries orthogonales du plan

On trouve :

- L'identité, qui est une isométrie directe.
Tous les vecteurs sont invariants.
- Une symétrie orthogonale par rapport à une droite vectorielle, isométrie indirecte.
On a une droite vectorielle invariante.

- Moins l'identité, isométrie directe.
Seul le vecteur nul est invariant.
C'est aussi la rotation d'angle π .

b) Symétries orthogonales de l'espace

On trouve :

- L'identité, qui est une isométrie directe.
Tous les vecteurs sont invariants.
- Une symétrie orthogonale par rapport à une droite vectorielle, isométrie directe.
On a une droite vectorielle invariante.
C'est aussi une rotation d'angle π autour de cette droite.
- Une symétrie orthogonale par rapport à un plan vectoriel, isométrie indirecte.
On a un plan vectoriel invariant.
- Moins l'identité, isométrie indirecte.
Seul le vecteur nul est invariant.

Une symétrie orthogonale par rapport à une droite est indirecte quand on travaille dans le plan et directe quand on travaille dans l'espace...

5-2 Isométries vectorielles du plan

Dans une base orthonormale, la matrice est orthogonale.
On a déjà reconnu les éventuelles symétries orthogonales.

a) Isométries directes, le déterminant vaut 1

C'est une rotation d'angle θ , l'identité ou moins l'identité. La matrice est :
$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

b) Isométrie indirecte, le déterminant vaut -1

C'est une symétrie orthogonale par rapport à la droite $D_{\frac{\theta}{2}}$ tournée de $\frac{\theta}{2}$ par rapport à l'axe Ox .

La matrice est :
$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

5-3 Isométries vectorielles de l'espace

On a déjà reconnu les éventuelles symétries orthogonales. Dans une base orthonormale, la matrice est orthogonale.

Il y a toujours une valeur propre réelle puisque le polynôme caractéristique est réel de degré 3. Cette valeur propre est 1 ou -1.

Si les autres valeurs propres ne sont pas réelles, elles sont conjuguées, de produit positif. Comme le déterminant est le produit des valeurs propres, si le déterminant vaut 1, alors 1 est valeur propre, s'il vaut -1, alors -1 est valeur propre.

On ne considérera pas le cas où l'isométrie est l'identité.

a) Isométrie directe : le déterminant vaut 1, le troisième vecteur est le produit vectoriel des 2 premiers

Dans une certaine base, la matrice est :
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

C'est l'identité ou une rotation d'axe dirigé par un vecteur propre associé à 1 : $\vec{e}_1$, le premier vecteur de la base considérée, et d'angle θ .

On trouve θ :

- en cherchant $\cos \theta$ par la trace qui vaut $1 + 2 \cos \theta$
- en cherchant le signe de $\sin \theta$ qui est celui de $\det(\vec{e}_1, \vec{u}, \varphi(\vec{u}))$, $\vec{u}$ étant un vecteur quelconque non colinéaire à $\vec{e}_1$.
- le seul cas particulier est quand $\cos \theta = -1$, c'est à dire quand $\theta = \pi_{[2\pi]}$, auquel cas c'est une rotation d'angle π , appelée aussi demi-tour, c'est aussi la symétrie orthogonale par rapport à l'axe dirigé par $\vec{e}_1$.

b) Isométrie indirecte : le déterminant vaut -1, le troisième vecteur est l'opposé du produit vectoriel des 2 premiers

Dans une certaine base, la matrice est :
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

C'est la composée commutative

- d'une rotation vectorielle et,
- d'une symétrie orthogonale par rapport au plan orthogonal à l'axe de la rotation.

On cherche d'abord l'axe de la rotation, qui est le sous-espace propre pour la valeur propre -1 , qu'on oriente dans le sens de $\vec{e}_{-1}$.

On cherche ensuite $\cos \theta$ par la trace qui vaut ici $-1 + 2 \cos \theta$.

- Si $\cos \theta = 1$, ce qui revient à ce que $\theta = 0_{[2\pi]}$, la rotation est l'identité. C'est simplement la symétrie orthogonale par rapport au plan orthogonal à « l'axe ».
- Sinon, c'est la composée annoncée. La seule donnée qui nous manque est le signe de $\sin \theta$ qui se trouve comme dans le cas d'une isométrie directe.

Le signe de $\sin \theta$ est celui de $\det(\vec{e}_{-1}, \vec{u}, \varphi(\vec{u}))$, $\vec{u}$ étant un vecteur quelconque non colinéaire à $\vec{e}_{-1}$.

Exemple : On va identifier la transformation

dont la matrice dans une base orthonormale est :
$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Il est facile de voir que cette matrice est orthogonale, il s'agit donc d'une isométrie vectorielle. Comme, de plus, elle est symétrique, c'est une symétrie vectorielle.

Il suffit de rechercher les vecteurs invariants, ce qui revient à :
$$\begin{cases} -5x - 2y + z = 0 \\ -2x - 2y - 2z = 0 \\ x - 2y - 5z = 0 \end{cases}.$$

En soustrayant la première et la troisième ligne, on obtient $x = z$ et le système devient :
$$\begin{cases} x = z \\ 2x + y = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases}.$$

Il s'agit d'une droite vectorielle $\vec{\Delta}$ engendrée par $\vec{u} : \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$

L'isométrie est la symétrie orthogonale par rapport à $\vec{\Delta}$, c'est aussi la rotation d'axe $\vec{\Delta}$ et d'angle π .

Exemple : On va identifier la transformation

dont la matrice dans une base orthonormale est :

$$\begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Il est facile de voir que cette matrice est orthogonale, il s'agit donc d'une isométrie vectorielle.

Ca n'est pas une symétrie orthogonale, car la matrice n'est pas symétrique.

Le troisième vecteur est l'opposé du produit vectoriel des deux premiers, c'est donc une isométrie indirecte.

On est dans le cas de la composée commutative d'une rotation et d'une symétrie orthogonale.

L'axe de la rotation et le plan de symétrie qui lui est orthogonal sont donnés par les vecteurs transformés en

leur opposé : $\begin{cases} x - y - z\sqrt{6} = 0 \\ -x + y + z\sqrt{6} = 0 \\ x\sqrt{6} - y\sqrt{6} + 2z = 0 \end{cases}$ qui équivaut au système : $\begin{cases} x - y - z\sqrt{6} = 0 \\ 6x - 6y + 2z\sqrt{6} = 0 \end{cases}$ ou encore : $\begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}.$

L'axe est la droite vectorielle $\vec{\Delta}$ engendrée et dirigée par $\vec{u} : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

Le plan de symétrie est le plan $\vec{\Pi}$ d'équation $x + y = 0$.

L'angle de la rotation vérifie $-1 + 2 \cos \theta = -2$ en utilisant la trace. On a donc $\cos \theta = -\frac{1}{2}$.

Le signe de $\sin \theta$ est le signe de $\begin{vmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & \sqrt{6} & 0 \end{vmatrix} < 0$, et donc $\theta = -\frac{2\pi}{3}$ à 2π près.

La transformation est la composée commutative de la rotation d'axe $\vec{\Delta}$ engendrée et dirigée par $\vec{u} : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, d'angle $-\frac{2\pi}{3}$ et de la symétrie orthogonale par rapport au plan $\vec{\Pi}$ d'équation $x + y = 0$.

5-4 Rotations vectorielles de l'espace

Théorème : Si φ est la rotation d'angle θ , et d'axe dirigé par $\vec{e}_1$ alors :

$$\varphi(\vec{u}) = (1 - \cos \theta) \frac{\vec{e}_1 \cdot \vec{u}}{\|\vec{e}_1\|^2} \vec{e}_1 + \cos \theta \vec{u} + \sin \theta \frac{\vec{e}_1 \wedge \vec{u}}{\|\vec{e}_1\|}$$

Démonstration : Il suffit de prendre une base orthonormale $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, pour laquelle $\vec{i}$ est colinéaire à $\vec{e}_1$, de

même sens, la matrice de φ est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$

L'image de $\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \cos \theta - z \sin \theta \\ y \sin \theta + z \cos \theta \end{pmatrix}.$

La formule peut se réécrire : $\varphi(\vec{u}) = (1 - \cos \theta) \vec{i} \cdot \vec{u} \vec{i} + \cos \theta \vec{u} + \sin \theta \vec{i} \wedge \vec{u}$

On calcule les coordonnées de $(1 - \cos \theta) \vec{i} \cdot \vec{u} \vec{i} + \cos \theta \vec{u} + \sin \theta \vec{i} \wedge \vec{u}$:

$$\begin{pmatrix} (1 - \cos \theta) x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \cos \theta \\ y \cos \theta \\ z \cos \theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -z \sin \theta \\ y \sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \cos \theta - z \sin \theta \\ y \sin \theta + z \cos \theta \end{pmatrix}$$

Démonstration : On va donner ici une autre démonstration moins besogneuse.

Soit $\vec{i}$ normé et colinéaire à $\vec{e}_1$, de même sens. On décompose $\vec{u}$:

$$\vec{u} = \left(\vec{u} \cdot \vec{i} \right) \vec{i} + \left(\vec{u} - \left(\vec{u} \cdot \vec{i} \right) \vec{i} \right)$$

Ce dernier vecteur $\vec{u} - \left(\vec{u} \cdot \vec{i} \right) \vec{i}$ est orthogonal à $\vec{i}$.

Pour un tel vecteur $\vec{v}$ orthogonal à $\vec{i}$: $\varphi(\vec{v}) = \cos \theta \vec{v} + \sin \theta \left(\vec{i} \wedge \vec{v} \right)$

Et donc :

$$\varphi(\vec{u}) = \left(\vec{u} \cdot \vec{i} \right) \vec{i} + \cos \theta \left(\vec{u} - \left(\vec{u} \cdot \vec{i} \right) \vec{i} \right) + \sin \theta \left(\vec{i} \wedge \left(\vec{u} - \left(\vec{u} \cdot \vec{i} \right) \vec{i} \right) \right)$$

Enfin, comme $\vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{0}$:

$$\varphi(\vec{u}) = (1 - \cos \theta) \left(\vec{i} \cdot \vec{u} \right) \vec{i} + \cos \theta \vec{u} + \sin \theta \left(\vec{i} \wedge \vec{u} \right)$$

6 Endomorphismes Symétriques et Applications

6-1 Endomorphismes symétriques

Définition : E un espace vectoriel euclidien, $\varphi \in \mathcal{L}(E)$,

$$\varphi \text{ est symétrique} \Leftrightarrow \forall u, v \in E, \langle \varphi(u), v \rangle = \langle u, \varphi(v) \rangle$$

Théorème : Un endomorphisme est symétrique $\Leftrightarrow$ sa matrice dans une base orthonormale est symétrique.

On ne sait rien de la matrice d'un endomorphisme symétrique dans une base quelconque.

Démonstration : φ symétrique a pour matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ dans $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ orthonormale. Les coordonnées de u et v sont les vecteurs colonnes U et V .

$$\langle \varphi(u), v \rangle = {}^t(AU) V = {}^tU {}^tAV = {}^tU AV = \langle u, \varphi(v) \rangle$$

D'où $a_{i,j} = \langle e_i, \varphi(e_j) \rangle$ et $a_{j,i} = \langle \varphi(e_i), e_j \rangle$ ce qui prouve que A est symétrique.

Réciproquement, si A est symétrique, ${}^tA = A$ et clairement $\langle \varphi(u), v \rangle = \langle u, \varphi(v) \rangle$.

Théorème : E un espace vectoriel euclidien, $\varphi \in \mathcal{L}(E)$, φ symétrique, alors φ est diagonalisable au besoin dans une base orthonormale de vecteurs propres.

Démonstration : On ne montre que le plus facile, le reste est admis. On montre que si u et v sont propres pour des valeurs propres distinctes, ils sont orthogonaux.

$$\langle \varphi(u), v \rangle = \langle \lambda.u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle = \langle u, \varphi(v) \rangle = \langle u, \mu.v \rangle = \mu \langle u, v \rangle$$

D'où : $(\lambda - \mu) \langle u, v \rangle = 0$.

Corollaire : A une matrice symétrique réelle, A est diagonalisable avec au besoin une matrice de passage orthogonale.

Ceci peut éviter bien des calculs puisque $P^{-1} = {}^tP$.

Il est donc souvent intéressant de chercher à diagonaliser une **matrice symétrique réelle** dans une base orthonormale de vecteurs propres quand on a besoin de P^{-1} .

6-2 Réduction d'une forme quadratique dans une base orthonormale

Une forme quadratique, ou une forme bilinéaire symétrique a une matrice symétrique réelle. Il existe donc une base orthonormale où la matrice de la forme est diagonale.

Si dans cette base u a pour coordonnées $U = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $q(u) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2$.

Théorème : Une matrice symétrique réelle est une matrice de produit scalaire $\Leftrightarrow$ toutes les valeurs propres sont strictement positives.

Démonstration : Cela revient à ce que la forme quadratique soit définie positive. Et pour cela, on utilise la remarque précédente. ■

6-3 Identification d'une conique

On va utiliser la réduction des formes quadratiques dans le cas où il y a des termes en xy dans l'équation. On part d'un polynôme non nul effectivement du second degré en x et y . (la forme quadratique n'est pas nulle).

a) Cas où il n'y a pas de termes en xy

- avaler, si possible, les termes en x et en y dans des carrés par la transformation habituelle :

$$\left(x^2 + ax = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4}\right).$$

Cela revient à faire une translation de l'origine du repère.

- se ramener ensuite à une des formes canoniques décrites.
 - ◇ On trouve des paraboles, hyperboles et ellipses (ou cercles)
 - ◇ mais aussi des coniques dégénérées : couple de droites, droite, point, vide.

b) Cas où il y a des termes en xy

- on repère la forme quadratique formée des termes du second degré $ax^2 + 2bxy + cy^2$
on considère sa matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ qu'on diagonalise dans une base orthonormale directe de vecteurs propres, avec P la matrice de passage et λ et μ les deux valeurs propres.
Cela revient à faire une rotation du repère.
- alors $ax^2 + 2bxy + cy^2 = \lambda X^2 + \mu Y^2$ avec $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ qui nous sert aussi à transformer le reste de l'équation de la conique.
- il n'y a donc plus de termes en xy dans ce repère. On est ramené au cas précédent.

Dans tous les cas, avec les notations précédentes où λ et μ sont les valeurs propres de la forme quadratique, on peut conclure sur le type de conique obtenu.

- $\lambda \mu > 0$ On a une ellipse, éventuellement dégénérée (un point, le vide).
- $\lambda \mu < 0$ On a une hyperbole, éventuellement dégénérée (deux droites sécantes).
- $\lambda \mu = 0$ On a une parabole, éventuellement dégénérée (deux droites parallèles, une droite).

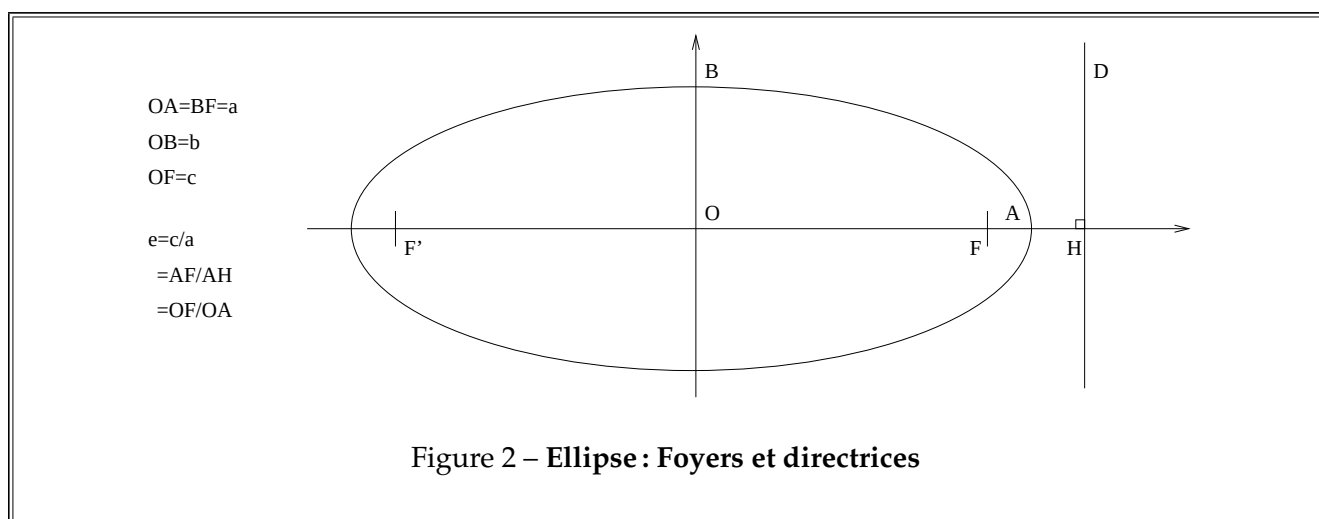
Ensuite, on opère la réduction habituelle du programme de première année ...

6-4 Petits rappels sur les coniques

a) Ellipse : équation réduite centrée $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

- a et b avec $a > b > 0$ sont les demi grand axe et demi petit axe. Les foyers sont alors sur Ox
- $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ est la distance du centre aux foyers
- $e = \frac{c}{a}$ est l'excentricité

La figure 2, ci-dessous, explicite les éléments géométriques de l'ellipse.



b) Parabole : équation réduite $y^2 = 2px$ avec $p > 0$ le paramètre

- O est le sommet et Ox l'axe de symétrie
- l'excentricité e vaut 1 et l'unique foyer F est à la distance $\frac{p}{2}$ du sommet sur l'axe de symétrie

c) Hyperbole : équation réduite centrée $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

- les foyers sont alors sur Ox
- $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ est la distance du centre aux foyers
- $e = \frac{c}{a}$ est l'excentricité
- les asymptotes sont d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 0$

La figure 3, page suivante, explicite les éléments géométriques de l'hyperbole.

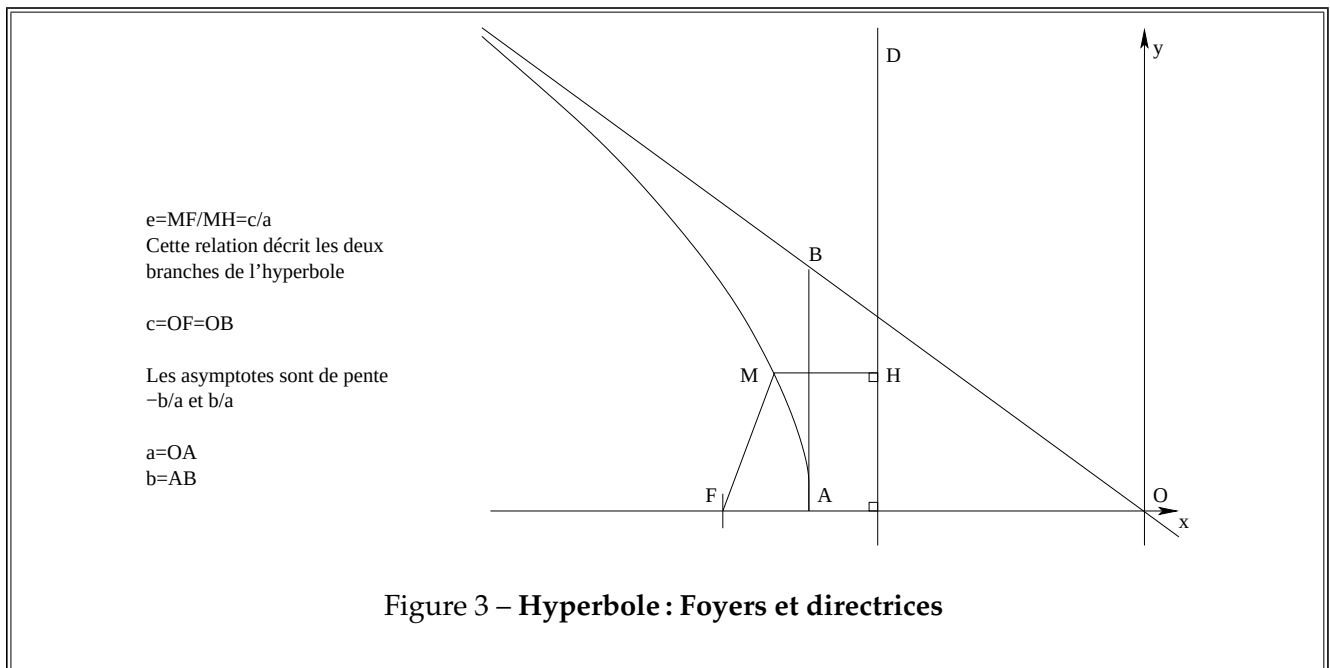
d) Exemples de réduction

Exemple : On va d'abord retrouver la nature de la conique d'équation $xy = 1$ dans le repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On réécrit cette équation $2xy = 2$.

La forme quadratique a alors pour matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ dont les valeurs propres sont 1 et -1.

Les vecteurs propres associés sont : $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.



$P = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est orthogonale directe, et représente une rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

Dans le nouveau repère, tourné de $\frac{\pi}{4}$, $2xy = X^2 - Y^2 = 2$. On a bien une hyperbole !

Exemple : On va identifier la conique d'équation $4x^2 + 4xy + y^2 - 2x + 4y = 0$ dans le repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

La forme quadratique a alors pour matrice : $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ dont les valeurs propres sont 0 et 5.

Les vecteurs propres associés sont : $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$P = \frac{\sqrt{5}}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ est orthogonale directe, et représente une rotation de centre O et d'angle $-\arccos \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Dans le nouveau repère, tourné de $-\arccos \frac{\sqrt{5}}{5}$, $4x^2 + 4xy + y^2 = 5Y^2$.

D'autre part, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{5}}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ donne facilement : $-2x + 4y = -2X\sqrt{5}$.

Finalement, l'équation dans le nouveau repère est $5Y^2 - 2X\sqrt{5} = 0$ qui est une parabole d'axe OX , de sommet O et de paramètre $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

7 Compléments

7-1 Avec Maple

Comme toujours en algèbre linéaire, il faut charger le package `linalg`

`> with(linalg);`

`> dotprod(U,V);` calcule le produit scalaire (usuel) de 2 vecteurs.

`> norm(U,2);` calcule la norme usuelle, dite aussi norme euclidienne ou norme quadratique, c'est à dire la racine carrée de la somme des carrés des coordonnées, d'où le « 2 ».

`> crossprod(U,V);` calcule le produit vectoriel de 2 vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

Enfin, Maple connaît le procédé de Schmidt (ou de Gram-Schmidt) qui, pour une liste de vecteurs renvoie une famille orthogonale qui engendre le même sous espace vectoriel. L'option « `normalized` » permet d'avoir si on le désire une famille orthonormale.

> `GramSchmidt([U,V,W]);`

> `GramSchmidt([U,V,W],normalized);` sont les 2 syntaxes usuelles.

7-2 Les mathématiciens du chapitre

Euclide ~330 av JC-~275 av JC Mathématicien grec auteur des éléments qui « refondent » la géométrie

Hilbert David 1862-1943 Ce mathématicien allemand refonde axiomatiquement la géométrie d'Euclide en ajoutant les axiomes « implicites »...

Schwarz Hermann 1843-1921 Mathématicien allemand est connu pour ses apports sur les dérivées partielles, les surfaces...

Sommaire

1 Espace Vectoriel Normé $\mathbb{R}^p$	1	3-4 Critère séquentiel	6
1-1 Norme et distance associée	1	3-5 Image d'un fermé-borné	7
1-2 Part. bornées, boules, ouverts et fermés	2	4 Applications de $A \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^q$, Continuité	7
2 Suite de points de $\mathbb{R}^p$	3	4-1 Espace vectoriel $\mathcal{A}(A, \mathbb{R}^q)$	7
2-1 Suite de points de $\mathbb{R}^p$	3	4-2 Limite en un point, continuité	7
2-2 Convergence	3	4-3 Applications « composantes »	7
2-3 Sous suite	4	4-4 Opérations sur les limites	8
2-4 Opérations sur les limites	4	5 Applications de $A \subset \mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$, Continuité	8
3 Applications de A non vide, $A \subset \mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$	4	5-1 Limite, continuité en un vecteur u_0 . .	8
3-1 Algèbre des applications définies sur A	4	5-2 Image d'une suite conv. de vecteurs .	8
3-2 Limite et continuité en un point . . .	5	5-3 Composée d'applications continues .	9
3-3 Algèbre des applications continues sur A	5	6 Compléments	9
		6-1 Avec Maple	9
		6-2 Les mathématiciens du chapitre	9

L'objet de ce chapitre est, en particulier, d'étudier les suites de points de $\mathbb{R}^p$ et la continuité des fonctions de plusieurs variables. Sauf mention contraire, dans tout le chapitre E désigne l'espace vectoriel $\mathbb{R}^p$.

1 Espace Vectoriel Normé $\mathbb{R}^p$

1-1 Norme et distance associée

En pratique, on n'utilisera que la norme euclidienne et sa distance associée.

Définition :

$$\left\{ \begin{array}{l} E \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ u \mapsto \|u\| \end{array} \right. \text{ est une } \mathbf{norme} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \forall u, v \in E, \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| \text{ (inégalité triangulaire)} \\ \forall u \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \|\lambda \cdot u\| = |\lambda| \|u\| \text{ (positive homogénéité)} \\ \|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0 \text{ (séparation)} \end{array} \right.$$

La norme d'un vecteur u est souvent notée $\|u\|$

Même si on parle souvent de la norme d'un vecteur, on verra qu'il y a une infinité de normes différentes...

Exemple :

- 1) $E = \mathbb{R}^2$, $\left\{ \begin{array}{l} \|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ est la norme usuelle, mais} \\ \|(x, y)\|_1 = |x| + |y| \text{ est aussi une norme, de même que} \\ \|(x, y)\|_\infty = \max(|x|, |y|) \end{array} \right.$
- 2) $\mathbb{R}^p$ a une structure euclidienne canonique, et si $u = (x_1, x_2, \dots, x_p)$,

$$\|u\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_p^2}$$

cette norme est appelée norme euclidienne. Sauf mention contraire, c'est elle qu'on utilise.

Définition : $d : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une **distance** $\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} d(u, v) = d(v, u) \text{ (symétrie)} \\ d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w) \text{ (inégalité triangulaire)} \\ d(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v \text{ (séparation)} \end{array} \right.$

Théorème : $d(u, v) = \|v - u\|$ est une distance.

Démonstration :

$u - v = -(v - u)$ prouve la symétrie.

$w - u = (w - v) + (v - u)$ prouve l'inégalité triangulaire.

La séparation de la norme prouve enfin la séparation de la distance associée. ■

Toute norme induit donc une distance, par contre, toute distance ne provient pas d'une norme. On peut citer par exemple la distance ultramétrique : $d(u, v) = 1$ pour $u \neq v$ et $d(u, u) = 0$.

Encore une fois, sauf mention contraire, on utilise la distance induite par la norme euclidienne.

Signalons que dans tout le reste du chapitre, on a souvent préféré la notion de norme, plus habituelle. Cependant, on peut remplacer dans les expressions en ε les normes par les distances correspondantes.

1-2 Boules, parties bornées, parties ouvertes ou fermées

Définition : Une **boule ouverte** de centre u_0 et de rayon r est :

$$B_O(u_0, r) = \{v \in \mathbb{R}^p, d(u_0, v) < r\}$$

Définition : Une **boule fermée** de centre u_0 et de rayon r est :

$$B_F(u_0, r) = \{v \in \mathbb{R}^p, d(u_0, v) \leq r\}$$

Définition : Une **partie bornée** de $\mathbb{R}^p$ est une partie de $\mathbb{R}^p$ incluse dans une certaine boule (ouverte ou fermée).

Définition : Une **partie ouverte** ou un **ouvert** de $\mathbb{R}^p$ est une partie A telle que

$$\forall u \in A, \exists r > 0, B_O(u, r) \subset A$$

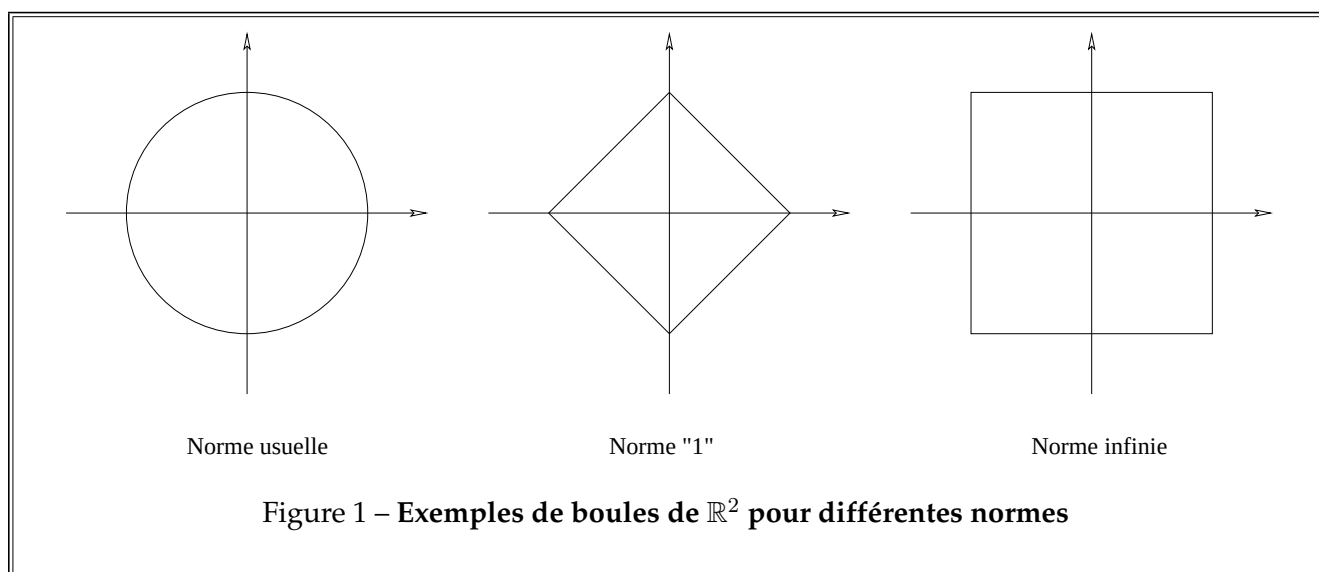
C'est à dire que tout point de A est le centre d'une boule ouverte, de rayon non nul, complètement incluse dans A .

Définition : Une **partie fermée** ou un **fermé** de $\mathbb{R}^p$ est une partie telle que son complémentaire A soit un ouvert.

Une boule ouverte est un ouvert, une boule fermée est un fermé.

$\mathbb{R}^p$ et $\emptyset$ sont ouverts et fermés.

La figure 1, ci-dessous, représente des boules du plan correspondant aux trois normes de $\mathbb{R}^2$ décrites dans l'exemple page précédente.



2 Suite de points de $\mathbb{R}^p$

Il s'agit de généraliser la notion de suite réelle.

On ne parlera pas de suites croissante, décroissante, monotone, majorée, minorée...

Mais, on parlera de suite convergente, bornée, de sous suite...

2-1 Suite de points de $\mathbb{R}^p$

Définition : Une suite de points de $\mathbb{R}^p$ est une application $u : \begin{cases} \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{R}^p \\ n & \mapsto & u(n) \end{cases}$

La suite u sera notée $(u(n))_{n \in \mathbb{N}}$ ou $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou encore (u_n) .

Définition : La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée $\Leftrightarrow \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ est une partie bornée de $\mathbb{R}^p$.

Cela équivaut à ce que la suite réelle $(\|u_n\|)$ est bornée.

Théorème : L'ensemble des suites à valeur dans $\mathbb{R}^p$, muni de la somme des suites et de la multiplication par un scalaire (réel) est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Démonstration : Il s'agit de la structure habituelle de $\mathcal{A}(\mathbb{N}, \mathbb{R}^p)$ ■

2-2 Convergence

Dans ce qui suit, on définira ou on utilisera, selon les cas, la notion de norme ou la notion de distance. Mais il faut bien se rendre compte que toute convergence qu'on exprime en utilisant des normes peut s'exprimer en termes de distances et vice-versa.

Définition : (u_n) est convergente $\Leftrightarrow \exists l \in \mathbb{R}^p, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \|u_n - l\| \leq \varepsilon$.

Définition : (u_n) est divergente $\Leftrightarrow (u_n)$ n'est pas convergente

On dit que (u_n) converge vers l , que $(u_n) \rightarrow l$ quand $n \rightarrow +\infty$, ou encore que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = l$.

Théorème : (u_n) converge : la limite l est unique.

Démonstration : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = l, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \|u_n - l\| \leq \varepsilon$

On a aussi : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = l', \forall \varepsilon > 0, \exists N' \in \mathbb{N}, \forall n \geq N', \|u_n - l'\| \leq \varepsilon$

par inégalité triangulaire, pour $n \geq \max(N, N')$, $\|l - l'\| \leq 2\varepsilon$

Ceci étant vrai pour tout ε , on en conclut $\|l - l'\| = 0$, et enfin $l = l'$. ■

Théorème : (u_n) converge vers 0 $\Leftrightarrow (\|u_n\|)$ converge vers 0.

Démonstration : $\|u_n - 0\| = \|u_n\|$ (!...) ■

Corollaire : (u_n) converge vers $l \Leftrightarrow (\|u_n - l\|)$ converge vers 0.

Théorème : $u_n = (u_{1,n}, u_{2,n}, \dots, u_{p,n})$, la suite (u_n) est formée de p suites « coordonnées ».

(u_n) converge $\Leftrightarrow$ les p suites coordonnées convergent et $l = (l_1, l_2, \dots, l_p)$.

(u_n) diverge $\Leftrightarrow$ il existe une suite coordonnée qui diverge.

Démonstration : (u_n) converge vers $l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \|u_n - l\| \leq \varepsilon$

mais $|u_{i,n} - l_i| \leq \|u_n - l\|$,

ce qui prouve que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{i,n}) = l_i$

Réciproquement,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N_1 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N_1, \quad |u_{1,n} - l_1| \leq \varepsilon,$$

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N_2 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N_2, \quad |u_{2,n} - l_2| \leq \varepsilon,$$

⋮

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N_p \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N_p, \quad |u_{p,n} - l_p| \leq \varepsilon,$$

On pose $N = \max_{i \in \{1,2,\dots,p\}} N_i$, et pour $n \geq N$, $\|u_n - l\| \leq \sqrt{p\varepsilon^2} = \sqrt{p}\varepsilon$

ce qui prouve que (u_n) converge vers l . ■

Théorème : Toute suite convergente est bornée.

Démonstration : Soit $\varepsilon = 1, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \|u_n - l\| \leq 1$, d'où

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in B_F(l, \max(\|u_0 - l\|, \|u_1 - l\|, \dots, \|u_{N-1} - l\|, 1))$$

■

2-3 Sous suite

Définition : (u_n) une suite de $\mathbb{R}^p, \varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante. Alors la suite (v_n) définie par $v_n = u_{\varphi(n)}$ est appelée **suite extraite** ou **sous suite** de la suite (u_n) .

C'est bien sûr une suite de $\mathbb{R}^p$.

Théorème : Si (u_n) converge vers l , toute sous suite $(u_{\varphi(n)})$ converge vers l .

Démonstration : Pour un ε donné, le même N convient pour la sous suite car $\varphi(n) \geq n$. ■

En pratique, pour montrer qu'une suite diverge, il suffit :

- de trouver une sous suite qui diverge ou
- de trouver 2 sous suites qui convergent vers des limites différentes.

2-4 Opérations sur les limites

Théorème : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = l$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n) = l'$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) = l + l'$.

Théorème : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = l, \lambda \in \mathbb{R}$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\lambda u_n) = \lambda l$.

3 Applications de A non vide, $A \subset \mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$

3-1 Algèbre des applications définies sur A non vide, $A \subset \mathbb{R}^p$ à valeur dans $\mathbb{R}$

Théorème : L'ensemble des applications $A \rightarrow \mathbb{R}$, avec A non vide, $A \subset \mathbb{R}^p$, muni de

- la somme des applications, notée $+$
- le produit d'une application par un scalaire, noté $\cdot$
- le produit de 2 applications, noté $\times$

a une **structure d'algèbre commutative** sur $\mathbb{R}$.

Démonstration : On en profite pour rappeler avec les notations du théorème la définition d'une algèbre, car toutes les démonstrations sont élémentaires..

$(\mathcal{A}(A, \mathbb{R}), +, \cdot)$ est un espace vectoriel usuel.

$(\mathcal{A}(A, \mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau commutatif, car

- c'est un groupe additif commutatif

- $\times$ est associative
- l'application constante 1 est élément neutre pour $\times$
- $\times$ est distributive par rapport à $+$
- $\times$ est commutative
- Enfin,

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall f, g \in \mathcal{A}(A, \mathbb{R}), \quad (\lambda \cdot f) \times g = \lambda \cdot (f \times g)$$

■

Définition : $f \in \mathcal{A}(A, \mathbb{R})$, on dit que f est bornée sur $A \Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}, \forall u \in A, |f(u)| \leq M$

3-2 Limite et continuité en un point

Soit $f \in \mathcal{A}(A, \mathbb{R}), A \subset \mathbb{R}^p$, non vide. Soit $u_0 \in \mathbb{R}^p$ tel que

$$\forall r > 0, \quad \exists u \in A, \quad u \neq u_0, \quad d(u, u_0) \leq r$$

On ne s'intéressera à la limite de f qu'en de tels points.

Intuitivement, on peut dire que ces points de A ne sont pas des points « isolés ».

Si, de plus, $u_0 \in A$, on pourra s'intéresser à la continuité en un tel point.

Définition : Dans les conditions précédentes, on dit que

$$\lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = l \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \varepsilon > 0, \exists r > 0, \forall u \in A, u \neq u_0, \\ d(u, u_0) \leq r: |f(u) - l| \leq \varepsilon \end{cases}$$

Définition : Dans ces mêmes conditions, on dit que f est continue en $u_0 \Leftrightarrow \lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = f(u_0)$.

3-3 Algèbre des applications continues sur A non vide, $A \subset \mathbb{R}^p$, à valeur dans $\mathbb{R}$

Définition : On dit que f est continue sur $A \Leftrightarrow f$ est continue en tout vecteur u_0 de A .

L'ensemble des applications continues de $A \subset \mathbb{R}^p$, non vide, dans $\mathbb{R}$, se note $\mathcal{C}^0(A, \mathbb{R})$.

Théorème : $\mathcal{C}^0(A, \mathbb{R})$ a une structure d'algèbre commutative, sous algèbre de $\mathcal{A}(A, \mathbb{R})$.

Démonstration : On en profite pour rappeler avec les notations du théorème, les conditions pour avoir une sous algèbre.

La fonction constante 1 est bien continue sur A et appartient à $\mathcal{C}^0(A, \mathbb{R})$.

Ensuite, si f et g sont continues sur A , et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $f + g$, $\lambda \cdot f$, et $f \times g$ sont continues sur A , car la propriété est vraie en chaque vecteur u_0 de A . La démonstration est la même que pour les fonctions de variable réelle en remplaçant certaines valeurs absolues par des normes. ■

Théorème : Si $f, g \in \mathcal{C}^0(A, \mathbb{R})$, alors $\frac{f}{g}$ est continue en tout vecteur u_0 de A tel que $g(u_0) \neq 0$.

Théorème : Les applications « composantes » : $f_i : (u_1, u_2, \dots, u_p) \rightarrow u_i$ sont continues sur $\mathbb{R}^p$.

3-4 Critère séquentiel

On utilise toujours les notations des paragraphes précédents. Le critère séquentiel est un critère reliant la limite d'une fonction en un point et des limites de suites.

Théorème : (critère séquentiel)

$$\lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = l \Leftrightarrow \begin{cases} \text{pour toute suite } (v_n) \text{ d'éléments de } A, \text{ distincts de } u_0, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = u_0 : \lim_{n \rightarrow +\infty} f(v_n) = l. \end{cases}$$

Démonstration :

1) ($\Rightarrow$)

Soit $\varepsilon > 0, \exists r > 0, \forall u \in A, u \neq u_0, d(u, u_0) \leq r : |f(u) - l| \leq \varepsilon$

mais $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = u_0$, d'où pour $r > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, d(v_n, u_0) \leq r$

ce qui donne : $|f(v_n) - l| \leq \varepsilon$

en résumé,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |f(v_n) - l| \leq \varepsilon$$

Ceci prouve bien que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(v_n) = l$.

2) ($\Leftarrow$)

On va en fait montrer la contraposée.

On sait

$$\forall l \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon > 0, \forall r > 0, \exists u \in A, u \neq u_0, d(u, u_0) \leq r \text{ et } |f(u) - l| > \varepsilon$$

Soit $l \in \mathbb{R}$, on forme une suite (v_n) qui converge vers u_0 et telle que $f(v_n)$ ne converge pas vers l .

Pour cela on prend simplement $r = \frac{1}{n+1}$ et on appelle v_n le u trouvé en appliquant ce qu'on sait.

Clairement, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = u_0$ et $f(v_n) \not\rightarrow l$ quand $n \rightarrow +\infty$ car on a toujours $|f(v_n) - l| > \varepsilon$.

■

Ce théorème sert souvent à montrer que f n'a pas de limite en u_0 , en cherchant astucieusement de « bonnes » suites (v_n) .

Corollaire : f continue en $u_0 \Leftrightarrow \begin{cases} \text{pour toute suite } (v_n) \text{ d'éléments de } A, \text{ distincts de } u_0, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = u_0 : \lim_{n \rightarrow +\infty} f(v_n) = f(u_0). \end{cases}$

Exemple : On cherche la limite en $(0,0)$ de $f : (x,y) \mapsto \frac{xy}{x^2 + y^2}$

Cette fonction est définie et continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ par application des théorèmes élémentaires.

$f(0,y) = 0$ et $f(x,x) = \frac{1}{2}$ prouve que f n'a pas de limite en $(0,0)$.

Exemple : On cherche la limite en $(0,0)$ de $f : (x,y) \mapsto \frac{x^2 - y}{x^2 + y}$

Cette fonction est définie et continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, -x^2), x \in \mathbb{R}\}$ par application des théorèmes élémentaires.

On calcule $f\left(\frac{1}{n}, -\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}\right) = \frac{\frac{2}{n^2} - \frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n^3}} = 2n - 1$ qui n'a pas de limite à l'infini, ce qui prouve que f n'a pas de limite en $(0,0)$.

3-5 Image d'une partie fermée bornée de A par $f \in \mathcal{C}^0(A, \mathbb{R})$

Théorème : $f \in \mathcal{C}^0(A, \mathbb{R})$, $B \subset A$, B une partie fermée et bornée, alors $f(B)$ est une partie bornée de $\mathbb{R}$ et les bornes sont atteintes.

La démonstration est admise.

4 Applications de A non vide, $A \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^q$, Continuité

Il s'agit ici de fonctions de variable réelle à valeur vectorielle. On considère $\mathcal{A}(A, \mathbb{R}^q)$ avec $A \subset \mathbb{R}$, A non vide, l'ensemble des applications de A dans $\mathbb{R}^q$.

4-1 Espace vectoriel $\mathcal{A}(A, \mathbb{R}^q)$

Théorème : L'ensemble des applications de $A \subset \mathbb{R}$, A non vide, dans $\mathbb{R}^q$, muni de la somme des applications et du produit par un scalaire (réel) a une structure d'espace vectoriel réel.

Démonstration : A est non vide et $\mathbb{R}^q$ est un espace vectoriel réel ! ■

Définition : $f \in \mathcal{A}(A, \mathbb{R}^q)$, on dit que f est bornée sur $A \Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in A, \|f(x)\| \leq M$

4-2 Limite en un point, continuité

Définition : $f \in \mathcal{A}(A, \mathbb{R}^q)$, on dit que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in A, x \neq x_0, \\ |x - x_0| \leq \eta: \|f(x) - l\| \leq \varepsilon \end{cases}$$

Définition : Si, de plus, $x_0 \in A$, f est continue en $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

4-3 Applications « composantes »

Pour $x \in A$, on a $f(x) \in \mathbb{R}^q$ et on peut donc écrire : $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_q(x))$ avec $f_i(x) \in \mathbb{R}$.

Définir $f \in \mathcal{A}(A, \mathbb{R}^q)$, revient ainsi à définir q applications $f_1, f_2, \dots, f_q$ de A dans $\mathbb{R}$, les applications composantes.

Théorème : $l = (l_1, l_2, \dots, l_q)$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) = l_1 \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x) = l_2 \\ \vdots \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f_q(x) = l_q \end{cases}$$

Corollaire : f est continue en $x_0 \in A \Leftrightarrow f_1, f_2, \dots, f_q$ sont continue en x_0 .

On retiendra l'idée que tout se passe composante par composante.

Démonstration : (:) Comme $|f_i(x) - l_i| \leq \|f(x) - l\|$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f_i(x) = l_i$.

($\Leftarrow$) On écrit chaque limite :

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \exists \eta_1 > 0, \forall x \in A, x \neq x_0, |x - x_0| \leq \eta_1: |f_1(x) - l_1| \leq \varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0, \exists \eta_2 > 0, \forall x \in A, x \neq x_0, |x - x_0| \leq \eta_2: |f_2(x) - l_2| \leq \varepsilon \\ \vdots \\ \forall \varepsilon > 0, \exists \eta_q > 0, \forall x \in A, x \neq x_0, |x - x_0| \leq \eta_q: |f_q(x) - l_q| \leq \varepsilon \end{aligned}$$

On prend $\eta = \inf (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_q)$, alors,

$$\forall x \in A, \quad x \neq x_0, \quad |x - x_0| \leq \eta: \|f(x) - l\| \leq \sqrt{q}\varepsilon$$

Ce qui termine la démonstration. ■

4-4 Opérations sur les limites

Théorème : Soit $f, g \in \mathcal{A}(A, \mathbb{R}^q)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l'$, alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f + g)(x) = l + l'$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (\lambda.f)(x) = \lambda l$$

Démonstration : Tout est élémentaire composante par composante. ■

Corollaire : $\mathcal{C}^0(A, \mathbb{R}^q)$, avec A non vide, est un espace vectoriel, sous espace vectoriel de $\mathcal{A}(A, \mathbb{R}^q)$.

5 Applications de A dans $\mathbb{R}^q$, A non vide, $A \subset \mathbb{R}^p$, Continuité

Pour la limite et la continuité, on se place en un vecteur u_0 qui n'est pas « isolé » dans A , c'est à dire qui vérifie les conditions imposées pour les fonctions de plusieurs variables et à valeur réelle.

On rappelle que cela signifie : $u_0 \in \mathbb{R}^p$ tel que : $\forall r > 0, \exists u \in A, u \neq u_0, d(u, u_0) \leq r$.

5-1 Limite, continuité en un vecteur u_0

Définition : $f \in \mathcal{A}(A, \mathbb{R}^q)$, on dit que

$$\lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = l \Leftrightarrow [\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0, \forall u \in A, u \neq u_0, \|u - u_0\| \leq r: \|f(u) - l\| \leq \varepsilon]$$

Définition : Si, de plus, $u_0 \in A$, f est continue en $u_0 \Leftrightarrow \lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = f(u_0)$.

En fait, on se retrouve avec q applications « composantes » de p variables réelles.

Théorème : $l = (l_1, l_2, \dots, l_q)$ et $f(u) = (f_1(u), f_2(u), \dots, f_q(u))$

$$\lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = l \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{u \rightarrow u_0} f_1(u) = l_1 \\ \lim_{u \rightarrow u_0} f_2(u) = l_2 \\ \vdots \\ \lim_{u \rightarrow u_0} f_q(u) = l_q \end{cases}$$

Corollaire : f est continue en $u_0 \in A \Leftrightarrow f_1, f_2, \dots, f_q$ sont continue en u_0 .

On retiendra encore l'idée que tout se passe composante par composante.

Démonstration : La démonstration est la même que la démonstration précédente en remplaçant, où il le faut, des valeurs absolues par des normes (ou des distances). ■

5-2 Image d'une suite convergente de vecteurs de A , de limite u_0 , par f continue en u_0

Théorème : Soit $f \in \mathcal{A}(A, \mathbb{R}^q)$, $A \subset \mathbb{R}^p$, A non vide. Soit $u_0 \in A$, f continue en u_0 .

Soit $(v_m)_{m \in \mathbb{N}}$ une suite de vecteurs de A telle que $\lim_{m \rightarrow +\infty} v_m = u_0$.

Alors $\lim_{m \rightarrow +\infty} f(v_m) = f(u_0)$.

Démonstration : Il suffit d'appliquer le critère séquentiel à chaque fonction composante f_i . ■

5-3 Composée d'applications continues

Théorème : Soit $f \in \mathcal{A}(A, \mathbb{R}^p)$, $A \subset \mathbb{R}^m$, A non vide.

Soit $u_0 \in A$, f continue en u_0 .

Soit $g \in \mathcal{A}(B, \mathbb{R}^q)$, $B \subset \mathbb{R}^p$, $f(A) \subset B$, g continue en $f(u_0)$.

On a ainsi : $\mathbb{R}^m \xrightarrow{f} \mathbb{R}^p \xrightarrow{g} \mathbb{R}^q$

Ce qui donne :

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ continue en } u_0 \\ g \text{ continue en } f(u_0) \end{array} \right\} : g \circ f \text{ est continue en } u_0.$$

Démonstration : On écrit les deux relations de continuité.

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists r > 0, \quad \forall u \in A, \quad \|u - u_0\| \leq r : \|f(u) - f(u_0)\| \leq \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon' > 0, \quad \exists r' > 0, \quad \forall v \in B, \quad \|v - f(u_0)\| \leq r' : \|g(v) - g(f(u_0))\| \leq \varepsilon'$$

On prend $\varepsilon' > 0$, d'où $r' > 0$, on prend $\varepsilon = r'$, d'où $r > 0$, et pour $u \in A$,

$$\|u - u_0\| \leq r : \|f(u) - f(u_0)\| \leq \varepsilon = r' : \|g(f(u)) - g(f(u_0))\| \leq \varepsilon'$$

et enfin

$$\forall \varepsilon' > 0, \quad \exists r > 0, \quad \forall u \in A, \quad \|u - u_0\| \leq r : \|g(f(u)) - g(f(u_0))\| \leq \varepsilon'.$$

■

On a maintenant les outils pour montrer facilement la continuité de la plupart des fonctions usuelles.

6 Compléments

6-1 Avec Maple

C'est « limit » qui permet d'obtenir les limites d'une expression. Il faut signaler la variable et le « point » considéré. Par exemple :

```
> limit(p, x=1);
> limit(p, x=1, right);
> limit(u, n=infinity);
```

On rappelle également la norme donnée dans le chapitre précédent.

```
> norm(U, 2);
```

 calcule la norme usuelle, dite aussi norme euclidienne ou norme quadratique, c'est à dire la racine carrée de la somme des carrés des coordonnées, d'où le « 2 ».

Dans nos exemples, on a donné $\| \cdot \|_1$ et $\| \cdot \|_\infty$ que Maple connaît également :

```
> norm(U, 1);
> norm(U, infinity);
```

6-2 Les mathématiciens du chapitre

Leibniz Gottfried 1646-1716 Allemand, philosophe et mathématicien « considérable » ! Ce fut aussi un grand pédagogue, on lui doit de nombreuses notations comme $\frac{dy}{dx}$ ou $\int$ Il est le premier à utiliser la notion de fonction...

Cauchy Augustin-Louis 1789-1857 Très grand mathématicien français qui donnera une définition rigoureuse de la continuité et de l'intégrale.

Fréchet Maurice 1878-1973 Sans doute, ce parisien est le précurseur d'une étude rigoureuse de la continuité (...) des fonctions de plusieurs variables.

Sommaire

1	Intégrale de f continue par morceaux	1	3	Intégrales dépendant d'un paramètre	6
1-1	Application continue par morceaux . .	1	3-1	Continuité	6
1-2	Intégrale de f continue par morceaux	1	3-2	Classe $\mathcal{C}^1$	6
1-3	Sommes de Riemann	2	3-3	Bornes dépendant d'un paramètre . .	6
1-4	Propriétés	2	4	Recherche de primitives	7
1-5	Inégalités	3	4-1	Fraction rationnelle en x (ou en t ...) . .	7
2	Dérivation et Intégration	4	4-2	Fractions rationnelles diverses	7
2-1	Intégration par parties	4	4-3	Polynôme $\times$ exponentielle	7
2-2	Changement de variables	4	4-4	Primitives usuelles	7
2-3	Inégalité des accroissements finis . . .	4	5	Compléments	7
2-4	Formules de Taylor	4	5-1	Avec Maple	7
2-5	Intégration et étude locale	5	5-2	Les mathématiciens du chapitre	9

1 Intégration d'une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$

1-1 Application continue par morceaux sur $[a, b]$

Définition : f définie sur $[a, b]$, à valeur dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

f est continue par morceaux sur $[a, b]$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{il existe } a_0, a_1, \dots, a_n \text{ tels que } a_0 = a < a_1 < \dots < a_n = b \text{ et tels que} \\ \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad f \text{ continue sur }]a_{i-1}, a_i[\\ \text{prolongeable par continuité sur } [a_{i-1}, a_i] \text{ avec } f_i = \widetilde{f|_{]a_{i-1}, a_i[}} \text{ la prolongée} \end{cases}$$

Définition :

On dit qu'une fonction est **intégrable** sur $[a, b] \Leftrightarrow$ cette fonction est continue par morceaux sur $[a, b]$

1-2 Intégrale d'une fonction continue par morceaux

Théorème : (de Darboux)

Toute application continue sur un intervalle admet une primitive de classe $\mathcal{C}^1$ sur cet intervalle.

Ce théorème est admis.

Définition : f continue sur $[a, b]$, à valeur dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). F une primitive de f ,

on appelle **intégrale de f sur $[a, b]$** : $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$

Il n'est pas nécessaire d'avoir $a < b$, et on a immédiatement : $\int_b^a f(t) dt = - \int_a^b f(t) dt$

Définition : f continue par morceaux sur $[a, b]$, à valeur dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). F_i une primitive de f_i sur $[a_{i-1}, a_i]$, on appelle **intégrale de f sur $[a, b]$** :

$$\int_a^b f(t) dt = \sum_{i=1}^n \int_{a_{i-1}}^{a_i} f_i(t) dt = \sum_{i=1}^n (F_i(a_i) - F_i(a_{i-1}))$$

1-3 Calcul approché d'intégrales et sommes de Riemann

On va faire un calcul approché de la valeur d'une intégrale de f sur $[a, b]$ en divisant l'intervalle $[a, b]$ en n parties égales. Les bornes de ces parties sont donc $a + k \frac{b-a}{n}$ pour $k \in \{0, 1, \dots, n\}$.

Sur chacun de ces intervalles de largeur $\frac{b-a}{n}$: $\left[a + (k-1) \frac{b-a}{n}, a + k \frac{b-a}{n} \right]$, définis pour $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, on approxime la fonction par la valeur à une de ses deux bornes. Ce qui donne :

Théorème : f continue sur $[a, b]$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f \left(a + (k-1) \frac{b-a}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f \left(a + k \frac{b-a}{n} \right) = \int_a^b f(t) dt$$

Si de plus f est monotone, une figure montre facilement que l'une des deux sommes est un majorant, l'autre un minorant de l'intégrale. Enfin, quand $[a, b] = [0, 1]$, on obtient des sommes particulières appelées sommes de Riemann :

Théorème : f continue sur $[0, 1]$, alors : $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f \left(\frac{k}{n} \right) = \int_0^1 f(t) dt$

Ces théorèmes sont aussi applicables si les fonctions sont continues par morceaux sur l'intervalle $[a, b]$

Exemple : Cherchons $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2}$

On écrit : $\sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \left(\frac{k}{n} \right)^2}$ et on reconnaît une somme de Riemann pour la fonction f définie par

$f(t) = \frac{1}{1+t^2}$ sur $[0, 1]$. On a bien une fonction continue sur $[0, 1]$.

La somme converge donc vers $\int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{4}$.

1-4 Propriétés

Théorème : (Linéarité) $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$, intégrables sur $[a, b]$, $\lambda \in \mathbb{K}$, alors

$$\int_a^b \lambda f(t) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt$$

$$\int_a^b (f + g)(t) dt = \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt$$

Théorème : (Conjugaison) $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, intégrable sur $[a, b]$, alors

$$\int_a^b \overline{f}(t) dt = \overline{\int_a^b f(t) dt}$$

Théorème : (Relation de Chasles) $f : [a, b] \cup [a, c] \cup [c, b] \rightarrow \mathbb{K}$, intégrable, alors

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$$

Démonstration : Ces théorèmes se montrent facilement en prenant F et G des primitives de f et g et en remarquant que $\overline{F}$ est une primitive de $\overline{f}$. ■

Exemple : Calculons $\int_0^1 \frac{dt}{t+i}$ qui est bien l'intégrale d'une fonction continue sur $[0, 1]$.

Attention, le logarithme n'est défini que sur $\mathbb{R}_+^*$, ceci nous oblige à séparer la partie réelle et la partie imaginaire.

$$\int_0^1 \frac{dt}{t+i} = \int_0^1 \frac{t-i}{t^2+1} dt = \int_0^1 \frac{t}{t^2+1} dt - i \int_0^1 \frac{1}{t^2+1} dt = \left[\frac{1}{2} \ln(t^2+1) \right]_0^1 - i [\arctan(t)]_0^1 = \frac{1}{2} \ln(2) - i \frac{\pi}{4}.$$

1-5 Inégalités

Théorème : (Croissance) $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, intégrable sur $[a, b]$, positive sur $[a, b]$, $a < b$, alors : $\int_a^b f(t) dt \geq 0$

Démonstration : Sur chaque $[a_{i-1}, a_i]$, F_i est croissante car de dérivée positive, d'où le résultat. ■

Théorème : (des 3 conditions) $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : \left\{ \begin{array}{l} f \text{ continue sur } [a, b], \\ \text{positive sur } [a, b], \\ \int_a^b f(t) dt = 0 \end{array} \right\} : \forall t \in [a, b], f(t) = 0$

Démonstration : F est croissante vérifiant $F(b) = F(a)$, donc F est constante, de dérivée f nulle sur l'intervalle. ■

Théorème : (Majoration en valeur absolue) $a < b$,

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, intégrable sur $[a, b]$, alors $|f|$ est intégrable sur $[a, b]$, et : $\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$

Démonstration : On définit $f_+(t) = \max(f(t), 0)$ et $f_-(t) = \max(-f(t), 0)$, deux fonctions positives, on a $f(t) = f_+(t) - f_-(t)$ et $|f(t)| = f_+(t) + f_-(t)$

$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b f_+(t) dt - \int_a^b f_-(t) dt$ et $\int_a^b |f(t)| dt = \int_a^b f_+(t) dt + \int_a^b f_-(t) dt$, ce qui assure le résultat car ces deux intégrales sont positives. ■

Théorème : (Majoration en module) $a < b$,

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, intégrable sur $[a, b]$, alors $|f|$ est intégrable sur $[a, b]$, et : $\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$

Démonstration : Admis. ■

Théorème : (Inégalité de la moyenne) $a < b$

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, intégrable sur $[a, b]$, alors : $\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq (b-a) \sup_{t \in [a, b]} |f(t)|$

Démonstration : $\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt \leq \int_a^b \sup_{t \in [a, b]} |f(t)| dt = (b-a) \sup_{t \in [a, b]} |f(t)|$ ■

Théorème : (Inégalité de Cauchy-Schwarz) $a < b$

$f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, intégrables sur $[a, b]$, alors : $\left| \int_a^b f(t) g(t) dt \right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(t) dt} \sqrt{\int_a^b g^2(t) dt}$

Démonstration : $\int_a^b (\lambda f(t) + g(t))^2 dt = \lambda^2 \int_a^b f^2(t) dt + 2\lambda \int_a^b f(t) g(t) dt + \int_a^b g^2(t) dt \geq 0$ pour tout λ , d'où $\frac{\Delta}{4} = \left(\int_a^b f(t) g(t) dt \right)^2 - \int_a^b f^2(t) dt \int_a^b g^2(t) dt \leq 0$ qui permet de conclure. ■

2 Dérivation et Intégration

2-1 Intégration par parties

Théorème : $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$, alors : $\int_a^b f(t)g'(t) dt = \left[f(t)g(t) \right]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t) dt$

Démonstration : $f \times g$ est une primitive de $f' \times g + f \times g'$ ■

Exemple : Calculons $\int_0^{\pi/2} t \sin t dt$ qui est bien l'intégrale d'une fonction continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

On va intégrer par parties en dérivant le t et en intégrant le $\sin t$

On obtient facilement : $\begin{cases} f(t) = t & g'(t) = \sin t \\ f'(t) = 1 & g(t) = -\cos t \end{cases}$

Ce qui donne : $\int_0^{\pi/2} t \sin t dt = [-t \cos t]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} -\cos t dt = 0 + [\sin t]_0^{\pi/2} = 1.$

2-2 Changement de variables

Théorème : f continue sur $[a, b]$, φ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\alpha, \beta]$, avec $\varphi([\alpha, \beta]) \subset [a, b]$, alors

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(u) du$$

Démonstration : Si F est une primitive de f , alors $F \circ \varphi$ est une primitive de $(f \circ \varphi) \times \varphi'$, d'où

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = F \circ \varphi(\beta) - F \circ \varphi(\alpha) = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(u) du$$

Exemple : Calculons $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + \cos t} dt$ qui est bien l'intégrale d'une fonction continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Comme on le verra dans la suite, on pose $u = \tan \frac{t}{2}$, ce qui donne $\cos t = \frac{1 - u^2}{1 + u^2}$ et $dt = \frac{2 du}{1 + u^2}$, on n'oublie pas de changer les bornes et on obtient $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + \cos t} dt = \int_0^1 \frac{1}{1 + \frac{1 - u^2}{1 + u^2}} \times \frac{2 du}{1 + u^2} = \int_0^1 du = 1.$

Les calculs ne s'arrangeront pas toujours aussi bien !

2-3 Inégalité des accroissements finis

Théorème : $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$, $a < b$ et k tel que $\sup_{t \in [a, b]} |f'(t)| \leq k$, alors :

$$|f(b) - f(a)| \leq k(b - a)$$

Démonstration : Appliquer l'inégalité de la moyenne à f' . ■

2-4 Formules de Taylor

Les formules de Taylor sont toujours de la forme :

$$f(x) = f(a) + (x - a)f'(a) + \frac{(x - a)^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{(x - a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + R_n(x)$$

Le problème est alors de déterminer une valeur de $R_n(x)$, un majorant de $|R_n(x)|$ ou un ordre de grandeur d'un tel majorant.

a) Formule de Taylor avec reste intégral

Théorème : Si f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur l'intervalle $[a, x]$

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t) dt$$

Démonstration : Pour $n = 0$, $\int_a^x f'(t) dt = f(x) - f(a)$ permet de conclure. On amorce donc une récurrence. On admet le résultat au rang n , une simple intégration par parties sur le reste donne :

$$\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t) dt = \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(t) \right]_a^x + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+2)}(t) dt$$

qui fournit immédiatement le résultat au rang $n + 1$. ■

b) Inégalité de Taylor-Lagrange

Théorème : Si f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur l'intervalle $[a, x]$

$$\left| f(x) - \left(f(a) + \sum_{k=1}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right) \right| \leq \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{t \in [a, x]} |f^{(n+1)}(t)|$$

Démonstration : On majore simplement l'intégrale dans la formule de Taylor avec reste intégral. Le mieux est d'étudier 2 cas selon que $x \geq a$ ou $x \leq a$. ■

c) Formule de Taylor-Young

Théorème : Si f est n fois dérivable au voisinage de a ,

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + o((x-a)^n)$$

avec $\lim_{x \rightarrow a} \frac{o((x-a)^n)}{(x-a)^n} = 0$

Démonstration : On le montre en supposant que f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ au voisinage de a . L'inégalité de Taylor-Lagrange donne, en appelant M un majorant de $|f^{(n+1)}(t)|$ sur un intervalle, voisinage de a ,

$$\left| f(x) - \left(f(a) + \sum_{k=1}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right) \right| \leq |x-a|^n \frac{|x-a| M}{(n+1)!}$$

Or $\lim_{x \rightarrow a} \frac{|x-a| M}{(n+1)!} = 0$ assure le résultat. ■

2-5 Intégration et étude locale

Théorème : $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$, intégrables sur I , $a \in I$, g de signe constant à gauche et à droite de a , alors

$$f(x) \underset{a}{=} o(g(x)) : \int_a^x f(t) dt = o \left(\int_a^x g(t) dt \right)$$

$$f(x) \underset{a}{\sim} g(x) : \int_a^x f(t) dt \underset{a}{\sim} \int_a^x g(t) dt$$

3 Intégrales dépendant d'un paramètre

Il y a d'abord 2 théorèmes quand la fonction dépend d'un paramètre. Ces 2 théorèmes vont être admis. Il s'agit d'étudier la continuité et la classe $\mathcal{C}^1$ de $F : x \mapsto \int_a^b f(x, t) dt$. On a ensuite un théorème élémentaire quand les bornes dépendent d'un paramètre. On a rapproché ces différents cas pour effectivement éviter les confusions.

3-1 Continuité

Théorème : (Continuité)

$f : \left\{ \begin{array}{ll} I \times [a, b] & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) & \mapsto f(x, t) \end{array} \right\}$ avec f continue sur $I \times [a, b]$, I un intervalle non vide et non réduit à un point.

alors F définie par $F(x) = \int_a^b f(x, t) dt$ est continue sur I

Exemple : Soit F définie par $F(x) = \int_0^1 \frac{dt}{t^2 + x^2}$ dont on va montrer qu'elle est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

$(x, t) \mapsto \frac{1}{t^2 + x^2}$ est bien continue sur $\mathbb{R}_+^* \times [0, 1]$ comme fonction de 2 variables, ce qui prouve immédiatement le résultat !

3-2 Classe $\mathcal{C}^1$

Théorème : (Classe $\mathcal{C}^1$)

$f : \left\{ \begin{array}{ll} I \times [a, b] & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) & \mapsto f(x, t) \end{array} \right\}$ avec f continue sur $I \times [a, b]$, I un intervalle non vide et non réduit à un point.

Si, de plus, f admet une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$, continue sur $I \times [a, b]$,

alors F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I , et $F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$

Exemple : On reprend l'exemple précédent avec F définie par $F(x) = \int_0^1 \frac{dt}{t^2 + x^2}$ dont on va montrer maintenant qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. On ne remonte pas la continuité déjà étudiée.

$(x, t) \mapsto \frac{1}{t^2 + x^2}$ admet une dérivée partielle par rapport à x qui est $\frac{-2x}{(t^2 + x^2)^2}$ continue sur $\mathbb{R}_+^* \times [0, 1]$ comme fonction de 2 variables, ce qui prouve immédiatement que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

De plus, toujours sur $\mathbb{R}_+^*$, $F'(x) = \int_0^1 \frac{-2x}{(t^2 + x^2)^2} dt$

3-3 Bornes dépendant d'un paramètre

Théorème : a, b de classe $\mathcal{C}^1$ sur I , avec $a(I) \subset J$ et $b(I) \subset J$, de plus f est continue sur J , alors

$F : x \mapsto \int_{a(x)}^{b(x)} f(t) dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I , et : $F'(x) = f(b(x))b'(x) - f(a(x))a'(x)$

Démonstration : On appelle g une primitive de f , $F(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(t) dt = g(b(x)) - g(a(x))$ ce qui prouve que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I , et $F'(x) = f(b(x))b'(x) - f(a(x))a'(x)$ par simple dérivation de fonctions composées.

■

4 Recherche de primitives

Les méthodes générales ne sont pas toujours les meilleures...

Regardons par exemple $\int \frac{8t^7}{t^8 + 1} dt$!... Si la technique de terminale fonctionne, il faut l'utiliser...

4-1 Fraction rationnelle en x (ou en t ...)

- On décompose la fraction rationnelle en éléments simples
- les termes en $\frac{1}{x-a}$, s'intègrent en $\ln|x-a|$
- les termes en $\frac{1}{(x-a)^p}$, s'intègrent en $\frac{1}{1-p} \times \frac{1}{(x-a)^{p-1}}$
- les termes en $\frac{ax+b}{x^2+px+q}$, avec $\Delta < 0$, s'intègrent en l'écrivant : $\frac{\frac{a}{2} \times (2x+p)}{x^2+px+q} + \frac{\left(b - \frac{a}{2}p\right)}{x^2+px+q}$.

On obtient :

- un $\ln(x^2+px+q)$ pour le terme : $\frac{\frac{a}{2} \times (2x+p)}{x^2+px+q}$ de la forme $\frac{u'}{u}$ et
- un arctan pour le terme : $\frac{\left(b - \frac{a}{2}p\right)}{x^2+px+q}$.

4-2 Fractions rationnelles diverses

Le but du changement de variable donné est à chaque fois d'obtenir une fraction rationnelle classique.

1) Fraction rationnelle en e^x , $\operatorname{ch}x$, $\operatorname{sh}x$

Poser $u = e^x$

2) Fraction rationnelle en x et $\sqrt{ax+b}$

Poser $u = \sqrt{ax+b}$

3) Fraction rationnelle en $\sin x$ et $\cos x$

- on regarde si l'élément différentiel $f(x) dx$ est invariant quand on change
 - x en $-x$, poser alors : $u = \cos x$
 - x en $\pi - x$, poser alors : $u = \sin x$
 - x en $\pi + x$, poser alors : $u = \tan x$
- en cas d'échec, poser $u = \tan \frac{x}{2}$, on a alors :

$$dx = \frac{2 du}{1+u^2} \quad \sin x = \frac{2u}{1+u^2} \quad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2} \quad \tan x = \frac{2u}{1-u^2}$$

4-3 Polynôme $\times$ exponentielle

Intégrer par parties ou chercher une primitive de la même forme avec un polynôme du même degré.

4-4 Primitives usuelles

On consultera le tableau 1, page suivante. Notons qu'une primitive n'a de sens que sur un intervalle.

5 Compléments

5-1 Avec Maple

- « convert » utilisé avec l'option « parfrac » donne la décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle. Il est parfois nécessaire de factoriser le dénominateur en utilisant un « solve ».

Tableau 1 – PRIMITIVES USUELLES

Primitives simples		
Fonction	Primitive	Remarques
x^a	$\frac{x^{a+1}}{a+1} + C$	Sauf pour $a = -1$, sur $\mathbb{R}$, ou $\mathbb{R}^*$, ou $\mathbb{R}_+^*$ selon le cas
$\frac{1}{x}$	$\ln x + C$	Sur un intervalle de $\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{x+a}$	$\ln x+a + C$	Sur un intervalle privé de $-a$
$\frac{1}{x^2+a^2}$	$\frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$	Sur un intervalle de $\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + C$	Sur un intervalle de $] -1, 1[$. Ou bien $-\arccos x + C'$
e^x	$e^x + C$	Sur un intervalle de $\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x + C$	Sur un intervalle de $\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x + C$	Sur un intervalle de $\mathbb{R}$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + C$	Sur un intervalle de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[+ k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$\tan x$	$-\ln \cos x + C$	Sur un intervalle de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[+ k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x + C$	Sur un intervalle de $\mathbb{R}$
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x + C$	Sur un intervalle de $\mathbb{R}$
Utilisation de fonctions composées		
Fonction	Primitive	Remarques
$u' u^n$	$\frac{1}{n+1} u^{n+1}$	Sur un intervalle où u est de classe C^1 , $n \neq -1$
$\frac{u'}{u}$	$\ln u $	Sur un intervalle où u est de classe C^1 , $u(x) \neq 0$
$\frac{u'}{u^n}$	$\frac{1}{1-n} \frac{1}{u^{n-1}}$	Sur un intervalle où u est de classe C^1 , $u(x) \neq 0$, $n \neq 1$
$\frac{u'}{a^2 + u^2}$	$\frac{1}{a} \arctan \frac{u}{a}$	Sur un intervalle où u est de classe C^1

- « **series** » donne la partie régulière d'un développement de Taylor ou d'un développement asymptotique d'une expression en un « point ». Il faut préciser « l'ordre » auquel on veut que Maple fasse les calculs. Attention, ce n'est pas toujours l'ordre de la formule de Taylor...
 > `series(p, x=1, 5);`
 > `series(u, n=infinity, 7);`
- « **int** » permet de calculer une primitive ou une intégrale. Maple ne met pas de constante dans les primitives, on fera attention surtout si on primitive une fonction plus d'une fois...
 > `int(p, x);` pour une primitive
 > `int(p, x=0..1);` pour une intégrale
 La forme inerte « **Int** » permet de manier des intégrales sans chercher à les calculer.
- Le package « **student** » possède « **intparts** » et « **changevar** » qui permettent de faire faire des intégrations par parties et des changements de variables.
 > `with(student);`
 > `intparts(Int((x**2)*sin(x), x), x**2);` il faut indiquer l'intégrale inerte que l'on traite et la partie que l'on dérive.
 > `changevar(cos(x)+1=u, Int((cos(x)+1)**3*sin(x), x), u);` il faut indiquer le changement de variable, l'intégrale inerte que l'on traite et le nom de la nouvelle variable.

5-2 Les mathématiciens du chapitre

Riemann Bernhard 1826-1866 C'est ce mathématicien allemand qui donne la notion de fonction intégrable au sens de ce chapitre. Il a aussi beaucoup travaillé sur les séries trigonométriques...

Darboux Gaston 1842-1917 Ce mathématicien né à Nîmes a relié définitivement l'intégrale de Riemann et la notion de primitive...

Sommaire

1 Nature d'une intégrale impropre	1	3-2 Condition suffisante d'intégrabilité . .	5
1-1 Locale intégrabilité	1	3-3 Semi convergence	5
1-2 Intégrale convergente	1	3-4 Un procédé utile	5
1-3 Exemples fondamentaux	2	3-5 Cas des fonctions de signe constant . .	6
1-4 Relation de Chasles	2	4 Intégration et Dérivation	6
1-5 Cas de problème aux deux bornes . .	3	4-1 Intégration par parties	6
1-6 Linéarité des intégrales convergentes .	3	4-2 Changement de variable	7
1-7 Limite finie en un point fini	3	5 Intégrales dépendant d'un paramètre	8
2 Intégrale des fonctions positives	3	5-1 Continuité	8
2-1 Critère de comparaison	4	5-2 Classe $\mathcal{C}^1$	8
2-2 Critère d'équivalence	4	5-3 Ensemble de définition	9
2-3 Théorème des 3 conditions	5	6 Compléments	10
3 Intégrales absolument convergentes	5	6-1 Avec Maple	10
3-1 Intégrale absolument convergente . .	5	6-2 Les mathématiciens du chapitre	10

Il s'agit de généraliser la notion d'intégrale aux cas où

- f est continue, en général non bornée, sur un intervalle borné du type $[a, b[$ ou $]a, b]$, ou bien
- f est continue sur un intervalle du type $[a, +\infty[$ ou $]-\infty, b]$.

Sauf indication particulière, on appellera I un intervalle de l'un des quatre types précédents. On écrira les théorèmes pour $I = [a, b[$ ou $I = [a, +\infty[$. Dans les autres cas, on adaptera les énoncés des théorèmes, ce qui est toujours facile.

1 Nature d'une intégrale impropre

1-1 Locale intégrabilité

Définition : On dit que f est localement intégrable sur $I \Leftrightarrow \forall \alpha, \beta$, tel que $[\alpha, \beta] \subset I$, f est intégrable sur $[\alpha, \beta]$.

En pratique, f est le plus souvent continue sur I ce qui implique le fait qu'elle est localement intégrable sur I . Ceci sera le début invariable de l'étude d'une intégrale généralisée.

1-2 Intégrale convergente

Définition : Soit f localement intégrable sur $[a, b[$.

On dit l'intégrale de f sur $[a, b[$ **converge** ou **existe** $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f(t) dt$ existe (au sens de limite finie).

On note cette limite $\int_a^b f(t) dt$, ce qui est **nouvelle** notation.

Notons que cette nouvelle notation est parfaitement compatible avec l'ancienne, il suffit de regarder ce qui se passe quand f est continue sur $[a, b]$.

Définition : Soit f localement intégrable sur $[a, +\infty[$.

On dit l'intégrale de f sur $[a, +\infty[$ **converge** ou **existe** $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t) dt$ existe (au sens de limite finie).

On note cette limite $\int_a^{+\infty} f(t) dt$, ce qui est **nouvelle** notation.

Définition : Quand une intégrale ne converge pas, on dit qu'elle **diverge**.

La nature d'une intégrale généralisée est le fait qu'elle converge ou qu'elle diverge.

Quand on a une intégrale, il nous faut maintenant déterminer, au départ, s'il s'agit d'une intégrale simple ou d'une intégrale généralisée.

- A une borne infinie, c'est toujours une intégrale généralisée.
- A une borne finie, il faut regarder au moins si la fonction est définie, ou pas.

Dans le cas où les théorèmes qui suivent se révèlent inapplicables ou difficiles à appliquer, on peut **toujours essayer** de travailler en primitive, sans bornes aux intégrales, et calculer au bout du compte les limites de ces primitives... Cela est même quelquefois indispensable, en particulier avec les intégrations par parties. Après tout, on ne fait alors que revenir à la définition qu'on vient de donner.

1-3 Exemples fondamentaux

Théorème : (Riemann)

$$\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt \text{ converge} \Leftrightarrow \alpha < 1$$

On a la même chose en un point a :

$$\int_a^b \frac{1}{|t-a|^\alpha} dt \text{ converge} \Leftrightarrow \alpha < 1$$

Théorème : (Riemann)

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt \text{ converge} \Leftrightarrow \alpha > 1$$

Théorème : $\int_0^1 \ln(t) dt$ converge.

Théorème : $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt$ converge $\Leftrightarrow \alpha > 0$.

Démonstration : On cherche pour chacune de ces fonctions une primitive, ce qui est facile. On cherche ensuite à quelle condition cette primitive a une limite finie à la borne considérée. ■

Enfin, on veillera donc à ne pas confondre :

- la convergence de la **fonction** au point considéré, et
- la convergence de son **intégrale**.

Les deux notions sont **indépendantes**... comme le prouve le tableau page ci-contre :

1-4 Relation de Chasles des intégrales convergentes

Théorème : f localement intégrable sur $[a, b[$ avec $c \in]a, b[$, alors $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_c^b f(t) dt$ sont de même nature et si elles convergent, on a : $\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$

Démonstration : Il suffit d'écrire la relation de Chasles pour les intégrales simples entre a et x et de passer à la limite quand $x \rightarrow b^-$ ■

On a bien sûr le même théorème sur tous les autres types d'intervalles.

TAB. 1 – Limite d'une fonction et convergence de son intégrale

Intégrale	Singularité	Limite de la fonction	Convergence de l'intégrale
$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$	$+\infty$	0	oui
$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} dt$	$+\infty$	0	non
$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt$	0	$+\infty$	oui
$\int_0^1 \frac{1}{t^2} dt$	0	$+\infty$	non

1-5 Cas de problème aux deux bornes

Il se peut que l'intégrale soit généralisée aux 2 bornes. Il faut traiter une borne à la fois. On coupe l'intégrale en 2 arbitrairement en un point c .

On dira que l'intégrale converge $\Leftrightarrow$ chacune des 2 intégrales converge.

Par exemple $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ converge $\Leftrightarrow \int_{-\infty}^0 f(t) dt$ et $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ convergent.

1-6 Linéarité des intégrales convergentes

Théorème : f, g dont les intégrales convergent sur I , $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, alors

$\lambda.f + \mu.g$ a une intégrale convergente sur I et : $\int_I (\lambda.f + \mu.g)(t) dt = \lambda \int_I f(t) dt + \mu \int_I g(t) dt$.

Démonstration : C'est un simple passage à la limite sur les primitives ■

1-7 Limite finie en un point fini (faux problème)

Théorème : f localement intégrable sur $[a, b[$, borné, telle que f est prolongeable par continuité en b , c'est à dire telle que f a une limite finie en b^- , alors : $\int_a^b f(t) dt$ converge.

Démonstration : f est prolongeable par continuité en b^- , on note $\tilde{f}$ la prolongée sur $[a, b]$,

pour $x \in]a, b[$, $\int_a^x f(t) dt = \int_a^x \tilde{f}(t) dt$ qui tend vers l'intégrale simple $\int_a^b \tilde{f}(t) dt$ par continuité de la primitive.

Ce qui prouve que $\int_a^b f(t) dt$ converge. ■

Exemple : $\int_0^1 \frac{\sin t}{t} dt$ converge.

2 Intégrale des fonctions positives

Ce sont bien sûr des fonctions à valeurs réelles.

2-1 Critère de comparaison

Théorème : $\forall t \in [a, b[, \quad 0 \leq f(t) \leq g(t)$

$$\int_a^b g(t) dt \text{ converge} : \int_a^b f(t) dt \text{ converge}$$

$$\int_a^b f(t) dt \text{ diverge} : \int_a^b g(t) dt \text{ diverge}$$

Théorème : $\forall t \in [a, +\infty[, \quad 0 \leq f(t) \leq g(t)$

$$\int_a^{+\infty} g(t) dt \text{ converge} : \int_a^{+\infty} f(t) dt \text{ converge}$$

$$\int_a^{+\infty} f(t) dt \text{ diverge} : \int_a^{+\infty} g(t) dt \text{ diverge}$$

Démonstration : A chaque fois, seule la première assertion est à montrer. Soit F et G les primitives de f et g qui s'annulent en a .

On a G qui est croissante majorée car l'intégrale de g converge.

D'autre part, en tout point t de I , $F(t) \leq G(t)$ et F est aussi croissante.

Ceci prouve que F est croissante majorée et donc converge. Enfin, l'intégrale de f converge sur I . ■

Exemple : On va déterminer la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{1+t^2} dt$.

La fonction $t \rightarrow \frac{\sin^2 t}{1+t^2}$ est continue, donc localement intégrable sur $[0, +\infty[$. On a un problème de convergence, ou une singularité, en $+\infty$.

Par ailleurs, elle est **positive** et on va montrer la convergence de l'intégrale en utilisant le critère de comparaison: $\forall t \in [0, +\infty[, \quad 0 \leq \frac{\sin^2 t}{1+t^2} \leq \frac{1}{1+t^2}$. Or $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt$ converge par existence d'une limite finie à la primitive $\arctan t$ en $+\infty$.

Ceci prouve que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{1+t^2} dt$ converge.

2-2 Critère d'équivalence

Théorème : $\left. \begin{array}{l} f(t) \underset{b^-}{\sim} g(t) \\ f(t) \text{ de signe constant au voisinage de } b^- \end{array} \right\} : \int_a^b f(t) dt \text{ et } \int_a^b g(t) dt \text{ sont de même nature.}$

Théorème : $\left. \begin{array}{l} f(t) \underset{+\infty}{\sim} g(t) \\ f(t) \text{ de signe constant au vois. de } +\infty \end{array} \right\} : \int_a^{+\infty} f(t) dt \text{ et } \int_a^{+\infty} g(t) dt \text{ sont de même nature.}$

Démonstration : Compte tenu de l'équivalence,

il existe a' tel que sur $[a', b[$ (ou sur $[a', +\infty[$), on a $\frac{1}{2}g(t) \leq f(t) \leq 2g(t)$.

Le caractère local de la convergence d'une intégrale, le critère de comparaison et la linéarité fournissent le résultat. ■

Exemple : On va déterminer la convergence de $\int_0^1 \frac{\sin \sqrt{t}}{t} dt$.

La fonction $t \rightarrow \frac{\sin \sqrt{t}}{t}$ est continue, donc localement intégrable sur $]0, 1]$. On a un problème de convergence, ou une singularité, en 0.

Par ailleurs, elle est **positive** et on va montrer la convergence de l'intégrale en utilisant le critère d'équivalence :

$\frac{\sin \sqrt{t}}{t} \underset{0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$. Or $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$ converge par existence d'une limite finie à la primitive $2\sqrt{t}$ en 0.

Ceci prouve que $\int_0^1 \frac{\sin \sqrt{t}}{t} dt$ converge.

2-3 Théorème des 3 conditions

Théorème :
$$\left. \begin{array}{l} \forall t \in [a, b[, \quad f(t) \geq 0 \\ f \text{ continue sur } [a, b[\\ \int_a^b f(t) dt = 0 \end{array} \right\} : \forall t \in [a, b[, \quad f(t) = 0$$

b peut être une borne finie ou $+\infty$, on a bien sûr le même théorème sur $]a, b]$, que a soit fini ou $-\infty$.

On utilise souvent ce théorème, par exemple quand on a un produit scalaire défini par une intégrale, pour montrer le caractère défini-positif de la forme quadratique.

3 Intégrales absolument convergentes

3-1 Intégrale absolument convergente

Définition : f localement intégrable sur I , à valeur dans $\mathbb{K}$, on dit que l'intégrale de f est absolument convergente $\Leftrightarrow$ l'intégrale de $|f|$ converge absolument.

Exemple : $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2} dt$ converge.

3-2 Condition suffisante d'intégrabilité

Théorème : f localement intégrable sur I , dont l'intégrale converge absolument sur I , alors

l'intégrale de f converge sur I et : $\left| \int_I f(t) dt \right| \leq \int_I |f(t)| dt$

Démonstration : On va le montrer pour une fonction qui est à priori à valeurs complexes.

- Comme $|\operatorname{Re} f| \leq |f|$ et $|\operatorname{Im} f| \leq |f|$, par linéarité, il suffit de le montrer pour les fonctions à valeurs réelles.
- Pour f à valeurs réelles, on note $f_+ = \max(f, 0)$ et $f_- = \max(-f, 0)$.
Ce sont deux fonctions positives, $0 \leq f_+ \leq |f|$ et $0 \leq f_- \leq |f|$, dont l'intégrale converge par majoration.
Et comme $f = f_+ - f_-$, on obtient par linéarité l'intégrale de f qui converge sur I .

■

3-3 Semi convergence

Définition : On dit que

l'intégrale de f est semi convergente sur $I \Leftrightarrow \begin{cases} \text{l'intégrale de } f \text{ sur } I \text{ converge, et} \\ \text{l'intégrale de } |f| \text{ sur } I \text{ diverge} \end{cases}$

Exemple : $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ est semi convergente.

3-4 Un procédé utile

- Si on a $\alpha < 1$ tel que $\lim_{t \rightarrow 0} t^\alpha f(t) = 0$, alors $|f(t)| = o\left(\frac{1}{t^\alpha}\right)$, et $\int_0^1 f(t) dt$ converge absolument donc converge.
- Si on a $\alpha > 1$ tel que $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha f(t) = 0$, alors $|f(t)| = o\left(\frac{1}{t^\alpha}\right)$, et $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ converge absolument donc converge.

Ceci n'est pas un théorème, il faut à chaque fois refaire la démonstration...

Il faut y observer qu'on travaille avec une fonction positive ou montrer la convergence absolue.

Exemple : On va déterminer la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2} dt$.

La fonction $t \rightarrow \frac{\ln t}{1+t^2}$ est continue, donc localement intégrable sur $]0, +\infty[$. On a un problème de convergence, ou une singularité, en 0 et en $+\infty$.

En 0, $\sqrt{t} \left| \frac{\ln t}{1+t^2} \right|$ tend vers 0, d'où $\left| \frac{\ln t}{1+t^2} \right| = o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ et ainsi, par comparaison, $\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2} dt$ converge absolument donc converge.

En $+\infty$, $t^{3/2} \left| \frac{\ln t}{1+t^2} \right|$ tend vers 0, d'où $\left| \frac{\ln t}{1+t^2} \right| = o\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)$ et ainsi, par comparaison, $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2} dt$ converge absolument donc converge.

Ceci prouve que $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2} dt$ converge.

3-5 Cas des fonctions de signe constant

Théorème : Si f est de signe constant sur $[a, b[$, alors : $\int_a^b f(t) dt$, $\int_a^b -f(t) dt$ et $\int_a^b |f(t)| dt$ sont de même nature.

La convergence de l'intégrale équivaut à sa convergence absolue.

Démonstration : f ou $-f$ est positive, l'une des deux est : $|f|$.

La linéarité des intégrales convergentes permet de conclure. ■

Quand on utilise ce théorème, on écrit **clairement** que dans le cas d'une fonction **de signe constant**, la convergence de son intégrale équivaut à sa convergence absolue.

4 Intégration et Dérivation

4-1 Intégration par parties

Théorème :

u et v de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b[$ } : $\int_a^b u(t)v'(t) dt$ et $\int_a^b u'(t)v(t) dt$ sont de même nature
 $\lim_{t \rightarrow b^-} u(t)v(t)$ existe et est finie

et si elles convergent : $\int_a^b u(t)v'(t) dt = \left[u(t)v(t) \right]_a^{b^-} - \int_a^b u'(t)v(t) dt$

Théorème :

u et v de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$ } : $\int_a^{+\infty} u(t)v'(t) dt$ et $\int_a^{+\infty} u'(t)v(t) dt$ sont de même nature
 $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)v(t)$ existe et est finie

et si elles convergent : $\int_a^{+\infty} u(t)v'(t) dt = \left[u(t)v(t) \right]_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} u'(t)v(t) dt$

Ces théorèmes sont à utiliser avec soin. La rédaction se fait **toujours** en deux temps

- une partie sur la nature des intégrales et
- en cas de convergence, l'égalité proprement dite.

Démonstration : On le montre dans le premier cas, la démonstration est la même dans les autres cas. On a

toujours : $\int_a^x u(t)v'(t) dt = \left[u(t)v(t) \right]_a^x - \int_a^x u'(t)v(t) dt$

Si $u(x)v(x)$ a une limite finie quand $x \rightarrow b^-$, les deux intégrales ont toutes les deux une limite finie ou toutes les deux pas de limite finie. Elles sont donc de même nature.

Dans le cas où elles convergent, en passant à la limite quand $x \rightarrow b^-$, on obtient l'égalité annoncée. ■

Exemple : $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ converge.

En effet $\frac{\sin t}{t}$ est continue sur $[1, +\infty[$, donc localement intégrable sur $[1, +\infty[$.

C'est une intégrale généralisée en $+\infty$.

Montrons sa convergence grâce au théorème d'intégration par parties.

On pose $u(t) = \frac{1}{t}$ et $v(t) = -\cos t$, on a : $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \times -\cos t = 0$ qui est une limite finie,

ce qui prouve que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt$ sont de même nature.

Or $\left| \frac{\cos t}{t^2} \right| \leq \frac{1}{t^2}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge par Riemann.

Donc, par Riemann, comparaison, convergence absolue et intégration par parties, $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ converge.

4-2 Changement de variable

Théorème : β étant une borne finie ou $+\infty$,

$\left. \begin{array}{l} f \text{ continue sur } I \\ \varphi \text{ monotone de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [\alpha, \beta[\\ \varphi([\alpha, \beta]) \subset I \end{array} \right\} : \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \text{ et } \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(u) du \text{ sont de même nature}$

et si elles convergent : $\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(u) du$

Ce théorème est à utiliser avec soin. La rédaction se fait **toujours** en deux temps

- une partie sur la nature des intégrales et
- en cas de convergence, l'égalité proprement dite.

Démonstration : On a toujours : $\int_{\alpha}^x f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(x)} f(u) du$

Ce sont deux fonctions continues de x et égales.

Elles ont donc toutes les deux une limite finie ou pas de limite finie quand $x \rightarrow \beta$.

Dans le cas où elles ont une limite finie, par passage à la limite, on a l'égalité annoncée. ■

Un changement de variable peut transformer une intégrale simple en intégrale généralisée et vice-versa. Dans ce cas, à **condition de le remarquer**, il n'y a pas de problème d'intégrabilité. Regardons par exemple

$\int_0^{\pi} \frac{1}{2 + \cos t} dt$ pour lequel $u = \tan \frac{t}{2}$ donne $\int_0^{+\infty} \dots du$.

Exemple : On va déterminer la convergence de $\int_0^{+\infty} \sin(e^t) dt$.

La fonction $t \rightarrow \sin(e^t)$ est continue, donc localement intégrable sur $[0, +\infty[$. On a un problème de convergence, ou une singularité, en $+\infty$.

On va montrer la convergence de cette intégrale au moyen d'un changement de variable : on pose $u = e^t$

qui est bien **monotone de classe $\mathcal{C}^1$** , $\sin(e^t) dt = \frac{\sin u}{u} du$ et ainsi $\int_0^{+\infty} \sin(e^t) dt$ est de même nature que

$\int_1^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du$.

Par ailleurs, on a montré que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du$ converge et donc $\int_0^{+\infty} \sin(e^t) dt$ converge.

5 Intégrales dépendant d'un paramètre

Il y a deux théorèmes où la fonction dépend d'un paramètre. Ces deux théorèmes vont être admis.

Il s'agit d'étudier la continuité et la classe $\mathcal{C}^1$ de : $F : x \mapsto \int_a^b f(x, t) dt$ ou de : $F : x \mapsto \int_a^{+\infty} f(x, t) dt$ selon que l'on intègre sur $[a, b[$ ou sur $[a, +\infty[$.

Dans tous les cas, J est l'intervalle de variation de x .

5-1 Continuité

Théorème : F définie par $F(x) = \int_a^b f(x, t) dt$

$$f : \begin{matrix} J \times [a, b[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x, t) & \mapsto & f(x, t) \end{matrix} \left. \vphantom{\begin{matrix} J \times [a, b[\\ (x, t) \end{matrix}} \right\} \text{ avec } f \text{ continue sur } J \times [a, b[,$$

Si il existe φ telle que $\left\{ \begin{matrix} \forall x \in J, \forall t \in [a, b[, |f(x, t)| \leq \varphi(t) \\ \int_a^b \varphi(t) dt \text{ converge} \end{matrix} \right\}$ alors F est définie et continue sur J .

Théorème : F définie par $F(x) = \int_a^{+\infty} f(x, t) dt$

$$f : \begin{matrix} J \times [a, +\infty[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x, t) & \mapsto & f(x, t) \end{matrix} \left. \vphantom{\begin{matrix} J \times [a, +\infty[\\ (x, t) \end{matrix}} \right\} \text{ avec } f \text{ continue sur } J \times [a, +\infty[,$$

Si il existe φ telle que : $\left\{ \begin{matrix} \forall x \in J, \forall t \in [a, +\infty[, |f(x, t)| \leq \varphi(t) \\ \int_a^{+\infty} \varphi(t) dt \text{ converge} \end{matrix} \right\}$ alors F est définie et continue sur J .

Il faut vérifier avec soin les hypothèses du théorème. Parfois, la fonction φ est « annoncée » dans les questions précédentes. La convergence de cette intégrale quand x est fixé s'obtient directement par convergence absolue et comparaison à la fonction φ . Le théorème, quand il s'applique, montre donc cette convergence...

Exemple : Soit F définie par $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + x^2}$ dont on va montrer qu'elle est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

$(x, t) \mapsto \frac{1}{t^2 + x^2}$ est bien continue sur $\mathbb{R}_+^* \times [0, +\infty[$ comme fonction de 2 variables.

On prend maintenant $a > 0$ et $x \in [a, +\infty[, \forall (x, t) \in [a, +\infty[\times [0, +\infty[, \left| \frac{1}{t^2 + x^2} \right| \leq \frac{1}{t^2 + a^2} = \varphi(t)$ (qui ne

dépend pas de x), et d'autre part $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2 + a^2} dt$ converge.

Ceci prouve que F est continue sur tous les intervalles $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.

Enfin, F est continue sur $]0, +\infty[$

5-2 Classe $\mathcal{C}^1$

Pour montrer que F est de Classe $\mathcal{C}^1$, on commence toujours par montrer que F est continue sur J .

Théorème : F définie par $F(x) = \int_a^b f(x, t) dt$

$$f : \begin{matrix} J \times [a, b[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x, t) & \mapsto & f(x, t) \end{matrix} \left. \vphantom{\begin{matrix} J \times [a, b[\\ (x, t) \end{matrix}} \right\} \text{ avec } f \text{ continue sur } J \times [a, b[,$$

Si il existe φ telle que, $\left\{ \begin{matrix} \forall x \in J, \forall t \in [a, b[, |f(x, t)| \leq \varphi(t) \\ \int_a^b \varphi(t) dt \text{ converge} \end{matrix} \right\}$ alors F est définie et continue sur J .

Si, de plus, f admet une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$, continue sur $J \times [a, b[$,

Et si il existe ψ telle que :
$$\left\{ \begin{array}{l} \forall x \in J, \forall t \in [a, b[, \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \psi(t) \\ \int_a^b \psi(t) dt \text{ converge} \end{array} \right\}$$

alors F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J et : $F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$.

Théorème : F définie par $F(x) = \int_a^{+\infty} f(x, t) dt$

$f : \begin{array}{l} J \times [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) \mapsto f(x, t) \end{array} \left\{ \right.$ avec f continue sur $J \times [a, +\infty[$,

Si il existe φ telle que,
$$\left\{ \begin{array}{l} \forall x \in J, \forall t \in [a, +\infty[, |f(x, t)| \leq \varphi(t) \\ \int_a^{+\infty} \varphi(t) dt \text{ converge} \end{array} \right\}$$
 alors F est définie et continue sur J .

Si, de plus, f admet une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$, continue sur $J \times [a, +\infty[$,

Et si il existe ψ telle que :
$$\left\{ \begin{array}{l} \forall x \in J, \forall t \in [a, +\infty[, \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \psi(t) \\ \int_a^{+\infty} \psi(t) dt \text{ converge} \end{array} \right\}$$

alors F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J et : $F'(x) = \int_a^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$.

Il est important que φ , et ψ , **ne dépendent pas de x** .

Ce sont des fonctions réelles positives dont les intégrales convergent.

Exemple : On reprend l'exemple précédent avec F définie par $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + x^2}$ dont on va montrer maintenant qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. On ne remontre pas la continuité déjà étudiée.

$(x, t) \rightarrow \frac{1}{t^2 + x^2}$ admet une dérivée partielle par rapport à x qui est $\frac{-2x}{(t^2 + x^2)^2}$ continue sur $\mathbb{R}_+^* \times [0, +\infty[$ comme fonction de 2 variables.

On prend maintenant $A > a > 0$ et $x \in [a, A]$, $\forall (x, t) \in [a, A] \times [0, +\infty[$, $\left| \frac{-2x}{(t^2 + x^2)^2} \right| \leq \frac{2A}{(t^2 + a^2)^2} = \psi(t)$ (qui

ne dépend pas de x), et d'autre part $\int_0^{+\infty} \frac{2A}{(t^2 + a^2)^2} dt$ converge.

Ceci prouve que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tous les intervalles $[a, A]$ avec $A > a > 0$,

et que $F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{-2x}{(t^2 + x^2)^2} dt$.

Enfin, F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et vérifie $F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{-2x}{(t^2 + x^2)^2} dt$.

5-3 Ensemble de définition

L'ensemble de définition d'une fonction F de la variable x est l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles on peut effectivement calculer $F(x)$.

Ainsi, si on a :

- $F : x \mapsto \int_a^b f(x, t) dt$ ou,
- $F : x \mapsto \int_a^{+\infty} f(x, t) dt$ ou encore,
- $F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$

L'ensemble de définition de F est l'ensemble des valeurs de x telles que :

- l'intégrale est simple, ou bien,
- l'intégrale est généralisée et convergente.

Exemple : On va chercher l'ensemble de définition de F définie par : $F(x) = \int_0^1 \ln(x^2 + t^2) dt$

Pour $x \neq 0$, l'intégrale est une intégrale simple.

Pour $x = 0$, on a une intégrale généralisée avec un problème de convergence en 0. En 0, l'intégrale $\int_0^1 \ln(t^2) dt$

converge car l'intégrale $\int_0^1 \ln(t) dt$ converge.

L'ensemble de définition de F est donc $\mathbb{R}$.

6 Compléments

6-1 Avec Maple

Les mots clefs sont les mêmes que pour les intégrales simples. « `infinity` » désigne au besoin $+\infty$.

Pour une intégrale généralisée, Maple calcule la valeur s'il peut le faire, indique parfois que l'intégrale diverge, mais répond aussi parfois « `undefined` » quand il n'arrive pas à conclure sur la convergence.

6-2 Les mathématiciens du chapitre

Euler Léonard 1707-1783 Entre autres, c'est Euler qui le premier étudiera des fonctions définies comme une intégrale généralisée à paramètre...

Sommaire

1 Convergence des Séries Numériques	1	3-4 Comparaison à une intégrale impropre	4
1-1 Nature d'une série numérique	1	3-5 Règle de Riemann	4
1-2 Séries géométriques	1	3-6 Règle de d'Alembert	5
1-3 Condition élémentaire de convergence	2	4 Séries Absolument Convergentes	6
1-4 Suite et série des différences	2	4-1 Convergence absolue	6
2 Opérations sur les Séries Convergentes	2	4-2 Conv. des séries absolument conv. . .	6
2-1 Somme de 2 séries	2	4-3 Une convergence absolue	6
2-2 Produit par un scalaire	3	5 Séries Numériques Réelles Alternées	6
3 Séries à termes positifs	3	5-1 Séries alternées	6
3-1 Séries à termes positifs	3	5-2 Critère spécial des séries alternées . .	6
3-2 Critère de comparaison	3	6 Compléments	8
3-3 Critère d'équivalence	3	6-1 Avec Maple	8
		6-2 Les mathématiciens du chapitre	8

L'objet de l'étude des séries numériques est de donner un sens à des sommes infinies de nombres réels ou complexes et, éventuellement, de les calculer.

1 Convergence des Séries Numériques

1-1 Nature d'une série numérique

Définition : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

On appelle **suite des sommes partielles** de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$, avec $s_n = \sum_{k=0}^n u_k$.

Définition :

On dit que la **série de terme général** u_n , **converge** $\Leftrightarrow$ la suite des sommes partielles $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Sinon, on dit qu'elle **diverge**.

Notation : La **série de terme général** u_n se note $\sum u_n$.

Définition : Dans le cas où la série de terme général u_n converge, la limite, notée s , de la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est appelée **somme** de la série et on note : $s = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$.

Le reste d'ordre n de la série est alors noté r_n et il vaut : $r_n = s - s_n$.

Définition : La **nature** d'une série est le fait qu'elle converge ou diverge.

Etudier une série est donc simplement étudier une suite, la suite des sommes partielles de (u_n) . Le but de ce chapitre est de développer des techniques particulières pour étudier des séries sans nécessairement étudier la suite des sommes partielles.

Dans certains cas, on reviendra à la définition en étudiant directement la convergence de la suite des sommes partielles.

La convergence d'une série ne dépend pas des premiers termes...

1-2 Exemple fondamental : les séries géométriques

Théorème : La série de terme général x^n converge $\Leftrightarrow |x| < 1$.

De plus, la somme est : $s = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$.

Démonstration : $\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$ pour $x \neq 1$.

$\frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$ n'a de limite finie que si $|x| < 1$, cette limite est alors $\frac{1}{1 - x}$.

D'autre part, pour $x = 1$, $\sum_{k=0}^n x^k = n + 1$ diverge. ■

La raison d'une suite géométrique est le coefficient par lequel il faut multiplier chaque terme pour obtenir le suivant.

La somme des termes d'une série géométrique convergente est donc : $\frac{\text{« le premier terme »}}{1 - \text{« la raison »}}$.

Ceci prolonge et généralise la somme des termes d'une suite géométrique qui est :

$$\frac{\text{« le premier terme »} - \text{« le premier terme manquant »}}{1 - \text{« la raison »}}$$

Quand la série converge, il n'y a pas de termes manquants... La formule est la même.

1-3 Condition nécessaire élémentaire de convergence

Théorème : $\sum u_n$ converge : $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

Démonstration : $\sum u_n$ converge : (s_n) converge vers s : (s_{n+1}) converge vers s
: $\lim_{n \rightarrow \infty} s_{n+1} - s_n = 0$: $\lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1} = 0$: $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$. ■

Si une série converge, son terme général tend vers 0.

Dans le cas où le terme général ne tend pas vers 0, on dit que la série **diverge grossièrement**.

1-4 Suite et série des différences

Théorème : La suite (v_n) converge $\Leftrightarrow$ la série $\sum (v_{n+1} - v_n)$ converge.

Démonstration : On considère $\sum (v_{n+1} - v_n)$, sa suite des sommes partielles est (s_n) avec

$$s_n = \sum_{k=0}^n (v_{k+1} - v_k) = v_{n+1} - v_0$$

Les suites (s_n) et (v_{n+1}) sont de même nature, il en est de même de (v_n) . ■

2 Opérations sur les Séries Convergentes

2-1 Somme de 2 séries

Théorème : $\sum u_n$ et $\sum u'_n$ convergent et ont pour somme s et s'

: $\sum (u_n + u'_n)$ converge et a pour somme $(s + s')$.

Démonstration : On applique simplement le théorème équivalent sur les suites, appliqué bien sûr aux suites des sommes partielles. ■

2-2 Produit par un scalaire

Théorème : $\sum u_n$ converge et est de somme $s, \lambda \in \mathbb{K} : \sum (\lambda u_n)$ converge et est de somme λs .

Démonstration : On applique encore le théorème équivalent sur les suites à la suite des sommes partielles. ■

Il y a bien sûr une notion sous-jacente d'espace vectoriel des séries convergentes.

3 Séries à termes positifs

3-1 Séries à termes positifs

Définition : On dit qu'une série $\sum u_n$ est une série à termes positifs $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$.

Définition : On dit qu'une série $\sum u_n$ est une série à termes positifs à partir d'un certain rang

$$\Leftrightarrow \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \geq 0$$

3-2 Critère de comparaison

Théorème : $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries positives à partir d'un certain rang N , telles que

$$\forall n \geq N, u_n \leq v_n$$

Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.

Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

Démonstration : Seule la première assertion est à montrer, l'autre est équivalente.

On le montre pour les séries positives ($N = 0$).

On pose $s_n = \sum_{k=0}^n u_k, s'_n = \sum_{k=0}^n v_k$ et $s' = \sum_{n=0}^{\infty} v_n$, on a $s_n \leq s'_n$.

Les suites (s_n) et (s'_n) sont croissantes et la deuxième converge. On a donc $s'_n \leq s'$. Ce qui prouve que (s_n) est croissante majorée et donc converge.

Pour le cas de séries positives à partir du rang N , on considère les sommes partielles $s_n = \sum_{k=N}^n u_k \dots$ ■

Exemple : Etudions la convergence de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n2^n}$.

C'est une série à termes positifs (ou plus simplement positive), on va pouvoir utiliser le critère de comparaison.

A l'infini, $\frac{\ln n}{n}$ tend vers 0 et donc $\left(\frac{\ln n}{n}\right)$ est une suite bornée par A . On a donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq \frac{\ln n}{n} \leq A$ ce qui

donne $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq \frac{\ln n}{n2^n} \leq \frac{A}{2^n}$ qui est le terme général d'une série géométrique de raison $\frac{1}{2}$, donc convergente.

Ceci prouve que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n2^n}$ converge.

3-3 Critère d'équivalence

Théorème : $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries positives à partir d'un certain rang N , telles que : $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$

alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Démonstration : A partir d'un certain rang N , on a $0 \leq \frac{1}{2}u_n \leq v_n \leq 2u_n$.

Si $\sum u_n$ converge, $\sum 2u_n$ converge et donc $\sum v_n$ converge.

Si $\sum v_n$ converge, $\sum \frac{1}{2} u_n$ converge et donc $\sum u_n$ converge. ■

On peut remarquer que le critère d'équivalence est, par linéarité, applicable à des séries de signe constant à partir d'un certain rang. En effet, la convergence de $\sum u_n$ équivaut à celle de $\sum -u_n$.

Par ailleurs, on veillera à appliquer le critère d'équivalence au **terme général** : u_n , et non à la série : $\sum u_n$.

Exemple : Etudions la convergence de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+2^n}$.

C'est une série à termes positifs (ou plus simplement positive), on va pouvoir utiliser le critère d'équivalence.

$\frac{1}{1+2^n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2^n}$ qui est le terme général d'une série géométrique de raison $\frac{1}{2}$, donc convergente.

Ceci prouve que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+2^n}$ converge.

3-4 Comparaison à une intégrale impropre

Théorème : Soit f une application **positive et décroissante** sur $[a, +\infty[$,

alors la série $\sum f(n)$ et $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ sont de même nature.

Et si elles convergent, $\int_{n+1}^{+\infty} f(t) dt \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k) \leq \int_n^{+\infty} f(t) dt$

Démonstration : Remarquons d'abord que, comme $\int_a^x f(t) dt$ est croissante,

$\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge $\Leftrightarrow$ la suite $\left(\int_a^p f(t) dt \right)$ converge.

On prendra pour la démonstration $a = 0$. Comme f décroît sur $[n, n+1]$,

$$\forall x \in [n, n+1], f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$$

et en intégrant, comme on peut le voir sur la figure 1, page ci-contre : $f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(t) dt \leq f(n)$.

d'où en sommant $\sum_{n=1}^p f(n) \leq \int_0^p f(t) dt \leq \sum_{n=0}^{p-1} f(n)$, ce qui assure le résultat. ■

Exemple : Etudions la convergence de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2}$.

f définie par $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$ est positive, décroissante sur $[0, +\infty[$ et $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt$ converge et est de même nature que la série étudiée.

Ceci prouve que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2}$ converge.

3-5 Règle de Riemann

Théorème : $\alpha \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ converge $\Leftrightarrow \alpha > 1$.

Ce sont les séries de Riemann.

Démonstration : On compare cette série avec $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ et le résultat est immédiat. ■

Ceci nous donne la règle de Riemann.

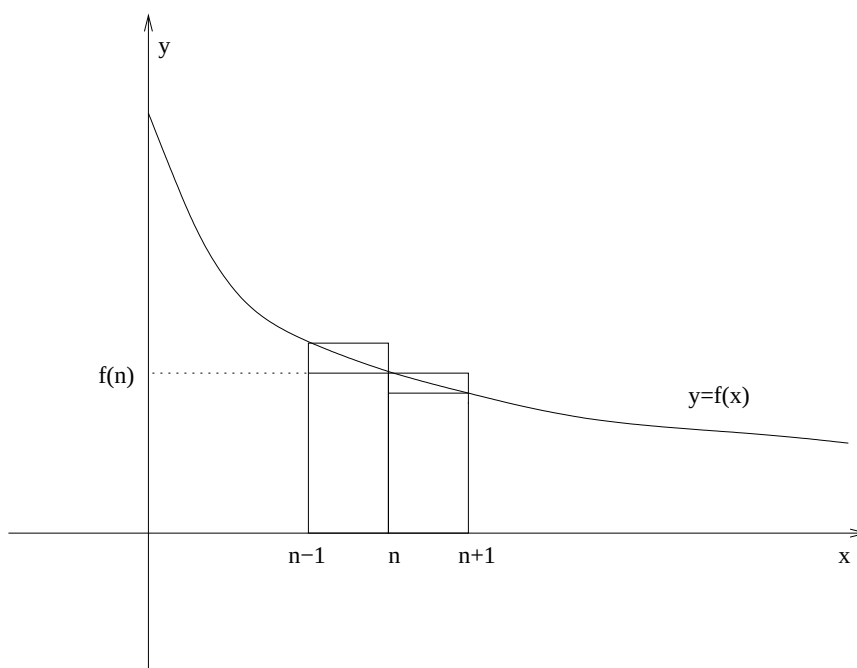


Figure 1 – Comparaison entre une série et une intégrale

Théorème : $\alpha \in \mathbb{R}, u_n \sim_{+\infty} \frac{k}{n^\alpha}$, alors : $\sum u_n$ converge $\Leftrightarrow \alpha > 1$.

Démonstration : Il suffit d'utiliser le critère d'équivalence et le théorème précédent. ■

3-6 Règle de d'Alembert

Théorème : $\sum u_n$ une série à termes positifs non nuls (à partir d'un certain rang) telle que : $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$

- si $l > 1$, $\sum u_n$ diverge grossièrement,
- si $l < 1$, $\sum u_n$ converge,
- et si $l = 1$, on ne peut pas conclure.

Ce théorème est séduisant a priori, mais on tombe très souvent sur le cas douteux. Il s'utilise souvent dans le cadre des séries entières qu'on étudiera dans quelques chapitres.

Avec les séries numériques, il s'utilise principalement quand on se trouve en présence de factorielles ou de termes de nature géométrique du type : a^n .

Démonstration : Pour $l > 1$, la suite positive (u_n) croît et ne tend donc pas vers 0. On a bien la divergence grossière.

Pour $l < 1$, à partir d'un certain rang N $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1+l}{2}$.

et donc par récurrence très facile, pour $n \geq N$, $u_n \leq \left(\frac{1+l}{2}\right)^{n-N} u_N = \left(\frac{1+l}{2}\right)^n \frac{u_N}{\left(\frac{1+l}{2}\right)^N}$.

Cette dernière série est géométrique, le théorème de comparaison entre séries positives fournit le résultat. ■

Exemple : Etudions la convergence de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}$.

C'est une série à termes **strictement** positifs, on va pouvoir utiliser le critère de d'Alembert.

$$\frac{(n+1)!}{\frac{n!}{n^n}} = \frac{(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \xrightarrow{+\infty} \frac{1}{e} < 1$$

Ceci prouve que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}$ converge.

4 Séries Absolument Convergentes

4-1 Convergence absolue d'une série numérique

Définition : Une série $\sum u_n$ est **absolument convergente** $\Leftrightarrow \sum |u_n|$ est convergente.
Une série convergente mais non absolument convergente est dite **semi-convergente**.

4-2 Convergence des séries absolument convergentes

Théorème : Toute série absolument convergente est convergente.

Démonstration : Comme $|\operatorname{Re} u_n| \leq |u_n|$ et $|\operatorname{Im} u_n| \leq |u_n|$, il suffit par linéarité de le montrer pour les séries à valeur réelle.

Pour celles-ci, on pose $u_n^+ = \max(u_n, 0)$ et $u_n^- = \max(-u_n, 0)$.

Les séries $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ sont positives et $u_n^+ \leq |u_n|$, $u_n^- \leq |u_n|$ prouvent par comparaison que ces séries convergent.

Comme $u_n = u_n^+ - u_n^-$, on a bien $\sum u_n$ converge. ■

Attention, ceci n'est pas une équivalence, on verra qu'il existe des séries semi-convergentes. L'exemple le plus classique est $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

4-3 Un moyen classique de montrer une convergence absolue de série

Ceci n'est pas un théorème mais un procédé usuel qu'il faut justifier à chaque fois.

Si il existe $\alpha > 1$ tel que $\lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha u_n = 0$, alors $|u_n| = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$, comme $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge, par comparaison, $\sum u_n$ converge absolument.

5 Séries Numériques Réelles Alternées

5-1 Séries alternées

Définition : La série $\sum u_n$ est **alternée** $\Leftrightarrow \sum (-1)^n u_n$ est une série de signe constant.
On parle aussi de série alternée à partir d'un certain rang.

Il s'agit donc de séries à valeur réelle.

Exemple : $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ est une série alternée, mais pas $\sum \cos n$.

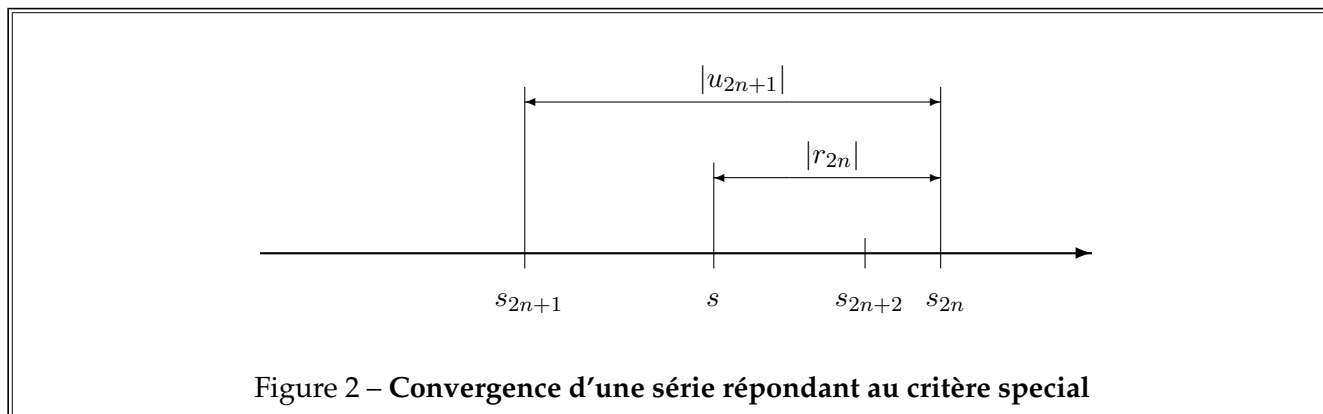
5-2 Critère spécial des séries alternées

Théorème : $\sum u_n$ une série alternée telle que la suite $(|u_n|)$ est décroissante tendant vers 0 à l'infini.

- Alors, $\sum u_n$ est convergente de somme s et $s \in [s_n, s_{n+1}]$ (ou $[s_{n+1}, s_n]$).
- De plus, avec $r_n = s - s_n$, on a $|r_n| \leq |u_{n+1}|$, et r_n est du signe de u_{n+1} .

On dit que la somme de la série est encadrée par 2 termes consécutifs et que le reste de la série est, en valeur absolue, majorée par son premier terme.

Ce théorème est illustré par la figure 2, ci-dessous.



Démonstration : On va faire la démonstration quand u_n est du signe de $(-1)^n$.

$$s_{2n+2} - s_{2n} = u_{2n+2} + u_{2n+1} = |u_{2n+2}| - |u_{2n+1}| \leq 0$$

d'où (s_{2n}) est décroissante.

$$s_{2n+3} - s_{2n+1} = u_{2n+3} + u_{2n+2} = -|u_{2n+3}| + |u_{2n+2}| \geq 0$$

d'où (s_{2n+1}) est croissante.

D'autre part, $s_{2n+1} \leq s_{2n} \leq s_0 = u_0$. (s_{2n+1}) est croissante majorée, donc convergente.

De même, $s_{2n} \geq s_{2n+1} \geq s_1$. (s_{2n}) est décroissante minorée, donc convergente.

Comme $s_{2n+1} - s_{2n} = u_{2n+1}$ tend vers 0, ces deux suites sont adjacentes et convergent vers la même limite s .

D'où, par monotonie $s_{2n+1} \leq s \leq s_{2n}$ et $s_{2n+1} \leq s \leq s_{2n+2}$. C'est à dire : $|r_n| \leq |u_{n+1}|$ que n soit pair ou impair.

■

Exemple : $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ est une série alternée clairement convergente par application du critère spécial des séries alternées.

Il faut bien vérifier qu'on applique **scrupuleusement** le critère spécial.

Le critère spécial des séries alternées **ne s'applique pas** à des équivalents.

On écrit parfois $u_n = v_n + w_n$ avec $\sum v_n$ alternée répondant au critère spécial des séries alternées et $\sum w_n$ absolument convergente.

Exemple : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} - (-1)^n}$ est une série alternée telle que $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} - (-1)^n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ avec $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ qui converge par application simple du critère spécial des séries alternées.

Cependant $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} - (-1)^n}$ diverge.

En effet,

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} - (-1)^n} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \times \frac{1}{1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right) = \underbrace{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}_{\text{t.g. série convergente}} + \underbrace{\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}_{\text{t.g. série divergente}}$$

terme général d'une série divergente

On a bien montré sur un exemple que le critère d'équivalence ne s'applique pas aux séries alternées...

6 Compléments

6-1 Avec Maple

C'est le mot-clef « sum » qui permet de calculer une somme de série.

> sum(1/(n**2),n=1..infinity); calcule $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ qui vaut $\frac{\pi^2}{6}$.

Maple connaît la somme de nombreuses séries connues. Mais, il lui arrive de ne pas savoir déterminer la nature d'une série...

6-2 Les mathématiciens du chapitre

Bernoulli Jacob 1654-1705 Mathématicien suisse de la grande famille des Bernoulli. On lui doit des travaux sur les courbes, les coordonnées polaires, le calcul intégral, les séries numériques... C'est lui qui a montré la convergence de $\sum \frac{1}{n^2}$...

Euler Léonard 1707-1783 L'apport de ce mathématicien suisse est plus que considérable. La définition précise de fonction, l'exponentielle complexe, les équations différentielles linéaires, les courbes paramétrées, les quadriques et, entre autres, de nombreux résultats sur les séries numériques...

Sommaire

1	Calcul Exact de Sommes de Séries	1	2	Calcul Approché	2
1-1	Sommation en dominos	1	2-1	Principe général	2
1-2	Avec des séries entières ou de Fourier	1	2-2	Avec le critère spécial	2
			2-3	Comparaison à une série géométrique	2
			2-4	Comparaison à une intégrale	3

L'objet de ce court chapitre est de voir quels sont les procédés de calcul de sommes exactes et approchées de séries numériques.

1 Calcul Exact de Sommes de Séries

Pour l'instant, on ne connaît que la somme exacte des séries géométriques.

1-1 Sommation en dominos

On travaillera exclusivement sur un exemple.

Soit la série : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

On montre facilement la convergence car $\frac{1}{n(n+1)} \sim_{+\infty} \frac{1}{n^2}$ qui est le terme général d'une série convergente par le critère de Riemann.

Pour le calcul de la somme, on revient en fait à la définition en calculant effectivement la somme partielle.

On a :

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$\text{d'où : } s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1} \rightarrow 1 \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$

En effet, on peut procéder en dominos :

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} \\ u_2 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \\ u_3 &= \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \\ &\dots = \dots \\ u_n &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

Et en sommant, les termes se simplifient en dominos, et on obtient : $s_n = \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1}$.

On aurait aussi pu réindexer la somme, on reprend le même calcul :

$$s_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

1-2 Utilisation de séries entières ou de séries de Fourier

On se reportera à ces chapitres que nous allons bientôt étudier pour calculer des sommes exactes de séries numériques.

2 Calcul Approché de Sommes de Séries

Il est quand même rare de savoir calculer facilement la somme exacte d'une série numérique. Ce qui fait l'importance du calcul approché de ces sommes.

2-1 Principe général

On nous donne une série convergente $s = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et un réel strictement positif ε .

On cherche un rang n tel que le reste d'ordre n , r_n vérifie $|r_n| \leq \varepsilon$.

Ensuite, on prendra s_n comme valeur approchée à ε près de s .

On va étudier les façons usuelles de chercher n selon la série.

Sauf dans le premier cas, en général, l'énoncé guide vers la méthode à utiliser...

2-2 Série alternée répondant au critère spécial

Condition : La convergence de la série peut se montrer en utilisant le critère spécial des séries alternées.

C'est le cas le plus simple puisqu'on a un théorème. Comme on sait que si $\sum u_n$ vérifie les conditions du critère spécial, $|r_n| \leq |u_{n+1}|$,

on cherche simplement n tel que $|u_{n+1}| \leq \varepsilon$ et on calcule s_n .

En plus, le théorème nous donne le signe de l'erreur qui est celui de u_{n+1} .

Exemple : $s = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ à 10^{-2} près. Il nous suffit $\frac{1}{n+1} \leq 10^{-2}$, c'est à dire $n \geq 99$.

$\sum_{n=1}^{99} \frac{(-1)^n}{n}$ est une valeur approchée à 10^{-2} près de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

Il suffit de calculer cette somme.

2-3 Série comparable à une série géométrique positive

Condition : La convergence absolue de la série peut se montrer en utilisant le critère de d'Alembert.

C'est souvent la méthode la plus rapide quand elle est applicable.

Solution : $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = l < 1$, d'où, à partir de N , $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \leq \lambda < 1$, et donc,

pour $n \geq N$, $|r_n| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |u_k| \leq |u_{n+1}| \frac{1}{1-\lambda} \leq \frac{\lambda^{n-N+1}}{1-\lambda} |u_N|$.

Ceci permet le bon rang en majorant cette quantité par ε . Ce rang sera bien sûr au moins égal à N .

Exemple : On cherche $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n + 1}$ à 10^{-3} près.

La convergence de cette série positive est facilement obtenue (par exemple) par équivalence avec une série géométrique.

On a $0 \leq u_k \leq \frac{1}{2^k}$ qui est le terme général d'une série convergente,

et donc : $0 \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n}$.

Il suffit donc de chercher n tel que $\frac{1}{2^n} \leq 10^{-3}$, c'est à dire $2^n \geq 10^3$ ou enfin $n \geq \frac{3 \ln 10}{\ln 2} \simeq 9,97$

Donc $n = 10$ convient, $\sum_{n=0}^{10} \frac{1}{2^n + 1}$ est une valeur approchée à 10^{-3} près de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n + 1}$.

Il suffit donc de calculer cette somme.

2-4 Série comparable à une intégrale de Riemann

Condition : La convergence absolue se montre en utilisant le critère de Riemann.

Solution : On a pour $n \geq N$, $|u_n| \leq \frac{K}{n^\alpha}$ avec $\alpha > 1$, et donc,

$$\text{pour } n \geq N, |r_n| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |u_k| \leq K \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}.$$

$$\text{Comme } \frac{1}{(n+1)^\alpha} \leq \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^\alpha}, \text{ on obtient : } |r_n| \leq K \int_n^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{K}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}.$$

Ceci permet le bon rang en majorant cette quantité par ε . Ce rang sera bien sûr au moins égal à N .

Exemple : On cherche $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$ à 10^{-3} près.

La convergence de cette série positive est facilement obtenue (par exemple) par comparaison avec une intégrale généralisée. En effet, f définie par $f(t) = \frac{1}{t^2+1}$ est positive, décroissante et d'intégrale convergente à l'infini.

$$\text{On a } 0 \leq u_k \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{t^2+1} dt \text{ et donc } 0 \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \int_{k-1}^k \frac{1}{t^2+1} dt = \int_n^{+\infty} \frac{1}{t^2+1} dt \leq \int_n^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt = \frac{1}{n}.$$

Il suffit donc de chercher n tel que $\frac{1}{n} \leq 10^{-2}$, c'est à dire $n \geq 100$.

Donc $n = 100$ convient, $\sum_{n=0}^{100} \frac{1}{n^2+1}$ est une valeur approchée à 10^{-2} près de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$.

Il suffit donc de calculer cette somme.

Sommaire

	3-3	Développements usuels	5
1 Séries Entières, Convergence	1	4 Développement en S.E., Sommation de S.E.	7
1-1 Série entière	1	4-1 Fonction développable en série entière	7
1-2 Rayon de convergence	1	4-2 Développement en série entière	8
1-3 Disque ouvert de convergence	2	4-3 Sommation de certaines séries entières	8
1-4 Recherche du rayon de convergence .	3		
2 Opérations sur les Séries Entières	4	5 Exponentielle complexe	9
2-1 Somme de 2 séries entières	4	5-1 Exponentielle complexe	9
2-2 Produit par un scalaire	4	5-2 Cohérence de cette définition	9
3 Somme d'une Série Entière	4	6 Compléments	9
3-1 Intervalle de convergence, continuité .	4	6-1 Avec Maple	9
3-2 Dérivation et intégration terme à terme	5	6-2 Les mathématiciens du chapitre	10

Une série de fonctions est une série du type : $\sum f_n(x)$.

Nous n'avons pas à notre programme d'étude générale des séries de fonctions. Nous avons cependant à étudier deux types de séries de fonctions que sont les séries entières et les séries de Fourier.

On peut dire de toutes façons, qu'à x fixé, il s'agit d'une série numérique. Ainsi, l'ensemble des x pour lesquels la série $\sum f_n(x)$ converge sera l'ensemble de définition de la somme.

Cette somme est donc une fonction de x . Se posent alors les problèmes usuels, cette fonction est-elle continue, dérivable?...

1 Séries Entières, Convergence

1-1 Série entière

Définition : Une **série entière** de la variable z est une série de la forme : $\sum a_n z^n$.
avec $z \in \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et $a_n \in \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Exemple : Un polynôme est un cas très particulier et sans intérêt de série entière.

Par contre, une série géométrique est le premier cas de série entière rencontré (sans le dire) dans le cadre des séries géométriques.

Pour une valeur de z fixée à z_0 par exemple, la série $\sum a_n z_0^n$ est une série numérique.

Pour les valeurs de z telles que la série converge, on définit donc, point par point, une fonction de la variable

$$z \text{ par : } f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

Un des objets de ce chapitre est d'étudier des propriétés de ces fonctions.

Quand la variable est réelle, on va plutôt la noter x que z .

Exemple : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + 1} z^n$ est donc une série entière où $a_n = \frac{1}{n^2 + 1}$.

Mais $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} z^{2n}$ est aussi une série entière où $a_n = \frac{1}{n!}$ si n est pair et $a_n = 0$ si n est impair...

1-2 Rayon de convergence

Théorème : Soit $\sum a_n z^n$ une série entière,

alors, il existe R un réel positif ou « $+\infty$ » tel que : $R = \sup \left\{ r, r \in \mathbb{R}_+, \sum |a_n| r^n \text{ converge} \right\}$.

R est appelé le **rayon de convergence** de $\sum a_n z^n$.

Démonstration : $I = \left\{ r, r \in \mathbb{R}_+, \sum |a_n| r^n \text{ converge} \right\}$ est un intervalle de $\mathbb{R}_+$ contenant 0, soit il est borné et admet alors une borne supérieure, soit il n'est pas borné et $R = +\infty$. ■

Exemple : Cherchons le rayon de convergence de $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$

Soit $r \geq 0$, on sait que $\sum r^n$ ne converge que si $r < 1$ et $\sup [0,1[= 1$. On a donc $R = 1$.

On reviendra rapidement sur les moyens de calcul pratique de ce rayon de convergence. Signalons qu'il s'agit d'une notion fondamentale dans l'étude des séries entières.

1-3 Disque ouvert de convergence

Définition : Soit $\sum a_n z^n$ une série entière, R son rayon de convergence.

La boule ouverte de centre O et de rayon R , ou le plan complexe si $R = +\infty$, est appelée **disque ouvert de convergence** ou **intervalle ouvert de convergence** selon que la variable est complexe ou réelle.

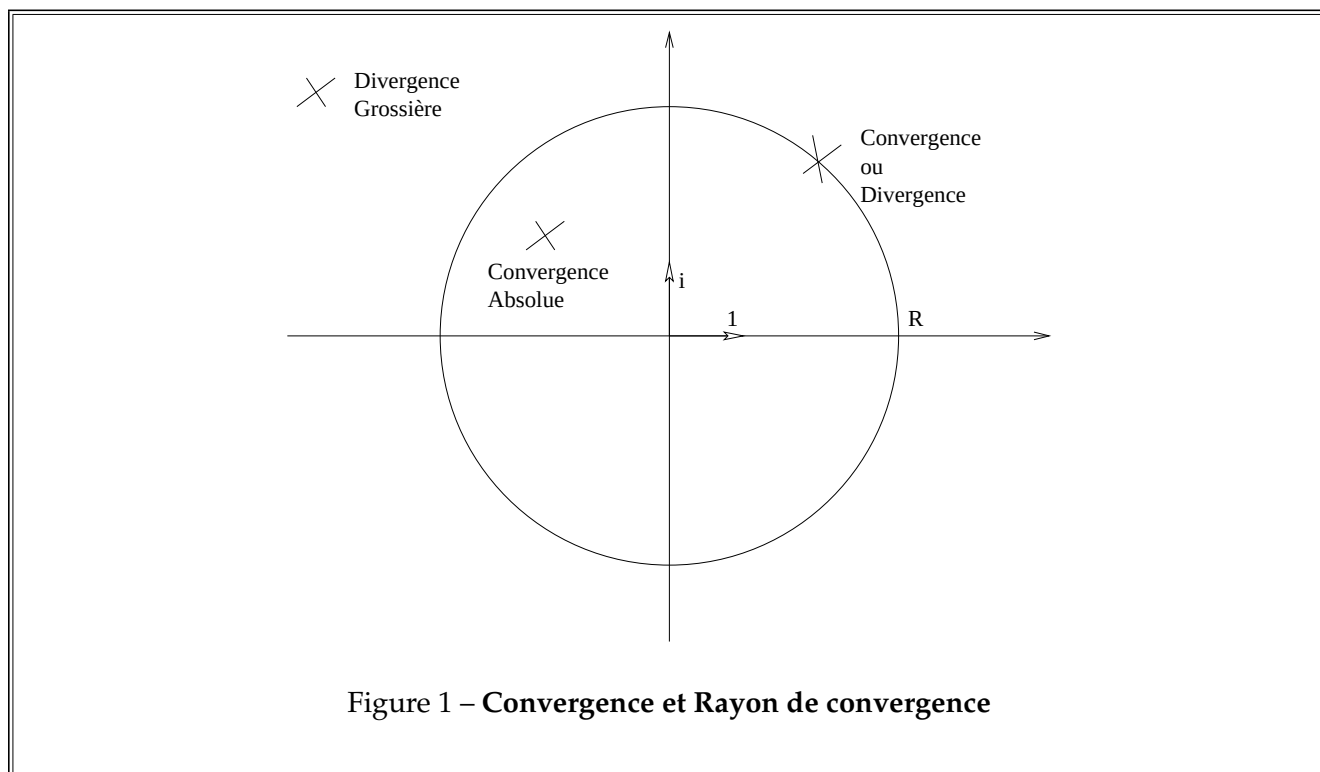
Ce disque est vide si $R = 0$.

Cette notion de disque ouvert de convergence se justifie par le théorème suivant :

Théorème : Soit $\sum a_n z^n$ une série entière, R son rayon de convergence,

- si $|z_0| < R$ alors $\sum a_n z_0^n$ converge absolument,
- si $|z_0| > R$ alors $\sum a_n z_0^n$ diverge grossièrement, et
- si $|z_0| = R$, on ne sait rien à priori sur la convergence de la série. Tout peut se produire.

La figure 1, ci-dessous, illustre le théorème.



Démonstration : La première proposition découle directement de la définition du rayon de convergence, $|z_0| < R$: $|z_0| \in I$, I étant l'intervalle utilisé dans la démonstration de l'existence du rayon de convergence.

Pour la deuxième proposition, on a $|z_0| > R$, supposons que la suite $(a_n z_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit bornée.

Alors il existe A tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, |a_n| |z_0^n| \leq A$.

Mais pour z tel que $|z| < |z_0|$, $|a_n| |z^n| = |a_n| |z_0^n| \left| \frac{z}{z_0} \right|^n \leq A \left| \frac{z}{z_0} \right|^n$ qui est le terme général d'une série géométrique convergente.

Ce qui prouve que $R \geq |z|$ pour $|z| < |z_0|$, c'est à dire $R \geq |z_0|$, ce qui est contraire à l'hypothèse. La suite $(a_n z_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est donc pas bornée, la série diverge (très) grossièrement. ■

1-4 Recherche pratique du rayon de convergence

On peut toujours travailler en module pour rechercher le rayon de convergence.

Une inégalité obtenue sur le rayon de convergence est toujours une inégalité large.

On applique quand on peut le théorème de d'Alembert sur la convergence des séries numériques.

Cependant on n'oubliera pas que ça n'est pas la seule méthode...

- Par le théorème de d'Alembert.

On considère $\sum |a_n| |z^n|$ comme une série numérique en ne considérant pas les termes nuls, z étant fixé non nul.

- Si le théorème de d'Alembert est applicable directement, R est le $|z|$ tel qu'on soit dans le cas douteux, c'est à dire tel que la limite est 1.
- Si la limite est toujours nulle, $R = +\infty$.
- Si pour un $|z|$ donné, la limite est inférieure ou égale à 1, $R \geq |z|$
- Si pour un $|z|$ donné, la limite est supérieure ou égale à 1, $R \leq |z|$

- Dans le cas où le théorème de d'Alembert ne fournit pas le résultat, on obtient des inégalités en utilisant le paragraphe précédent.

Si on a un z_0 tel que $\sum a_n z_0^n$ converge, alors $R \geq |z_0|$, tandis que,

si on a un z_0 tel que $\sum a_n z_0^n$ diverge, alors $R \leq |z_0|$.

- Si on a un z_0 tel que $\sum a_n z_0^n$ est **semi-convergente**, alors $R = |z_0|$.

En effet, comme on n'a ni convergence absolue, ni divergence grossière, le rayon de convergence ne peut être ni plus grand ni plus petit que $|z_0|$.

- Si on n'a pas pu conclure en utilisant ce qui précède, on applique l'un des théorèmes suivants :

Théorème : $R = \sup \left\{ r, r \in \mathbb{R}_+, \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| r^n = 0 \right\}$

Théorème : $R = \sup \{ r, r \in \mathbb{R}_+, \text{la suite } (a_n r^n) \text{ est bornée} \}$

L'intérêt de ces théorèmes est qu'il suffit d'étudier la **suite** $(|a_n| r^n)$ pour déterminer le rayon de convergence. Il est donc inutile d'étudier la **série**, ce qui est plus complexe. Le premier résulte immédiatement de la convergence d'une série entière, on montre le second :

Démonstration : On a $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| r^n = 0$: $(|a_n| r^n)$ est bornée d'où $R \geq r$, ce qui entraîne

$$R \geq \sup \left\{ r, r \in \mathbb{R}_+, \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| r^n = 0 \right\}$$

Si $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| r^n \neq 0$, la série diverge et donc $r \geq R$. Ce qui achève la démonstration. ■

Exemple : Cherchons le rayon de convergence de $\sum_{n=0}^{+\infty} n 2^n z^{2n}$.

$$\frac{(n+1) 2^{n+1} |z|^{2n+2}}{n 2^n |z|^{2n}} = \frac{n+1}{n} \times 2 |z|^2 \rightarrow 2 |z|^2 \text{ quand } n \rightarrow \infty, \text{ d'où } 2R^2 = 1 \text{ qui donne } R = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Exemple : Cherchons le rayon de convergence de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n} x^n$.

- Si $0 \leq r < 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n} r^n = 0$, d'où $R \geq 1$ car il est supérieur ou égal à tous les r qui sont plus petits que 1.
- Si $r > 1$, $\frac{\sin n}{n} r^n$ n'a pas de limite quand $n \rightarrow \infty$, car $\frac{r^n}{n} \rightarrow +\infty$ et $\sin n$ n'a pas de limite.
Donc, $\frac{\sin n}{n} r^n \nrightarrow 0$ et $R \leq 1$ car il est inférieur ou égal à tous les r qui sont plus grands que 1.
- Et donc $r = 1$.

2 Opérations sur les Séries Entières

2-1 Somme de 2 séries entières

Théorème : $\left. \begin{array}{l} \sum a_n z^n \text{ de rayon } R_a \\ \sum b_n z^n \text{ de rayon } R_b \end{array} \right\} : \sum (a_n + b_n) z^n \text{ est de rayon } \begin{cases} \inf(R_a, R_b) \text{ pour } R_a \neq R_b \\ R \geq R_a \text{ pour } R_a = R_b \end{cases}$

Démonstration : Si $R_a = R_b$, on n'a rien à montrer puisque la somme de 2 séries convergentes est convergente. Si $R_a \neq R_b$, par exemple $R_a < R_b$.

Pour r tel que $R_a < r < R_b$, $\left. \begin{array}{l} \sum a_n r^n \text{ diverge} \\ \sum b_n r^n \text{ converge} \end{array} \right\} : \sum (a_n + b_n) r^n \text{ diverge, et } R \leq R_a$.

Par ailleurs, $R \geq R_a$ par somme de séries convergentes. On a donc bien $R = R_a$. ■

2-2 Produit par un scalaire

Théorème : Si $\sum a_n z^n$ est une série entière de rayon de convergence R , et $\lambda \neq 0$, alors $\sum \lambda a_n z^n$ est une série entière de rayon de convergence $R' = R$.

Démonstration : C'est tout à fait simple ! On prend un $r < R$, alors $\sum \lambda a_n r^n$ converge et donc : $R' \geq R$. On prend ensuite $r > R$, alors $\sum \lambda a_n r^n$ diverge et donc : $R' \leq R$. ■

3 Somme d'une Série Entière de variable réelle

On notera cette série entière : $\sum a_n x^n$.

3-1 Intervalle de convergence, continuité

On a un théorème de continuité très simple qu'on va admettre.

Théorème :

$\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R . On définit la fonction f par : $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

- Si $R = +\infty$, $D_f = \mathbb{R}$.
- Si R est fini, $D_f = \begin{cases}]-R, R[\\ \text{ou }]-R, R] \\ \text{ou } [-R, R[\\ \text{ou } [-R, R] \end{cases}$

De plus, dans tous les cas, f est **continue** sur D_f .

3-2 Dérivation et intégration terme à terme

Les théorèmes ont encore des énoncés très simples et on va encore les admettre.

Théorème :

$\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R . On définit la fonction f par : $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Alors f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur au moins $] -R, R[$ et $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$, est une série entière qui a, de plus, le même rayon de convergence R .

Théorème :

$\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R , convergente sur $[0, x]$.

On définit la fonction f par : $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$.

Alors $F(x) = \int_0^x f(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$, est une série entière qui a encore le même rayon de convergence R et qui converge partout où $\sum a_n x^n$ converge.

En un mot, on peut dériver et intégrer terme à terme une série entière de variable réelle sur l'**ouvert** de convergence, ce qui ne change pas le rayon de convergence.

De plus, on peut intégrer terme à terme une série entière sur l'**intervalle de convergence**

3-3 Développement usuels

On peut voir sur le tableau 1, page suivante, les développements usuels en série entière.

La série géométrique et l'exponentielle sont aussi valables pour une variable complexe.

Démonstration :

- Pour e^x , on applique l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n en 0 : $\left| e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \times e^{|x|}$.

Or $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} e^{|x|} = 0$, ce qui se montre facilement en montrant que la série converge.

D'où $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right) = 0$ ce qui est le résultat annoncé.

- Pour $\cos x$, on utilise le même procédé : $\left| \cos x - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \right| \leq \frac{|x|^{2k+1}}{(2k+1)!} \times 1$.

Or $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{2k+1}}{(2k+1)!} = 0$, ce qui se montre facilement en montrant que la série converge. On conclut de la même façon.

- Pour $\sin x$, on utilise le même procédé : $\left| \sin x - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \right| \leq \frac{|x|^{2k+2}}{(2k+2)!} \times 1$.

Or $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{2k+2}}{(2k+2)!} = 0$, ce qui se montre facilement en montrant que la série converge. On conclut de la même façon.

- Pour $\operatorname{ch} x$, on écrit que $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, le résultat en découle immédiatement.

C'est la même chose pour $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

Tableau 1 – DÉVELOPPEMENTS USUELS EN SÉRIE ENTIÈRE

f	D_f	DSE	R	I
e^x	$\mathbb{R}$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	$+\infty$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$+\infty$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$+\infty$	$\mathbb{R}$
$\text{ch } x$	$\mathbb{R}$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$+\infty$	$\mathbb{R}$
$\text{sh } x$	$\mathbb{R}$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$+\infty$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{1+x}$	$\mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$	1	$] -1, 1[$
$\ln(1+x)$	$] -1, +\infty[$	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$	1	$] -1, 1]$
$\frac{1}{1-x}$	$\mathbb{R} \setminus \{1\}$	$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$	1	$] -1, 1[$
$\ln(1-x)$	$] -\infty, 1[$	$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$	1	$] -1, 1[$
$\arctan x$	$\mathbb{R}$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}$	1	$] -1, 1]$
$(1+x)^a$	$] -1, +\infty[$	$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!} x^n$	1 ou $+\infty$ ($a \in \mathbb{N}$)	

- $\frac{1}{1+x}$ est somme d'une série géométrique, de même $\frac{1}{1-x}$. La démonstration a été faite dans le chapitre relatif aux séries numériques.

- $\ln(1+x)$ et $-\ln(1-x)$ sont les primitives des précédentes qui s'annulent en 0.

On va montrer le prolongement à la borne 1 pour $\ln(1+x)$, on l'admettra pour $-\ln(1-x)$.

On a la convergence de en 1 de $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$ par application du critère spécial des séries alternées. Ceci prouve la continuité de la somme de la série entière en 1.

Ainsi, la fonction et son développement en série entière sont :

- définies et égales sur $] -1, 1[$,
- définies et continues toutes les deux en 1,

on a ainsi l'égalité entre la fonction et la série entière en 1 et donc sur $] -1, 1]$.

Ce procédé est très usuel pour « prolonger » l'égalité entre la fonction et son développement en série entière à une borne de l'intervalle de convergence. Il est régulièrement utilisé par les problèmes.

- $\arctan x$ est la primitive nulle en 0 de $\frac{1}{1+x^2}$ qui est aussi la somme d'une série géométrique.

La convergence en 1 et en -1 s'obtient encore par application du critère spécial.

L'égalité entre la fonction et la série entière en 1 et en -1 s'obtient encore en utilisant :

- l'égalité de la fonction et de la série entière sur $] -1, 1[$,
- la continuité de la fonction et de la série entière en 1 et -1 .
- Pour $(1+x)^\alpha$, avec $x \in] -1, 1[$, on applique la formule de Taylor avec reste intégral :

$$\begin{aligned}(1+x)^\alpha - \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!} x^n \right) &= \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} a(a-1)\dots(a-n) (1+t)^{\alpha-n-1} dt \\ &= \frac{a(a-1)\dots(a-n)}{n!} \int_0^x \left(\frac{x-t}{1+t} \right)^n (1+t)^{\alpha-1} dt\end{aligned}$$

Or, on montre assez facilement que : $\left| \frac{x-t}{1+t} \right| \leq |x|$, ce qui donne :

$$\left| (1+x)^\alpha - \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!} x^n \right) \right| \leq \frac{|a(a-1)\dots(a-n)|}{n!} |x|^n \left| \int_0^x (1+t)^{\alpha-1} dt \right|$$

On montre ensuite que cette quantité tend vers 0 en calculant l'intégrale et en montrant par application du théorème de d'Alembert que c'est le terme général d'une série convergente.

Ce qui est laissé au lecteur, qui prendra soin de séparer les cas $x > 0$ et $x < 0$.

■

4 Développement d'une fonction en Série Entière, Somme de Séries Entières

Les deux problèmes sont complémentaires, il s'agit pour une fonction donnée de trouver une série entière égale à cette fonction sur un intervalle à préciser, ou bien il s'agit pour une série entière de trouver une fonction usuelle à laquelle est égale sur un intervalle à préciser.

4-1 Fonction développable en série entière

Définition : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$, définie au voisinage de 0.

On dit que f est développable en série entière à l'origine $\Leftrightarrow$ il existe une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence R , et un voisinage V de l'origine tel que : $\forall x \in V, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

On remarquera que nécessairement, $V \subset [-R, R]$.

Théorème : Soit f développable en série entière à l'origine, alors f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0, et cette série entière est la série de Taylor : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

Ce développement, s'il existe, est donc unique, égal à la série de Taylor à l'origine de la fonction.

Il n'y a pas de réciproque, une fonction peut être de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0 sans être développable en série entière à l'origine.

Démonstration : Soit $] -a, a[\subset V$, alors, $\forall x \in] -a, a[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Or $] -a, a[\subset] -R, R[$, ce qui prouve que la série entière, et donc la fonction est de classe C^∞ au voisinage de 0. On obtient, en dérivant terme à terme la série entière :

$$\begin{aligned} f(0) &= a_0 \\ f'(0) &= 1 \times a_1 \\ f''(0) &= 2 \times 1 \times a_2 \\ &\vdots \\ f^{(n)}(0) &= n! \times a_n \end{aligned}$$

Ce qui assure le résultat. ■

Corollaire : f définie et développable en série entière sur $] -a, a[$,

$$\begin{cases} f \text{ paire} & \Leftrightarrow \text{son développement est pair} \\ f \text{ impaire} & \Leftrightarrow \text{son développement est impair} \end{cases}$$

4-2 Développement d'une fonction en série entière

Il s'agit ici de la recherche pratique du développement d'une fonction donnée en série entière.

- Il faut essayer d'utiliser les développements connus, mais aussi leurs dérivées et leurs primitives...
- Ceci est toujours possible pour une fraction rationnelle qu'on décompose en éléments simples sur $\mathbb{C}$, même si la fonction est à valeurs réelles. On se retrouve avec des séries géométriques et des dérivées de séries géométriques. Par exemple :

$$\begin{aligned} \frac{1}{a-x} &= \frac{1}{a} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{a}\right)^n \text{ pour } |x| < |a| \\ \frac{1}{(a-x)^2} &= \left(\frac{1}{a-x}\right)' \end{aligned}$$

- On peut essayer la formule de Taylor avec reste intégral ou l'inégalité de Taylor-Lagrange comme on l'a fait pour les fonctions usuelles. L'énoncé doit vous guider...
- Enfin, on peut utiliser une équation différentielle. Là aussi, l'énoncé doit vous guider...
 - On considère au départ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ solution de l'équation différentielle. On pose donc $y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
 - Tout ce qu'on écrit est valable pour $x \in] -R, R[$. Il faut le dire...
 - On calcule y' et au besoin y'' , on reporte dans l'équation.
 - On éclate tout en sommes de séries entières.
 - On **regroupe ce qui se regroupe naturellement**.
 - Ensuite, on **réindexe pour trouver une série entière unique** et nulle.
 - Alors, chaque coefficient est nul, par unicité du développement en série entière quand il existe. On a en général une relation de récurrence entre les coefficients. Cette relation permet normalement de calculer les coefficients mais aussi assez souvent de trouver directement le rayon de convergence, ce qui est indispensable.

Exemple : On peut facilement retrouver les développements de l'exponentielle, du sinus, ..., par ce procédé.

4-3 Sommation de certaines séries entières

Il faut essayer :

- en dérivant et en intégrant terme à terme,

• en regroupant ou en séparant des termes,
de se ramener à des séries connues.

Exemple : Soit $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n} x^n$.

On calcule facilement le rayon de convergence $R = 2$, on travaille pour $x \in]-2, 2[$.

Le problème est ici d'abord le n en facteur. On considère que cet n est apparu lors d'une dérivation.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n} x^n = x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n} x^{n-1} = x g'(x)$$

$$\text{D'où : } g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n} = \frac{\frac{x}{2}}{1 - \frac{x}{2}} = \frac{x}{2-x} \text{ puisqu'il s'agit d'une série géométrique.}$$

$$\text{Par simple dérivation, } g'(x) = \frac{2}{(2-x)^2} \text{ et enfin : } \forall x \in]-2, 2[, f(x) = \frac{2x}{(2-x)^2}.$$

5 Exponentielle complexe

5-1 Exponentielle complexe

Définition : Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ qu'on appelle exponentielle de z .

Cette définition est bien entendue destinée à prolonger la définition de l'exponentielle dans $\mathbb{R}$.

5-2 Cohérence de cette définition

Pour $z = e^{i\theta}$, avec $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\cos \theta + i \sin \theta = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\theta^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!} = e^{i\theta}.$$

Tout ceci est bien compatible. Il faudrait encore montrer que $e^{z+z'} = e^z \times e^{z'}$ pour avoir les règles de calcul habituelles sur les complexes. On admet ce résultat.

6 Compléments

6-1 Avec Maple

On peut toujours considérer une série entière comme une série numérique, x étant un paramètre.

Cependant, c'est le package « `powseries` » (littéralement, « série de puissances ») qui permet de manipuler spécifiquement des séries entières.

Il contient de nombreuses fonctions usuelles, citons

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{powsin} \\ \text{powcos} \\ \text{powexp} \\ \text{powslog} \end{array} \right.$$

De plus « `evalpow` » qui permet de créer une série entière pour n'importe quelle fonction, et « `powsolve` » qui permet de résoudre en série entière une équation différentielle linéaire. On renvoie à l'aide Maple sur chacun de ces mots-clefs.

Pas de faux espoirs cependant, Maple vous donnera facilement les premiers termes mais très rarement le terme général...

6-2 Les mathématiciens du chapitre

Mercator Nicolas 1620-1687 Cet allemand fut le précurseur de l'usage des développements en série entière. La série de Mercator est le développement de $\ln(1+x)$...

Gregory James 1638-1675 Ce mathématicien anglais fut le premier à s'intéresser à la convergence des séries entières... Il donna celle de l'arc-tangente...

Lagrange Joseph 1736-1813 Ce mathématicien français est sans doute le premier à s'être intéressé, entre autres, aux fonctions développables en série entière et aux sommes de séries entières.

Sommaire

1 Application de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux	1	4 Espace Vectoriel $\mathcal{C}_T(\mathbb{R})$	5
1-1 Application de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux	1	4-1 Espace vectoriel $\mathcal{C}_T(\mathbb{R})$	5
1-2 Application T -périodique $\mathcal{C}^1$ par mcx	1	4-2 Norme et produit scalaire sur $\mathcal{C}_T(\mathbb{R})$.	5
1-3 Opération sur les applications $\mathcal{C}^1$ par mcx	1	4-3 Famille orthogonale	8
		4-4 Formule de Parseval	8
2 Série de Fourier de f, T-périodique	2	5 Petits compléments	9
2-1 Coefficients de Fourier	2	5-1 Quelques valeurs utiles	9
2-2 Série de Fourier	3	5-2 Sommation de séries numériques . . .	9
		5-3 Somme d'une série trigonométrique .	9
3 Convergence d'une série de Fourier	4	6 Compléments	10
3-1 f de classe $\mathcal{C}^1$ par mcx, T -périodique .	4	6-1 Avec Maple	10
3-2 f continue, $\mathcal{C}^1$ par mcx, T -périodique	4	6-2 Les mathématiciens du chapitre	10
3-3 Deux exemples	4		

Les séries de Fourier sont des séries de fonctions périodiques.

L'objet est de décomposer un signal périodique en somme de sinus et cosinus de fréquences égales à, et multiples de, la fréquence du signal de base.

Ce chapitre commence par une partie technique sur les application de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

1 Application de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux

1-1 Application de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[a, b]$

Définition : f définie sur $[a, b]$ est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[a, b]$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \exists a_0, a_1, \dots, a_n \quad a_0 = a < a_1 < \dots < a_n = b \quad \text{tels que :} \\ \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad f_i = f|_{]a_{i-1}, a_i[} \end{cases}$$

la restriction de f à $]a_{i-1}, a_i[$ est prolongeable sur $[a_{i-1}, a_i]$ en une application de classe $\mathcal{C}^1$ notée $\tilde{f}_i$

Remarquons que f est nécessairement continue par morceaux mais pas nécessairement continue ! De plus, il faut bien observer que le fait d'être de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux ne dépend pas de la subdivision, il suffit que celle ci existe.

En pratique, il suffit de vérifier que le graphe de f n'aille jamais à l'infini et n'admette pas de tangente verticale. Pour cela, on fera **obligatoirement** un graphe de la fonction **sur un peu plus** d'une période.

1-2 Application T -périodique de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$

Définition : f , T -périodique, est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R} \Leftrightarrow$ pour $a \in \mathbb{R}$, f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[a, a + T]$

C'est le type de fonctions qu'on rencontrera dans ce chapitre. La période sera d'ailleurs le plus souvent 2π .

1-3 Opération sur les applications $\mathcal{C}^1$ par mcx

Théorème :

- La somme,
- le produit par une constante et
- le produit

de 2 applications de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[a, b]$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[a, b]$.

Démonstration : Sans faire la démonstration dans le détail, signalons qu'il suffit de prendre une subdivision qui convient pour les **deux** applications. ■

2 Série de Fourier d'une application T -périodique

Pour une application f , T -périodique, on va pouvoir déterminer la série de Fourier de f . Dans un deuxième temps, il va falloir déterminer

- si la série de Fourier de f converge et, de plus,
- **quelle est sa somme.**

Ce ne sera pas toujours $f(x)$ en tous points...

2-1 Coefficients de Fourier d'une application T -périodique continue par morceaux

Dans les séries de Fourier, assez souvent, on n'a de formule pour f que dans un certain intervalle, on veillera donc à n'utiliser cette formule que sur cet intervalle...

a) Application T -périodique

Définition : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$, T -périodique, continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. On pose, avec $\omega = \frac{2\pi}{T}$,

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos n\omega t dt = \frac{2}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t) \cos n\omega t dt$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin n\omega t dt = \frac{2}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t) \sin n\omega t dt$$

Ce sont les coefficients de Fourier de f . Et a_0 est la valeur moyenne de f .

Bien sûr, si f est à valeurs réelles, les coefficients de Fourier de f sont réels.

b) Application 2π -périodique

Quand f est 2π -périodique, les coefficients sont :

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt dt = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(t) \cos nt dt$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt dt = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(t) \sin nt dt$$

Dans le cas où f est paire ou impaire, on peut travailler sur une demi-période, impérativement $\left[0, \frac{T}{2}\right]$.

c) Application 2π -périodique et paire

Dans le cas où f est paire et 2π -périodique,

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(t) dt$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t) \cos nt dt$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n = 0$$

d) Application 2π -périodique et impaire

Dans le cas où f est impaire et 2π -périodique,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = 0$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t) \sin nt dt$$

e) Coefficients de Fourier complexes

Si cela est plus facile, on peut calculer

$$c_0 = a_0 = \frac{1}{T} \int_\alpha^{\alpha+T} f(t) dt$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_\alpha^{\alpha+T} f(t) e^{-in\omega t} dt = \frac{a_n - ib_n}{2} \text{ pour } n \in \mathbb{N}^*$$

Si f est à valeurs réelles, a_n et b_n sont réels, et donc : $a_n = \frac{\operatorname{Re}(c_n)}{2}$ et $b_n = -\frac{\operatorname{Im}(c_n)}{2}$

2-2 Série de Fourier associée à une application T -périodique continue par morceaux**a) Application T -périodique**

Définition : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$, T -périodique, continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, on appelle **série de Fourier de f** , la série

$$S(f)(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) \quad \text{avec : } \omega = \frac{2\pi}{T}$$

Si f est paire, il n'y a pas de terme en sinus, tandis que si f est impaire, il n'y a pas de terme en cosinus.

b) Application 2π -périodique

Dans le cas où f est 2π -périodique,

$$S(f)(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

3 Convergence d'une série de Fourier : théorèmes de Dirichlet

Les théorèmes de convergence, délicats à montrer, seront admis.

Rien n'assure que la série de Fourier converge en tous points.

En un point où la série de Fourier converge, rien n'assure que $S(f)(t) = f(t)$.

3-1 f de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, T -périodique

Théorème : f de classe $\mathcal{C}^1$ **par morceaux** sur $\mathbb{R}$, T -périodique

: la série de Fourier de f converge en tous points, et est de somme

$$S(f)(t) = \frac{f(t+0) + f(t-0)}{2}$$

où $f(t+0)$ et $f(t-0)$ sont les limites à droite et à gauche de f .

En tous points où f est continue, on a : $S(f)(t) = f(t)$.

Il n'y a qu'aux points où f est discontinue qu'il risque d'y avoir $S(f)(t) \neq f(t)$.

On fera donc un graphe de la fonction sur un peu plus d'une période

- pour repérer les points de discontinuité,
- voir si la valeur au point est la demi-somme des limites à droite et à gauche,
- et vérifier de toutes façons le caractère $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ de f .

Si, en un point de discontinuité, on n'a pas $f(t) = \frac{f(t+0) + f(t-0)}{2}$, alors, on considère une application $\tilde{f}$ égale à f partout où elle est continue et $\tilde{f}(t) = \frac{f(t+0) + f(t-0)}{2}$ là où f est discontinue.

Comme il n'y a qu'en quelques points que f et $\tilde{f}$ sont différentes, elles ont la **même série de Fourier**.

Par conséquent, la série de Fourier de f a pour somme $\tilde{f}$.

3-2 f continue, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, T -périodique

Théorème : f **continue** et de classe $\mathcal{C}^1$ **par morceaux** sur $\mathbb{R}$, T -périodique

: la série de Fourier de f converge en tous points, et : $S(f)(t) = f(t)$.

De plus, les séries $\sum |a_n|$ et $\sum |b_n|$ convergent.

Enfin, $\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt$ peut se calculer en intégrant terme à terme la série de Fourier de f .

D'autre part, nous avons un théorème d'unicité du développement en série de Fourier :

Théorème : Soit f **continue**, somme d'une série trigonométrique en tous points,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$$

Alors, cette série **est la série de Fourier de f** .

Ceci permet donc parfois de trouver le développement en série de Fourier par des moyens « détournés » comme par exemple des développements en série entière en e^{it} et e^{-it} .

3-3 Deux exemples

Nous allons « observer » la convergence des séries de Fourier de deux applications de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, l'une continue, l'autre discontinue.

a) f continue

Soit f paire, 2π périodique, valant $\frac{\pi}{2} - t$ sur $[0, \pi]$. Le calcul de la série de Fourier est simple. Les b_n sont nuls, les a_{2k} aussi et les a_{2k+1} valent $\frac{4}{\pi(2k+1)^2}$. Ainsi la série de Fourier est :

$$S(f)(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos(2k+1)x$$

On s'intéresse ici aux sommes partielles : $S_{2p+1}(f)(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^p \frac{1}{(2k+1)^2} \cos(2k+1)x$

On ne dispose ici d'une formule explicite de $f(t)$ que sur $[0, \pi]$. On veillera avec soin à ne pas utiliser cette formule **en dehors** de cet intervalle !

On voit sur la figure 1, page suivante, quelques sommes partielles de la série de Fourier de f .

On peut voir que la convergence de la série de Fourier vers la fonction est rapide.

Quelques harmoniques suffisent, un grand nombre n'apporte rien de plus.

b) f discontinue

Soit g impaire, 2π périodique, valant 1 sur $]0, \pi[$. Elle vaut donc 0 en 0 et en π . Le calcul de la série de Fourier est simple. Les a_n sont nuls, les b_{2k} aussi et les b_{2k+1} valent $\frac{4}{\pi(2k+1)}$. Ainsi la série de Fourier est :

$$S(g)(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2k+1} \sin(2k+1)x$$

On s'intéresse ici aux sommes partielles : $S_{2p+1}(g)(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^p \frac{1}{2k+1} \sin(2k+1)x$

On voit sur la figure 2, page 7, quelques sommes partielles de la série de Fourier de g .

On voit ici que la discontinuité entraîne une convergence beaucoup plus lente et qu'il faut un grand nombre d'harmoniques pour « recopier » avec précision le signal.

4 Espace Vectoriel $\mathcal{C}_T(\mathbb{R})$ des applications continues, T -périodiques

4-1 Espace vectoriel $\mathcal{C}_T(\mathbb{R})$

Théorème : $\mathcal{C}_T(\mathbb{R})$, l'ensemble des applications **continues**, T -périodiques, $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est un espace vectoriel réel.

Démonstration : C'est clairement un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ puisque

- $\mathcal{C}_T(\mathbb{R})$ est non vide,
- une combinaison linéaire d'applications T -périodique est T -périodique.

■

4-2 Norme et produit scalaire sur $\mathcal{C}_T(\mathbb{R})$

Théorème : Sur $\mathcal{C}_T(\mathbb{R})$: $\langle f, g \rangle = \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)g(t) dt$ est un produit scalaire.

La norme associée est : $\|f\| = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f^2(t) dt}$

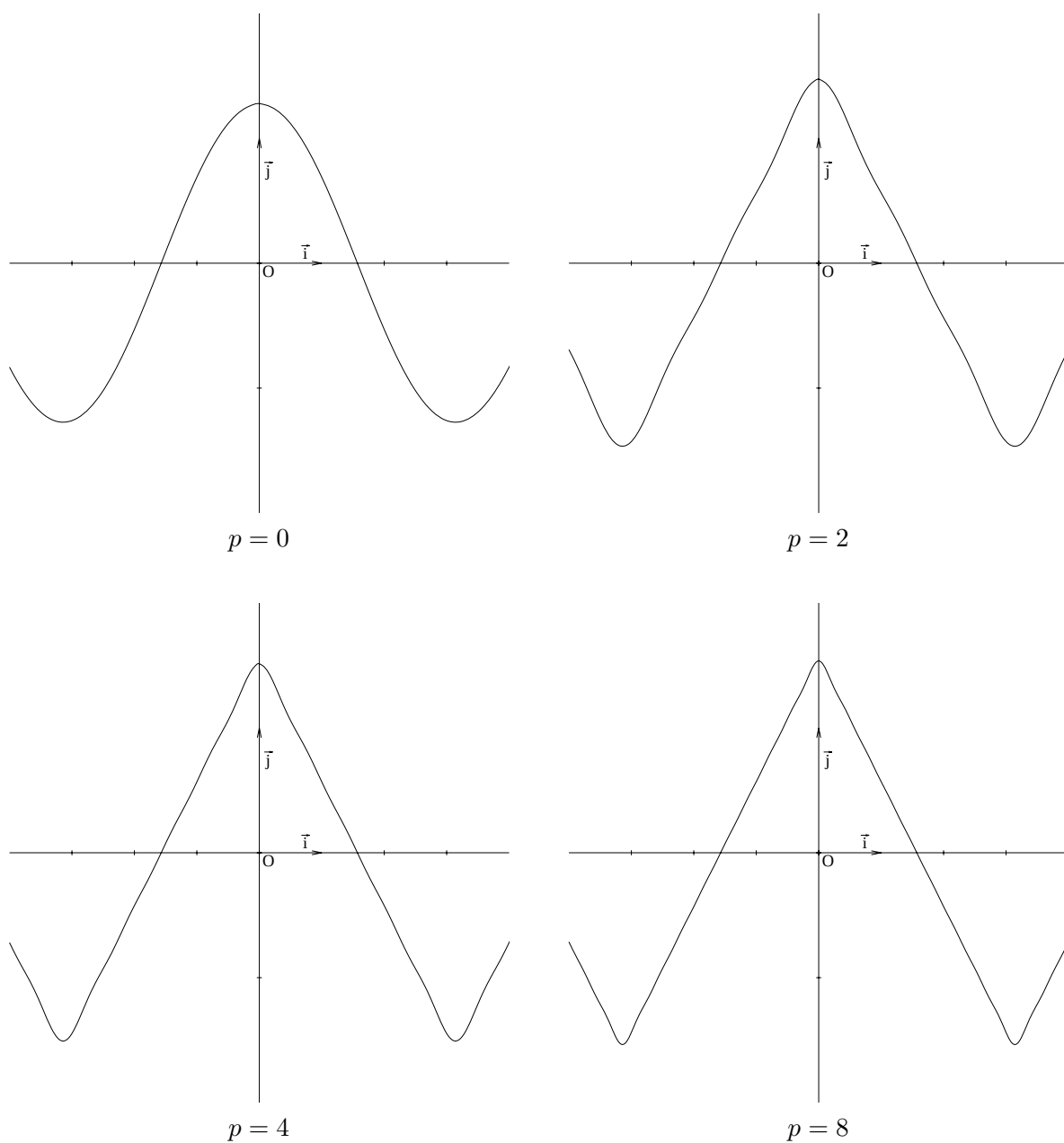


Figure 1 – Sommes partielles de la série de Fourier pour une application continue

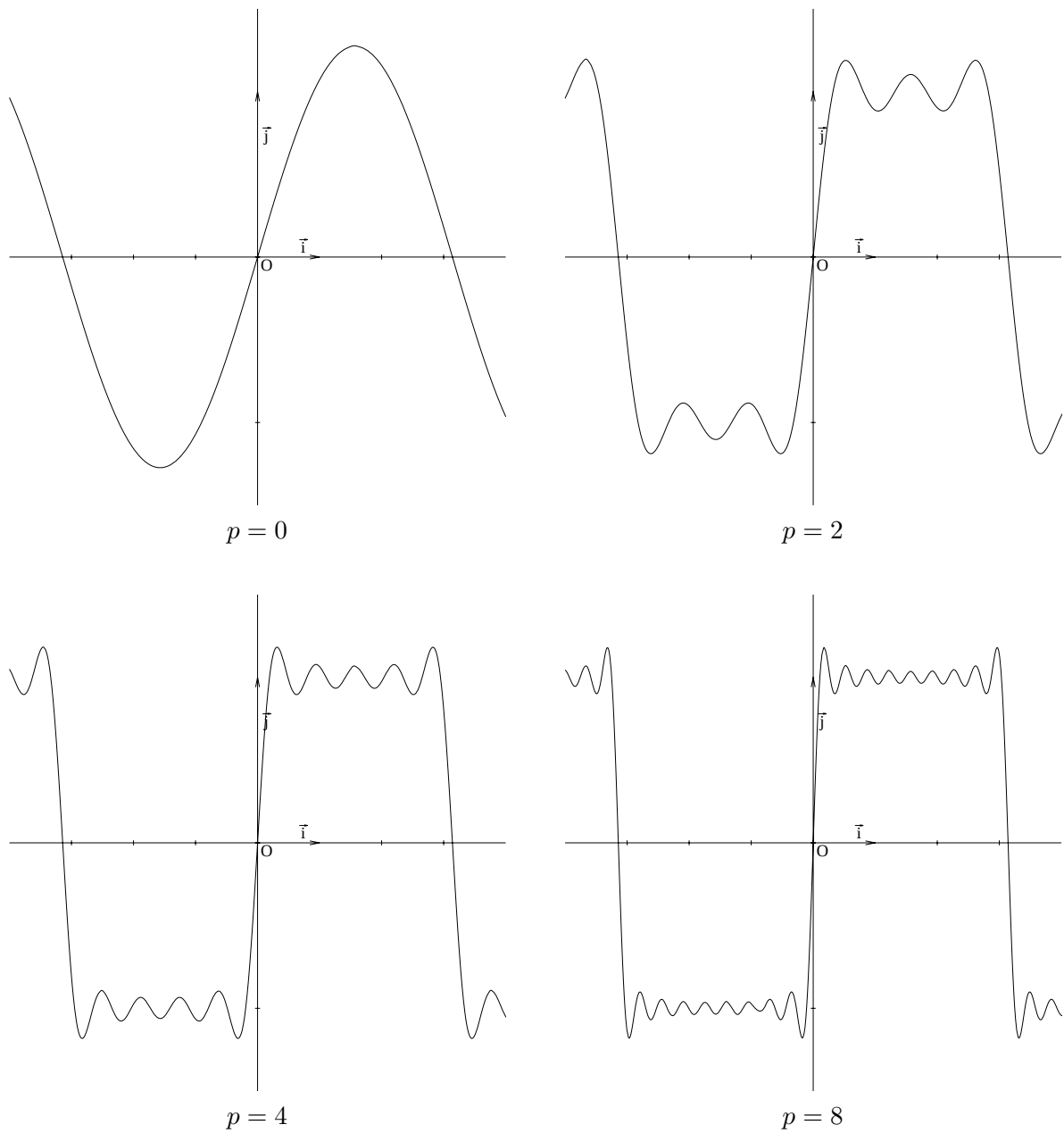


Figure 2 – Sommes partielles de la série de Fourier pour une application discontinue

Si les applications sont simplement **continues par morceaux**,

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)g(t) dt \quad \text{est une forme bilinéaire symétrique positive.}$$

Démonstration :

- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est clairement bilinéaire symétrique, par linéarité de l'intégrale.
- $\langle f, f \rangle = \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f^2(t) dt \geq 0$, la forme quadratique est positive.
- $\langle f, f \rangle = 0$: $\int_{\alpha}^{\alpha+T} f^2(t) dt = 0$, on applique le théorème des 3 conditions à : $t \rightarrow f^2(t)$.

Cette application est :

- 1) positive,
- 2) continue,
- 3) d'intégrale nulle sur $[\alpha, \alpha + T]$,

donc $\forall t \in [\alpha, \alpha + T], f^2(t) = 0$, donc $f(t) = 0$ et comme f est T -périodique, $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = 0$ et donc $f = 0$.

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ est donc bien bilinéaire symétrique, définie positive, c'est un produit scalaire. ■

4-3 Famille orthogonale

Théorème : La famille $\{(t \rightarrow \cos n\omega t)_{n \in \mathbb{N}}, (t \rightarrow \sin n\omega t)_{n \in \mathbb{N}^*}\}$ est orthogonale pour ce produit scalaire.

Démonstration : Il faut vérifier que ces applications sont 2 à 2 orthogonales.

$$\frac{1}{T} \int_0^T \cos n\omega t \cos p\omega t dt = \frac{1}{2T} \int_0^T \cos(n+p)\omega t + \cos(n-p)\omega t dt = 0 \quad (n \neq p)$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T \sin n\omega t \sin p\omega t dt = \frac{1}{2T} \int_0^T \cos(n-p)\omega t - \cos(n+p)\omega t dt = 0 \quad (n \neq p)$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T \cos n\omega t \sin p\omega t dt = \frac{1}{2T} \int_0^T \sin(n+p)\omega t + \sin(p-n)\omega t dt$$

$$= -\frac{1}{2T} \left[\frac{\cos(n+p)\omega t}{n+p} + \frac{\cos(p-n)\omega t}{p-n} \right]_0^T = 0$$

On a fait ce dernier calcul quand $n \neq p$ mais le résultat est le même quand $p = n$ car le deuxième sin disparaît directement. ■

4-4 Formule de Parseval

Théorème : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$, T -périodique, continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, alors :

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f^2(t)| dt = \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} |f^2(t)| dt = |a_0^2| + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (|a_n^2| + |b_n^2|)$$

Si la fonction est réelle : $\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f^2(t) dt = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2)$

Si, de plus, f est 2π -périodique, $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f^2(t) dt = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2)$

On va donner une interprétation géométrique pour les applications à valeur réelle.

Soit :

$$E_n = Vect(1, \cos \omega t, \cos 2\omega t, \dots, \cos n\omega t, \sin \omega t, \sin 2\omega t, \dots, \sin n\omega t)$$

dont une base orthonormale est :

$$(1, \sqrt{2} \cos \omega t, \sqrt{2} \cos 2\omega t, \dots, \sqrt{2} \cos n\omega t, \sqrt{2} \sin \omega t, \sqrt{2} \sin 2\omega t, \dots, \sqrt{2} \sin n\omega t)$$

La projection orthogonale f sur E_n est donc :

$$p(f)(t) = \langle f, 1 \rangle 1 + \sum_{k=1}^n \langle f, \sqrt{2} \cos k\omega t \rangle \sqrt{2} \cos k\omega t + \sum_{k=1}^n \langle f, \sqrt{2} \sin k\omega t \rangle \sqrt{2} \sin k\omega t$$

Et donc, la norme de cette projection sur E_n est :

$$\begin{aligned} \|p(f)\|^2 &= \langle f, 1 \rangle^2 + \sum_{k=1}^n \langle f, \sqrt{2} \cos k\omega t \rangle^2 + \sum_{k=1}^n \langle f, \sqrt{2} \sin k\omega t \rangle^2 \\ &= \left(\frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t) dt \right)^2 + \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t) \sqrt{2} \cos k\omega t dt \right)^2 + \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t) \sqrt{2} \sin k\omega t dt \right)^2 \\ &= \left(\frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t) dt \right)^2 + \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{2}T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t) \cos k\omega t dt \right)^2 + \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{2}T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t) \sin k\omega t dt \right)^2 \\ &= a_0^2 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} a_k^2 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} b_k^2 \end{aligned}$$

On voit bien que la formule de Parseval est la limite d'une égalité de normes.

Les $\frac{1}{2}$ viennent du fait que les cosinus et sinus ne sont pas de norme 1 mais de norme $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

5 Petits compléments

5-1 Quelques valeurs utiles

On n'oubliera pas que pour $n \in \mathbb{Z}$, $e^{in\pi} = (-1)^n$, $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, $\cos n\pi = (-1)^n$, $\sin n\pi = 0$

5-2 Sommation de certaines séries numériques

Les séries de Fourier permettent de calculer facilement la somme de certaines séries numériques.

On considère donc : $f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$ d'un côté

et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ d'un autre. (cas de la période 2π)

- Si les u_n « ressemblent » aux a_n ou aux b_n .
Alors, on obtient la somme en prenant une valeur particulière de t . Le plus souvent, on essaye $0, \pi, \frac{\pi}{2} \dots$
- Si les u_n « ressemblent » aux a_n^2 ou aux b_n^2 . (avec en plus un module s'ils ne sont pas réels)
Alors, on obtient la somme en utilisant la formule de Parseval.

5-3 Somme d'une série trigonométrique

On sait parfois que : $f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$, ce résultat ayant été acquis sans le théorème de Dirichlet. (On obtient parfois un tel résultat en utilisant des séries entières en $e^{i\omega t}$ et $e^{-i\omega t}$.)

- Si f est continue, on a bien la série de Fourier de f .

- Si f n'est pas continue, **rien ne prouve** qu'il s'agit de la série de Fourier de f .
 Pour arriver au résultat, l'énoncé vous guide ...
 On peut par exemple prouver que cette série trigonométrique peut s'intégrer terme à terme sur une période, ce qui revient à l'inversion de signes $\sum$ et $\int$.
 Alors l'orthogonalité des $\cos n\omega t$ et $\sin n\omega t$ permettra de conclure qu'on a bien la série de Fourier de f .

6 Compléments

6-1 Avec Maple

Si on veut calculer des coefficients de Fourier avec Maple, il ne faudra pas oublier, si on veut que Maple pense à simplifier certains résultats de lui préciser que n est un entier par

```
> assume(n, integer);
```

Il faudra de plus sans doute demander ces simplifications, par exemple par

```
> normal(a(n));
```

si $a(n)$ est un des coefficients de Fourier.

6-2 Les mathématiciens du chapitre

Riemann Bernhard 1826-1866 Rappelons ce grand mathématicien allemand, auteur de nombreux travaux sur les séries trigonométriques...

Fourier Joseph 1768-1830 C'est ce français qui, à juste titre, a laissé son nom au chapitre...

Dirichlet Gustav 1805-1859 Ce mathématicien allemand a aussi laissé, à juste titre, son nom aux conditions suffisantes de convergence...

Parseval Marc 1755-1836 L'égalité de Parseval est bien due à ce mathématicien français.

Sommaire

1 Fonctions $\mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$, Dérivées Premières	1	3-2 Algèbre $\mathcal{C}^k(\mathcal{U}, \mathbb{R})$	6
1-1 Application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$	1	4 Fonctions Vectorielles $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p$	7
1-2 Différentielle	1	4-1 Dérivée d'une fonction $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p$	7
1-3 Développement limité à l'ordre 1	2	4-2 Développement limité	7
1-4 Gradient, dérivée selon un vecteur	2	4-3 Dérivée de $x \rightarrow \lambda(x) F(x)$	8
1-5 Algèbre $\mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{R})$	3	4-4 Dérivée d'un produit	8
1-6 Fonctions composées	3	5 Fonction Vectorielle $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, classe $\mathcal{C}^1$	9
2 Fonctions $\mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ de Classe $\mathcal{C}^2$	4	5-1 Fonction de classe $\mathcal{C}^1$	9
2-1 Application de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{U}$	4	5-2 Différentielle	9
2-2 Théorème de Schwarz	4	5-3 Cas où $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, Jacobien	9
2-3 Formule de Taylor-Young à l'ordre 2	4	5-4 Composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$	10
2-4 Extremums	5	5-5 Fonction $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, classe $\mathcal{C}^1$	10
3 Fonctions $\mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ de Classe $\mathcal{C}^k$	6	6 Compléments	11
3-1 Fonctions $\mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ de Classe $\mathcal{C}^k$	6	6-1 Les mathématiciens du chapitre	11
		6-2 Avec Maple	11

Dans tout ce chapitre, quand on utilise l'expression « de classe $\mathcal{C}^k$ », on suppose à priori que $k \geq 1$.

1 Fonctions $\mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$, Dérivées Premières

Dans cette partie, toutes les fonctions sont supposées définies sur un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^p$. On travaillera toujours sur ce domaine $\mathcal{U}$, sur lequel on a donc une application.

1-1 Application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$

Définition : $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$, définie sur $\mathcal{U}$, un ouvert de $\mathbb{R}^p$, on appelle **dérivée partielle de f** par rapport à la $i^{\text{ème}}$ variable, au point $u = (x_1, x_2, \dots, x_p)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, x_2, \dots, x_p) = \lim_{t \rightarrow x_i} \frac{f(x_1, x_2, \dots, t, \dots, x_p) - f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_p)}{t - x_i}$$

si cette limite existe.

Sinon, on dit que f n'admet pas de dérivée partielle par rapport à la $i^{\text{ème}}$ variable, au point $u = (x_1, x_2, \dots, x_p)$. On parle parfois de dérivée partielle première.

Quand il n'y a que 2 ou 3 variables on note souvent les dérivées partielles,

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \text{ au lieu de } \frac{\partial f}{\partial x_i} \text{ ou même } \frac{\partial g}{\partial \rho}, \frac{\partial g}{\partial \theta}$$

Mais, on n'oubliera pas, en cas d'ambiguïté, qu'il s'agit des dérivées par rapport à la première, la seconde, ou la $i^{\text{ème}}$ variable...

Définition : f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^p \Leftrightarrow f$ admet p dérivées partielles continues sur $\mathcal{U}$.

C'est à dire : $\forall i \in \{1, 2, \dots, p\}$, $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ est définie et continue sur $\mathcal{U}$

1-2 Différentielle d'une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$

Définition : $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$, définie sur $\mathcal{U}$, un ouvert de $\mathbb{R}^p$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$, on appelle **différentielle de f** en $u = (x_1, x_2, \dots, x_p)$, l'application linéaire notée $df_u : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$

$$(dx_1, dx_2, \dots, dx_p) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_1}(u) dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(u) dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_p}(u) dx_p$$

noté le plus souvent, pour alléger les notations : $df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_p} dx_p$

Dans le cas de 2 ou 3 variables, on note souvent la **différentielle de f en (x_0, y_0, z_0)** :

$$(dx, dy, dz) \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) dy + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) dz$$

ou bien : $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$

1-3 Développement limité à l'ordre 1 de f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$

Théorème : $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$, définie sur $\mathcal{U}$, un ouvert de $\mathbb{R}^p$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$, $u = (x_1, x_2, \dots, x_p) \in \mathcal{U}$.
 f admet un développement limité à l'ordre 1 en u et

$$f(u + du) = f(u) + df_u(du) + o(du) \quad \text{avec} \quad \lim_{\|du\| \rightarrow 0} \frac{o(du)}{\|du\|} = 0$$

C'est à dire pour 3 variables par exemple :

$$f(x + dx, y + dy, z + dz) = f(x, y, z) + \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) dy + \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) dz + o(dx, dy, dz)$$

Démonstration : On le montre pour 3 variables. La démonstration repose sur le théorème des accroissements finis. Pour cela, il faut faire varier les variables une à la fois.

$$\begin{aligned} f(x + dx, y + dy, z + dz) - f(x, y, z) &= f(x + dx, y + dy, z + dz) - f(x, y + dy, z + dz) \\ &\quad + f(x, y + dy, z + dz) - f(x, y, z + dz) \\ &\quad + f(x, y, z + dz) - f(x, y, z) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x + \alpha dx, y + dy, z + dz) \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y + \beta dy, z + dz) + \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z + \gamma dz) \end{aligned}$$

avec $\alpha, \beta, \gamma \in]0, 1[$. D'où, par continuité des dérivées partielles :

$$\begin{aligned} f(x + dx, y + dy, z + dz) - f(x, y, z) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) dx + o((dx, dy, dz)) \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) dy + o((0, dy, dz)) + \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) dz + o((0, 0, dz)) \end{aligned}$$

Il ne reste qu'à regrouper les $o(\dots)$ en un seul $o((dx, dy, dz))$. ■

1-4 Gradient, dérivée selon un vecteur

Définition : $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$, définie sur $\mathcal{U}$, un ouvert de $\mathbb{R}^p$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$, $u = (x_1, x_2, \dots, x_p) \in \mathcal{U}$

On appelle **gradient de f en u** , noté $\overrightarrow{Grad_u(f)}$ le vecteur :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(u) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(u) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_p}(u) \end{pmatrix}$$

Ce gradient a une grande importance dans l'étude des courbes d'équation $f(x, y) = 0$ ou des surfaces d'équation $f(x, y, z) = 0$ dans un repère orthonormal.

Définition : $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$, définie sur $\mathcal{U}$, un ouvert de $\mathbb{R}^p$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$, $u = (x_1, x_2, \dots, x_p) \in \mathcal{U}$

On appelle **dérivée de f suivant le vecteur $\vec{V}$** : $\vec{V} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_p \end{pmatrix}$ en u le produit scalaire

$$\overrightarrow{\text{Grad}_u(f)} \cdot \vec{V} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(u) v_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(u) v_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_p}(u) v_p$$

1-5 Algèbre $\mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{R})$

Théorème : L'ensemble des applications de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^p$, à valeur réelle, muni de

$\left\{ \begin{array}{l} \text{La somme des applications} \\ \text{Le produit d'une application par une constante} \\ \text{Le produit de deux applications} \end{array} \right\}$ a une structure d'algèbre commutative.

Démonstration : On montre que c'est une sous-algèbre de $\mathcal{C}^0(\mathcal{U}, \mathbb{R})$. Clairement, $\mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{R})$

- est stable par combinaison linéaire
- et stable par produit par application des propriétés équivalentes pour les fonctions d'une variable,
- et contient la fonction constante 1 élément neutre du produit.

■

1-6 Différentielle et dérivées partielles de fonctions composées

On écrit le théorème pour une fonction de 3 variables. L'énoncé pour une fonction de p variables s'en déduit facilement.

Théorème : $\left. \begin{array}{l} x, y, z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } I \\ f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \text{ de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathcal{U} \text{ contenant } x(I) \times y(I) \times z(I) \\ F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ définie par } \forall t \in I, F(t) = f(x(t), y(t), z(t)) \end{array} \right\} : F \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } I, \text{ et :}$

$$\forall t \in I, F'(t) = \frac{\partial f}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y} y'(t) + \frac{\partial f}{\partial z} z'(t)$$

Ou encore, en utilisant la notation différentielle : $\frac{dF}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt}$

Bien sûr, toutes les dérivées partielles sont prises en $(x(t), y(t), z(t))$ et les dérivées en t .

Démonstration : On écrit la démonstration pour une fonction de 2 variables seulement !

$$\begin{aligned} F(t+dt) - F(t) &= f(x(t+dt), y(t+dt)) - f(x(t), y(t)) \\ &= f\left(x(t) + \frac{dx}{dt} dt + o(dt), y(t) + \frac{dy}{dt} dt + o(dt)\right) - f(x(t), y(t)) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} \times \left(\frac{dx}{dt} dt + o(dt)\right) + \frac{\partial f}{\partial y} \times \left(\frac{dy}{dt} dt + o(dt)\right) \\ &\quad + o\left(\frac{dx}{dt} dt + o(dt), \frac{dy}{dt} dt + o(dt)\right) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \left(\frac{\partial f}{\partial x} o(dt) + \frac{\partial f}{\partial y} o(dt)\right) + o(dt) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + o(dt) \end{aligned}$$

■

Théorème : On écrit ce théorème pour la composée de fonctions de plusieurs variables avec 2 et 3 variables. Ceci est bien sûr arbitraire, le théorème s'applique avec p et q variables...

$$\left. \begin{array}{l} f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \text{ de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathcal{U} \text{ un ouvert de } \mathbb{R}^3 \\ u, v, w : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathcal{V} \text{ un ouvert de } \mathbb{R}^2 \\ \forall x, y \in \mathcal{V}, (u(x, y), v(x, y), w(x, y)) \in \mathcal{U} \end{array} \right\} : F : \left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{V} & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \rightarrow f(u(x, y), v(x, y), w(x, y)) \end{array} \right.$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{V}$ et :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned}$$

On a aussi changé les notations parce qu'il faut pouvoir s'adapter !

Démonstration : Quand on fixe y , on se retrouve exactement dans les hypothèses du théorème précédent. Ce qui donne $\frac{\partial F}{\partial x}$. De même, on fixe x pour obtenir $\frac{\partial F}{\partial y}$. ■

2 Fonctions $\mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ de Classe $\mathcal{C}^2$, Dérivées Secondes

2-1 Application de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{U}$

Définition : $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$, définie sur $\mathcal{U}$, un ouvert de $\mathbb{R}^p$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$,

on dit que f est de **classe** $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{U} \Leftrightarrow$ les p applications $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_p}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$.

L'application $\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)$ est la $j^{\text{ème}}$ dérivée partielle de la $i^{\text{ème}}$ dérivée partielle se note $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$.

Il y a donc à priori p^2 dérivées partielles secondes.

2-2 Théorème de Schwarz

On admettra ce théorème important.

Théorème : f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{U} : \forall i, j \in \{1, 2, \dots, p\}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$.

On dit que pour f de classe $\mathcal{C}^2$, les dérivées partielles secondes croisées sont égales.

2-3 Formule de Taylor-Young à l'ordre 2

Théorème : f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{U}$, un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $u \in \mathcal{U}$. Alors

$$\begin{aligned} f(u + du) &= f(u) + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(u) dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(u) dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_p}(u) dx_p \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(u) dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(u) dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_p}(u) dx_p \right)^{[2]} + o(\|du\|^2) \end{aligned}$$

Avec, $^{[2]}$ qui est un pseudo-carré où, au lieu d'avoir des produits de dérivées partielles, on a des composées.

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_p} dx_p \right)^{[2]} &= \sum_{1 \leq i, j \leq p} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} dx_j dx_i \\ &= \sum_{i=1}^p \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} dx_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq p} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} dx_j dx_i \end{aligned}$$

2-4 Extrémums d'une application de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{U}$

On va d'abord chercher une condition nécessaire d'existence d'un extrémum pour une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$.

Théorème : $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$, définie sur $\mathcal{U}$, un ouvert de $\mathbb{R}^p$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$, $u \in \mathcal{U}$, u en extrémum local de f . Alors, $df_u = 0$, c'est à dire : $\frac{\partial f}{\partial x_1}(u) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(u) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_p}(u) = 0$

Une condition **nécessaire** pour que f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$, admette un extrémum est que toutes les dérivées partielles sont nulles.

Définition : Un point u de $\mathcal{U}$ tel que toutes les dérivées partielles sont nulles est un point **critique** de f .

Démonstration : Si on a un extrémum, $f(u + du) - f(u) = A$ est de signe constant pour $\|du\|$ assez petit.

C'est à dire que : $A = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(u) dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(u) dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_p}(u) dx_p \right) + o(du)$ est de signe constant.

Si la partie régulière est non nulle, pour $\|du\|$ assez petit, la quantité A donnée est du signe de cette partie régulière. Mais en changeant du en $-du$, cette partie régulière est changée en son opposé. La quantité A change donc de signe. Ce qui prouve que la partie régulière est nulle :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(u) dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(u) dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_p}(u) dx_p = 0$$

pour tous $(dx_1, dx_2, \dots, dx_p)$. Ce qui prouve que les $\frac{\partial f}{\partial x_i}(u)$ sont tous nuls. ■

Théorème : f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{U}$, un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0) \in \mathcal{U}$, un point critique de f . On pose :

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0), \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0), \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)$$

- Si $s^2 - rt < 0$ (x_0, y_0) est un extrémum (minimum pour $r > 0$, maximum pour $r < 0$)
- Si $s^2 - rt > 0$ (x_0, y_0) est un col
- Si $s^2 - rt = 0$ on ne peut pas conclure, il faut chercher le signe de $f(x, y) - f(x_0, y_0)$ au voisinage de (x_0, y_0) .

Démonstration : On utilise la formule de Taylor-Young à l'ordre 2. On note $dx = (x - x_0)$ et $dy = (y - y_0)$

$$\begin{aligned} f(x, y) - f(x_0, y_0) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2 \right) + o(dx^2 + dy^2) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2 \right) + o(dx^2 + dy^2) \\ &= \frac{1}{2} (r dx^2 + 2s dx dy + t dy^2) + o(dx^2 + dy^2) \end{aligned}$$

On pose : $\Delta = 4(s^2 - rt)$

- Si $\Delta < 0$, $(r dx^2 + 2s dx dy + t dy^2)$ ne change strictement pas de signe, donc pour (dx, dy) assez petit, $f(x, y) - f(x_0, y_0)$ ne change pas de signe. On a un bien un extrémum.
- Si $\Delta > 0$, $(r dx^2 + 2s dx dy + t dy^2)$ change strictement de signe, donc pour (dx, dy) assez petit, $f(x, y) - f(x_0, y_0)$ change de signe. On a ici un col.
- Si $\Delta = 0$, tout dépend du signe de $o(dx^2 + dy^2)$ lorsque $(r dx^2 + 2s dx dy + t dy^2)$ s'annule. Comme on ne connaît pas ce signe, on ne peut pas conclure. ■

En pratique, $z = f(x, y)$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

- On cherche les points critiques, qui vérifient :
$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases}$$
- Les extrémums sont à chercher parmi les points critiques.
- On calcule les expressions théoriques de r, s , et t .
- En chaque point critique (x_0, y_0) , on calcule
$$\begin{cases} r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \\ s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \\ t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{cases}$$
 - Si $s^2 - rt < 0$ (x_0, y_0) est un extrémum (minimum pour $r > 0$, maximum pour $r < 0$)
 - Si $s^2 - rt > 0$ (x_0, y_0) est un col
 - Si $s^2 - rt = 0$ on ne peut pas conclure, il faut chercher le signe de $f(x, y) - f(x_0, y_0)$ selon d'autres moyens.

Exemple : Cherchons sur $\mathbb{R}^2$ les extrémums de $f : (x, y) \rightarrow x^3 + y^3$

On cherche d'abord les points critiques.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 = 0 : x = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 = 0 : y = 0$$

Il n'y a qu'un seul point critique $(0, 0)$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x = 0 = r \text{ en } (0, 0), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0 = s \text{ en } (0, 0), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y = 0 = t \text{ en } (0, 0)$$

En $(0, 0)$, $s^2 - rt = 0$, le théorème ne permet pas de conclure.

Mais $f(x, y) - f(0, 0) = x^3 + y^3$ et $f(-x, -y) - f(0, 0) = -x^3 - y^3$ expression de signe opposé.

Ainsi $f(x, y) - f(0, 0)$ change de signe au voisinage du point critique : $(0, 0)$ est un point col.

On va ici donner deux exemples sous forme de surfaces où $(0, 0)$ est un point critique, on a aussi représenté la fonction nulle qui donne un plan. C'est la figure 1, page ci-contre.

Les fonction étudiées sont respectivement

- $x^2 + y^2$ où $r = 2, s = 0, t = 2, s^2 - rt = -4$
- $x^2 - y^2$ où $r = 2, s = 0, t = -2, s^2 - rt = 4$

3 Fonctions $\mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ de Classe $\mathcal{C}^k$, Dérivées d'ordre supérieur

3-1 Fonctions $\mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ de Classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^p$

Définition : $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ est de Classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^p$, avec $k \geq 1$,

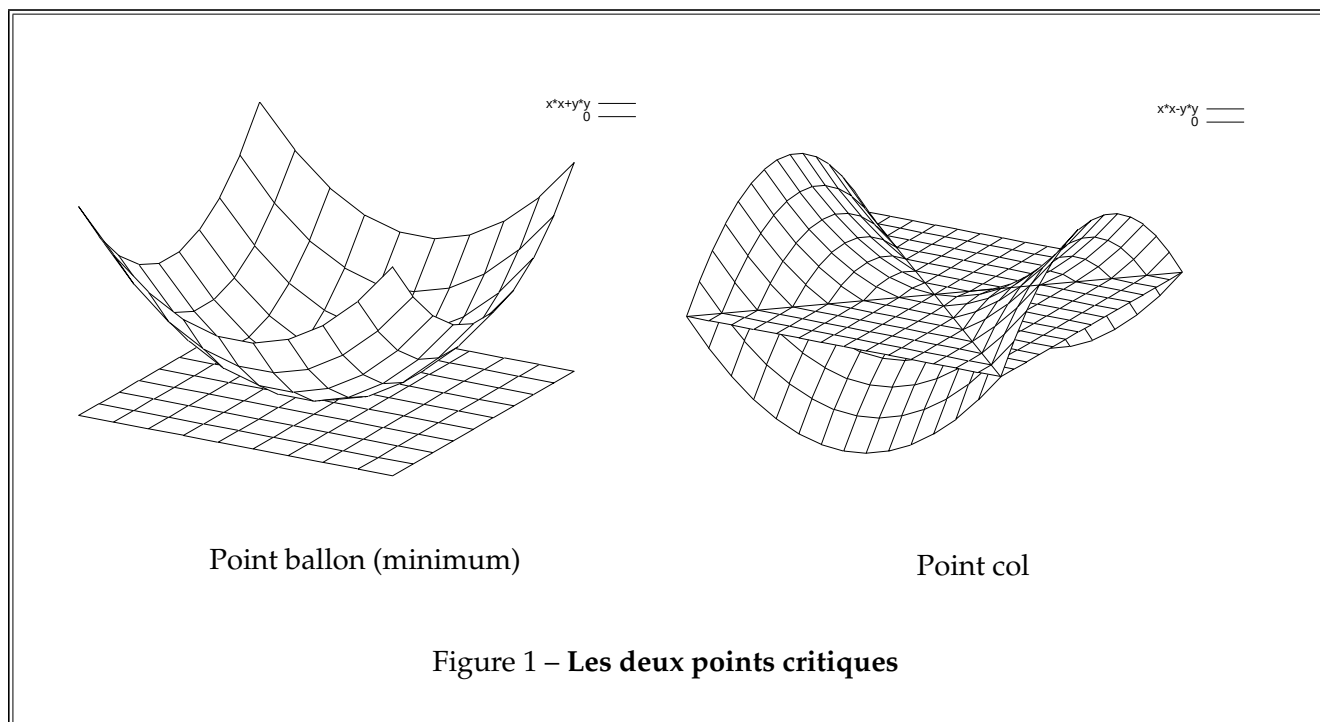
$\Leftrightarrow f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et toutes les dérivées partielles sont de classe $\mathcal{C}^{k-1}$.

Le théorème de Schwarz appliqué un certain nombre de fois permet de calculer n'importe quelle dérivée partielle en dérivant dans n'importe quel ordre, dans la limite de k dérivations.

3-2 Algèbre $\mathcal{C}^k(\mathcal{U}, \mathbb{R})$

Théorème : $\mathcal{C}^k(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ a une structure d'algèbre commutative, sous algèbre de $\mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{R})$.

Démonstration : La démonstration est élémentaire. On a clairement la stabilité par combinaison linéaire, la stabilité par produit et la présence dans $\mathcal{C}^k(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ de l'application constante 1. ■



4 Fonctions Vectorielles $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p$

4-1 Dérivée d'une fonction $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p$, classe $\mathcal{C}^k$

Définition : $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p$, définie sur I un intervalle de $\mathbb{R}$. avec : $F(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_p(x))$ qu'on notera en ligne ou en colonne selon les cas.

On dit que F est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $I \Leftrightarrow f_1, f_2, \dots, f_p$ sont de classe $\mathcal{C}^k$ sur I

On note d'ailleurs, pour $x \in I$: $F'(x) = (f'_1(x), f'_2(x), \dots, f'_p(x))$ ou simplement : $F' = (f'_1, f'_2, \dots, f'_p)$

On fait de même pour les dérivées d'ordre supérieur.

Théorème : $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R}^p)$, l'ensemble des applications de classe $\mathcal{C}^k$ définies sur I , à valeur dans $\mathbb{R}^p$, muni

- de la somme de 2 applications et
- du produit d'une application par une constante,

est un **espace vectoriel** sur $\mathbb{R}$.

Démonstration : C'est encore une fois clairement un sous espace vectoriel de $\mathcal{A}^k(I, \mathbb{R}^p)$. $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R}^p)$ est bien non vide (application nulle) et stable par combinaison linéaire.

Il suffit d'appliquer le théorème pour les applications à valeur réelle à chaque coordonnée. ■

4-2 Développement limité

Définition : On dit que F admet un développement limité à l'ordre n en x_0

$\Leftrightarrow$ chacune des p coordonnées de F admet un développement limité à l'ordre n en x_0 .

Théorème : F de classe $\mathcal{C}^k$ au voisinage de x_0 admet un développement limité d'ordre k au voisinage de x_0 . De plus, on a

$$F(x) = F(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!} F'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} F''(x_0) + \dots + \frac{(x-x_0)^k}{k!} F^{(k)}(x_0) + (x-x_0)^k \varepsilon(x-x_0)$$

avec $\varepsilon(x-x_0) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow x_0$

On notera que $F, F', \dots, F^{(k)}$ et ε sont des fonctions **vectérielles**. Cette formule s'appelle encore formule de Taylor-Young à l'ordre k .

Démonstration : F est de classe $\mathcal{C}^k$ au voisinage de x_0 , d'où chaque f_i est de classe $\mathcal{C}^k$ au voisinage de x_0 . Chaque f_i admet donc un dl_k au voisinage de x_0 et enfin F admet un dl_k au voisinage de x_0 . ■

4-3 Dérivée d'une fonction du type : $x \rightarrow \lambda(x) F(x)$

Théorème : Soit $\lambda : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $F : I \rightarrow \mathbb{R}^p$ une fonction scalaire et une fonction vectorielle de classe $\mathcal{C}^k$ sur I .

Alors $G : \begin{cases} I \rightarrow \mathbb{R}^p \\ x \mapsto \lambda(x) F(x) \end{cases}$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I .

De plus, on a la formule de Leibniz : $(\lambda F)^{(k)} = \sum_{i=0}^k \mathcal{C}_k^i \lambda^{(i)} F^{(k-i)}$ avec la convention habituelle $\lambda^{(0)} = \lambda$ et $F^{(0)} = F$.

Démonstration : On applique les théorèmes correspondants à chacune des coordonnées : $x \rightarrow \lambda(x) f_j(x)$. ■

4-4 Dérivée d'un produit scalaire, d'un produit vectoriel.

Le principe est simple, un produit scalaire, ou le produit vectoriel (dans ce cas, on est en dimension 3) se dérivent comme des produits.

Théorème : Soit $F, G : I \rightarrow \mathbb{R}^p$, deux fonctions vectorielles de classe $\mathcal{C}^k$ sur I .

Soit $s : \begin{cases} I \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto F(x) G(x) \end{cases}$ Alors s est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I .

$$s'(x) = F'(x) G(x) + F(x) G'(x)$$

$$s^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^k \mathcal{C}_k^i F^{(i)}(x) G^{(k-i)}(x)$$

Démonstration : On vérifie la formule pour s' . Ensuite, il suffit de procéder par récurrence, comme on l'a fait lors de la démonstration de la formule de Leibniz pour les fonctions à valeur réelle.

$$s(x) = f_1(x) g_1(x) + f_2(x) g_2(x) + \dots + f_p(x) g_p(x)$$

$$\begin{aligned} s'(x) &= f_1'(x) g_1(x) + f_1(x) g_1'(x) + f_2'(x) g_2(x) + f_2(x) g_2'(x) + \dots + f_p'(x) g_p(x) + f_p(x) g_p'(x) \\ &= (f_1'(x) g_1(x) + \dots + f_p'(x) g_p(x)) + (f_1(x) g_1'(x) + \dots + f_p(x) g_p'(x)) \\ &= F'(x) G(x) + F(x) G'(x) \end{aligned}$$

■

Théorème : Soit $F, G : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, deux fonctions vectorielles de classe $\mathcal{C}^k$ sur I .

Soit $V : \begin{cases} I \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ x \mapsto F(x) \wedge G(x) \end{cases}$ Alors V est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I .

$$V'(x) = F'(x) \wedge G(x) + F(x) \wedge G'(x)$$

$$V^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^k \mathcal{C}_k^i F^{(i)}(x) \wedge G^{(k-i)}(x)$$

Démonstration : On vérifie la formule pour V' . Ensuite, il suffit de procéder par récurrence.

$$\begin{aligned} V(x) &= f_1(x) \wedge g_1(x) + \cdots + f_p(x) \wedge g_p(x) \\ V'(x) &= f'_1(x) \wedge g_1(x) + f_1(x) \wedge g'_1(x) + \cdots + f'_p(x) \wedge g_p(x) + f_p(x) \wedge g'_p(x) \\ &= (f'_1(x) \wedge g_1(x) + \cdots + f'_p(x) \wedge g_p(x)) + (f_1(x) \wedge g'_1(x) + \cdots + f_p(x) \wedge g'_p(x)) \\ &= F'(x) \wedge G(x) + F(x) \wedge G'(x) \end{aligned}$$

■

En résumé, dans tous les cas, un produit se dérive comme un produit.

5 Fonction Vectorielle $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, classe $\mathcal{C}^1$

5-1 Fonction de classe $\mathcal{C}^1$

Définition : Soit $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, définie sur $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On dit que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$ $\Leftrightarrow \forall i \in \{1, 2, \dots, p\}$, $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (les applications coordonnées de F), sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$.

$$\forall j \in \{1, 2, \dots, n\} : \frac{\partial F}{\partial x_j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_j} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_j} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_j} \end{pmatrix} \text{ est aussi une fonction } \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p.$$

5-2 Différentielle d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, matrice jacobienne

Définition : Soit $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

La différentielle de F en u , notée dF_u , est l'application linéaire :

$$dF_u : \begin{cases} \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p \\ (dx_1, dx_2, \dots, dx_n) \mapsto \frac{\partial F}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial F}{\partial x_n} dx_n \end{cases}$$

Coordonnée par coordonnée, on a la différentielle de chaque f_i en u .

Définition : La **matrice jacobienne** de F en u est la matrice (dans la base canonique) de la différentielle de F en u .

Toutes les dérivées partielles étant prises en u , la matrice jacobienne de F en u est :

$$J_F(u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & \frac{\partial f_p}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

5-3 Cas où $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, Jacobien

Définition : Dans le cas où $n = p$, le déterminant de la matrice jacobienne de F en u est appelé **jacobien de F** en u .

5-4 Composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Théorème :
$$\left. \begin{array}{l} F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathcal{U} \text{ un ouvert de } \mathbb{R}^n \\ G : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p \text{ de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathcal{V} \text{ un ouvert de } \mathbb{R}^p \\ F(\mathcal{U}) \subset \mathcal{V} \end{array} \right\} : G \circ F \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathcal{U} \text{ et,}$$

$$J_{G \circ F} = J_G \times J_F$$

$$J_{G \circ F}(u) = J_G(F(u)) \times J_F(u)$$

Démonstration : On appelle $(f_1, \dots, f_m)$ et $(g_1, \dots, g_p)$ les composantes de F et de G .

On note $u = (x_1, \dots, x_n)$ et :

$$F(u) = (y_1, \dots, y_m) = (f_1(u), \dots, f_m(u)) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$$

$$G(F(u)) = \begin{pmatrix} g_1(y_1, \dots, y_m) \\ \vdots \\ g_p(y_1, \dots, y_m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)) \\ \vdots \\ g_p(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ h_p(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

Ces composantes sont clairement de classe $\mathcal{C}^1$. Pour alléger les notations, on ne précise plus en quels points on prend ces dérivées partielles. En appliquant le théorème de dérivation des fonctions composées, on a :

$$\frac{\partial h_i}{\partial x_j} = \frac{\partial g_i}{\partial y_1} \frac{\partial f_1}{\partial x_j} + \frac{\partial g_i}{\partial y_2} \frac{\partial f_2}{\partial x_j} + \dots + \frac{\partial g_i}{\partial y_m} \frac{\partial f_m}{\partial x_j} = \left(\frac{\partial g_i}{\partial y_1}, \frac{\partial g_i}{\partial y_2}, \dots, \frac{\partial g_i}{\partial y_m} \right) \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_j} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_j} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_j} \end{pmatrix}$$

On reconnaît bien sûr le produit de la $i^{\text{ème}}$ ligne de la matrice jacobienne de G par la $j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice jacobienne de F .

Ce qui est bien l'élément $i^{\text{ème}}$ ligne, $j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice jacobienne de $G \circ F$. ■

5-5 Fonction $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, classe $\mathcal{C}^1$

Théorème :
$$\left. \begin{array}{l} F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathcal{U} \text{ un ouvert de } \mathbb{R}^n \\ F : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V} \text{ bijective} \\ F^{-1} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U} \text{ de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathcal{V} \\ u \in \mathcal{U}, \text{ et } v = F(u) \end{array} \right\} : J_{F^{-1}}(v) = (J_F(u))^{-1}$$

La matrice jacobienne de F^{-1} en $v = F(u)$ est l'inverse de la matrice jacobienne de F en u .

Démonstration : On a : $F^{-1} \circ F = Id$

La matrice jacobienne de l'identité en tout point est I_n .

D'où : $J_{F^{-1}}(v) \times J_F(u) = I_n$ ce qui donne le résultat.

Ceci prouve d'ailleurs au passage que, dans ces conditions, la matrice jacobienne est inversible. ■

Corollaire : Dans les mêmes conditions, le jacobien de F^{-1} en $v = F(u)$ est l'inverse du jacobien de F en u .

Si on a $(X, Y) = F(x, y)$, le jacobien de F en (x, y) se note $\frac{D(X, Y)}{D(x, y)}$.

6 Compléments

6-1 Les mathématiciens du chapitre

Schwarz Hermann Amandus 1843-1920 Il est l'auteur du théorème qui porte son nom, et aussi du théorème de Cauchy-Schwarz. Ses travaux portent aussi sur les équations de Laplace, les fonctions harmoniques et la théorie du potentiel ...

6-2 Avec Maple

Comme il y a des vecteurs et des matrices, on a besoin du package « `linalg` ». C'est « `jacobian` » qui permet de calculer une matrice jacobienne. Si elle est carrée, son déterminant est le jacobien.

C'est « `grad` » qui permet de calculer un gradient de fonction de plusieurs variables. Celui-ci possède des options pour le calcul direct en coordonnées sphérique ou cylindriques. Je vous renvoie à l'aide Maple.

Sommaire

1	Intégrales doubles	1	2-1	Description hiérarchique de Δ	5
1-1	Description hiérarchique de Δ	1	2-2	Changement de variables	5
1-2	Intégrale double	2	2-3	Coordonnées cylindriques	6
1-3	Théorème de Fubini	2	2-4	Coordonnées sphériques	6
1-4	Un cas particulier	3	3	Calculs divers	7
1-5	Propriétés	3	3-1	Aire ou volume de Δ	7
1-6	Changement de variables	4	3-2	Masse	7
1-7	Coordonnées polaires	4	3-3	Centre d'inertie	7
			3-4	Moments d'inertie	8
2	Intégrales triples	5	4	Avec Maple	8

Figures

1	Intégrale double	2	3	Coordonnées polaires	5
2	Inversion de l'ordre des intégrations	3	4	Intégrale triple	6
			5	Coordonnées cylindriques	7
			6	Coordonnées sphériques	8

Ce chapitre est un chapitre **pratique** destiné à permettre de calculer l'intégrale

- d'une fonction continue de 2 variables sur une partie fermée bornée du plan, ou
- d'une fonction continue de 3 variables sur une partie fermée bornée de l'espace.

On ne se posera aucun problème de nature théorique et **tous les théorèmes seront admis**.

1 Intégrales doubles

1-1 Description hiérarchique d'une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^2$

Définition : On appelle description hiérarchique du domaine Δ une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^2$: l'existence de 2 réels a et b et de 2 applications continues sur $[a,b]$, notées u et v tels que $a < b$ et $\forall x \in [a,b], u(x) \leq v(x)$, avec

$$(x,y) \in \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [a,b] \\ y \in [u(x),v(x)] \end{cases}$$

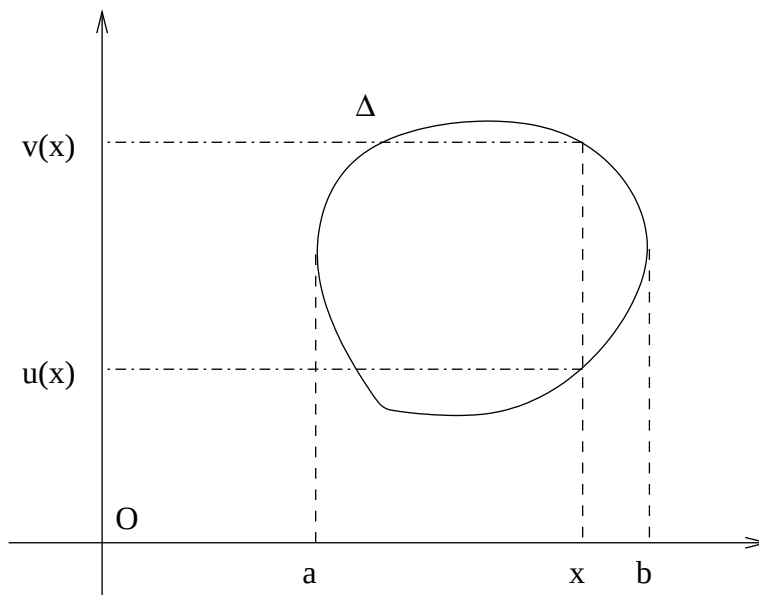
Ce qui peut s'illustrer par la figure 1, page suivante.

On fera attention à ne pas commettre l'erreur du débutant qui cherche les bornes extrêmes pour les 2 variables indépendamment les unes des autres, et transforme tous les domaines en rectangle...

Exemple : On va prendre le domaine du plan défini par : $y \geq 0, x \geq y, x \leq 1$.

Il est élémentaire de faire une figure de ce domaine, qui est un triangle.

En travaillant sur cette figure, on obtient facilement une description hiérarchique :
$$\begin{cases} x \in [0,1] \\ y \in [0,x] \end{cases}$$

Figure 1 – *Intégrale double : description hiérarchique du domaine*

1-2 Intégrale double de f continue sur Δ , un fermé borné de $\mathbb{R}^2$

Définition : f continue sur Δ , un fermé borné de $\mathbb{R}^2$, si on dispose d'une description hiérarchique de Δ , on appelle intégrale double de f sur Δ :

$$I = \iint_{\Delta} f(x,y) \, dx \, dy = \int_a^b \left(\int_{u(x)}^{v(x)} f(x,y) \, dy \right) dx$$

En un mot, on transforme cette intégrale double en 2 intégrales simples emboîtées

Exemple : On va intégrer la fonction $(x,y) \rightarrow f(x,y) = xy$ sur D : $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 1 \end{cases}$

On cherche d'abord une description hiérarchique du domaine : $\begin{cases} x \in [0,1] \\ y \in [0,1-x] \end{cases}$, ce qui donne :

$$I = \iint_D xy \, dx \, dy = \int_0^1 \int_0^{1-x} xy \, dy \, dx$$

$$I = \int_0^1 \frac{x(1-x)^2}{2} \, dx = \left[\frac{-x(1-x)^3}{6} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{(1-x)^3}{6} \, dx = \left[-\frac{(1-x)^4}{24} \right]_0^1 = \frac{1}{24}$$

1-3 Théorème de Fubini : inversion des bornes

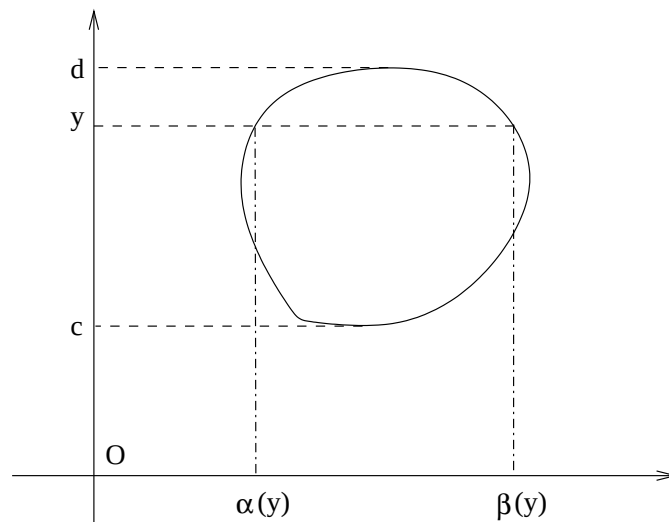
Théorème : Si on a par ailleurs : $(x,y) \in \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} y \in [c,d] \\ x \in [\alpha(y), \beta(y)] \end{cases}$ avec $c < d$ et $\forall y \in [c,d], \alpha(y) \leq \beta(y)$,

alors :

$$I = \iint_{\Delta} f(x,y) \, dx \, dy = \int_a^b \left(\int_{u(x)}^{v(x)} f(x,y) \, dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y) \, dx \right) dy$$

Ceci est illustré sur la figure 2, page suivante.

On peut changer l'ordre d'intégration, le calcul est différent, mais le résultat est le même.

Figure 2 – *Inversion de l'ordre des intégrations*

1-4 Un cas particulier

On va se placer dans un cas très particulier puisque : $(x,y) \in \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [a,b] \\ y \in [c,d] \end{cases}$

Le domaine est un rectangle. Et d'autre part : $\forall (x,y) \in \Delta, f(x,y) = \varphi(x) \psi(y)$

Alors, par linéarité des intégrales simples sur un intervalle :

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\Delta} f(x,y) \, dx \, dy = \int_a^b \left(\int_{u(x)}^{v(x)} f(x,y) \, dy \right) dx \\ &= \int_a^b \left(\int_c^d \varphi(x) \psi(y) \, dy \right) dx = \int_a^b \left(\varphi(x) \int_c^d \psi(y) \, dy \right) dx \\ &= \int_a^b \varphi(x) \left(\int_c^d \psi(y) \, dy \right) dx = \left(\int_c^d \psi(y) \, dy \right) \int_a^b \varphi(x) \, dx \\ &= \int_a^b \varphi(x) \, dx \times \int_c^d \psi(y) \, dy \end{aligned}$$

Ainsi, dans ce cas : $\iint_{\Delta} \varphi(x) \psi(y) \, dx \, dy = \int_a^b \varphi(x) \, dx \times \int_c^d \psi(y) \, dy$

1-5 Propriétés

a) Linéarité

Théorème : f, g continues sur Δ , un fermé borné de $\mathbb{R}^2$, on dispose d'une description hiérarchique de Δ . λ et μ deux réels. Alors :

$$\iint_{\Delta} \lambda f(x,y) + \mu g(x,y) \, dx \, dy = \lambda \iint_{\Delta} f(x,y) \, dx \, dy + \mu \iint_{\Delta} g(x,y) \, dx \, dy \geq 0$$

b) Positivité

Théorème : f continue, **positive**, sur Δ , un fermé borné de $\mathbb{R}^2$, on dispose d'une description hiérarchique de Δ . Alors : $\iint_{\Delta} f(x,y) \, dx \, dy \geq 0$

c) Additivité selon les domaines

Théorème : f continue, sur Δ_1 et Δ_2 , deux fermés bornés de $\mathbb{R}^2$, on dispose d'une description hiérarchique de Δ_1 et Δ_2 . De plus $\Delta_1 \cap \Delta_2$ est **au plus** une courbe. Alors :

$$\iint_{\Delta_1 \cup \Delta_2} f(x,y) \, dx \, dy = \iint_{\Delta_1} f(x,y) \, dx \, dy + \iint_{\Delta_2} f(x,y) \, dx \, dy$$

Cela permet d'exploiter d'éventuelles symétries (de la fonction et du domaine).

Théorème : Si f est continue et **positive** sur Δ , avec, de plus, $D \subset \Delta$, alors :

$$\iint_D f(x,y) \, dx \, dy \leq \iint_{\Delta} f(x,y) \, dx \, dy$$

1-6 Changement de variables

Théorème : $\varphi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ de classe $\mathcal{C}^1$, $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ deux ouverts de $\mathbb{R}^2$.

D et Δ deux fermés bornés de $\mathbb{R}^2$, $D \subset \mathcal{U}$, et $\Delta \subset \mathcal{V}$. De plus $\varphi(D) = \Delta$.

On suppose que les points de Δ qui ont plusieurs antécédants sont de surface nulle.

On note : $(x,y) = \varphi(u,v)$, $\frac{D(x,y)}{D(u,v)}$ le jacobien de φ en (u,v) , et, $\left| \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right|$ la valeur absolue du jacobien.

$$\text{Alors : } \iint_D f(x,y) \, dx \, dy = \iint_{\Delta} g(u,v) \left| \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right| \, du \, dv$$

On notera la **valeur absolue** du jacobien et la pseudo-simplification.

$$\text{On rappelle que : } \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Notons qu'on fait un changement de variable :

- pour simplifier le domaine, **ce qui est nouveau**
- ou pour simplifier le calcul des primitives emboîtées.

Notons enfin que **le domaine change** et donc **sa description hiérarchique aussi**.

1-7 Changement de variables en coordonnées polaires

Théorème : On pose $\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$ $(x,y) \in D \Leftrightarrow (\rho,\theta) \in \Delta$, et $f(x,y) = f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = g(\rho,\theta)$

$$\iint_D f(x,y) \, dx \, dy = \iint_{\Delta} g(\rho,\theta) \rho \, d\rho \, d\theta = \iint_{\Delta} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho \, d\rho \, d\theta$$

La figure 3, page ci-contre, explicite les coordonnées polaires.

$$\text{Démonstration : En effet } \frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{vmatrix} = \rho \geq 0$$

Exemple : On va intégrer la fonction $(x,y) \rightarrow f(x,y) = xy$ sur D : $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 1 \end{cases}$

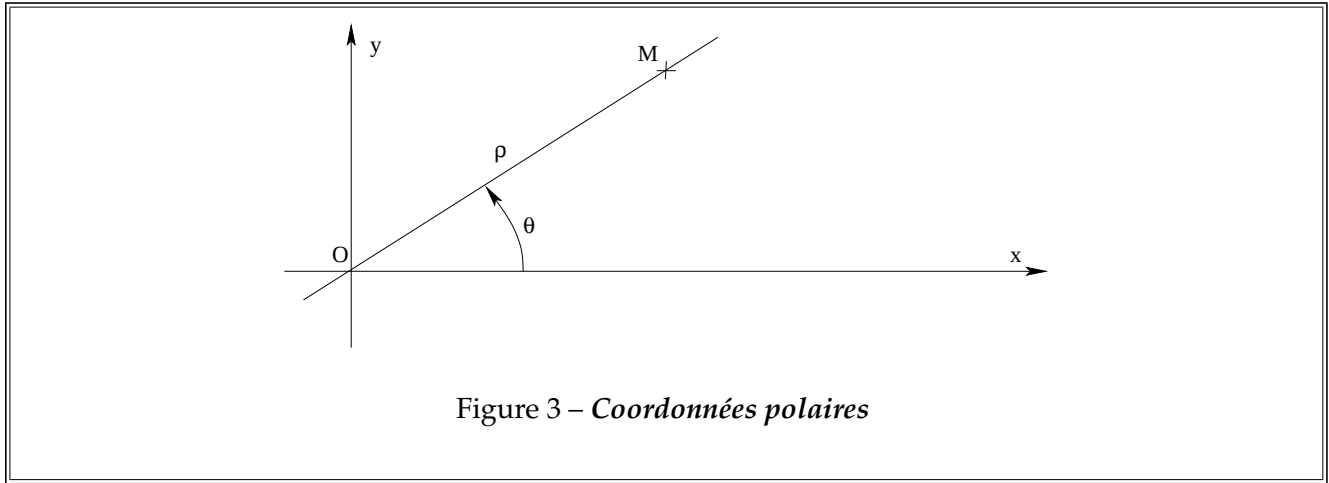


Figure 3 – Coordonnées polaires

On cherche d'abord une description hiérarchique du domaine en polaires : $\begin{cases} \theta \in [0, \pi/2] \\ \rho \in [0, 1] \end{cases}$, ce qui donne, compte tenu que $xy = \rho^2 \cos \theta \sin \theta$:

$$I = \iint_D xy \, dx \, dy = \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \rho^3 \cos \theta \sin \theta \, d\rho \, d\theta$$

$$I = \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta \, d\theta \int_0^1 \rho^3 \, d\rho = \left[\frac{\sin^2 \theta}{2} \right]_0^{\pi/2} \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{8}$$

2 Intégrales triples

2-1 Description hiérarchique de Δ , intégrale triple de f continue sur Δ un fermé borné de $\mathbb{R}^3$

Δ un fermé borné de $\mathbb{R}^3$, une description hiérarchique de Δ est de la forme :

$$(x, y, z) \in \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [a, b] \\ y \in [u(x), v(x)] \\ z \in [\alpha(x, y), \beta(x, y)] \end{cases}$$

On peut avoir les variables dans un autre ordre, l'important est que les bornes de chacune ne soient définies qu'en fonction des précédentes.

On définit alors l'intégrale triple de f continue sur Δ par :

$$\iiint_{\Delta} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_a^b \left(\int_{u(x)}^{v(x)} \left(\int_{\alpha(x, y)}^{\beta(x, y)} f(x, y, z) \, dz \right) dy \right) dx$$

La figure 4, page suivante, donne une description hiérarchique du domaine.

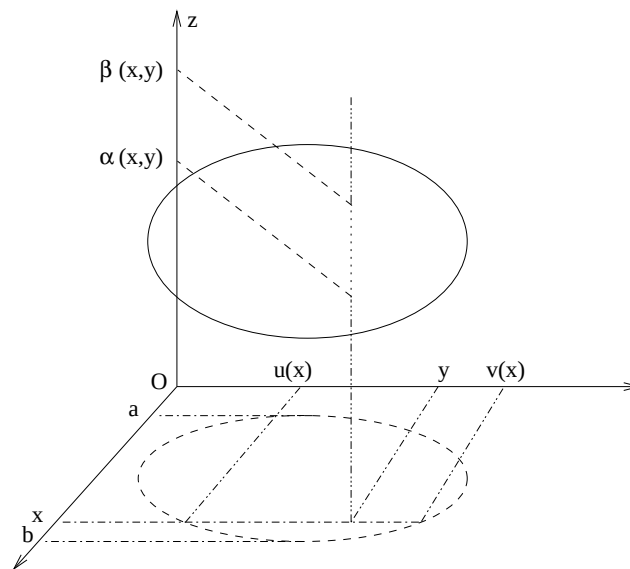
2-2 Changement de variables

Sous des hypothèses équivalentes à la dimension 2,

$(x, y, z) = \varphi(u, v, w)$, $(x, y, z) \in D \Leftrightarrow (u, v, w) \in \Delta$, et $f(x, y, z) = g(u, v, w)$, on a alors :

$$\iiint_D f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iiint_{\Delta} g(u, v, w) \left| \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} \right| du \, dv \, dw$$

On notera la **valeur absolue** du jacobien et la pseudo-simplification.

Figure 4 – *Intégrale triple : description hiérarchique du domaine*

2-3 Coordonnées cylindriques

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = z \end{cases} \quad (x, y, z) \in D \Leftrightarrow (\rho, \theta, z) \in \Delta, \text{ et } f(x, y, z) = f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z) = g(\rho, \theta, z)$$

On regardera la figure 5, page ci-contre.

$$\iiint_D f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iiint_{\Delta} g(\rho, \theta, z) \rho \, d\rho \, d\theta \, dz$$

Le calcul du jacobien est facile $\frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \theta, z)} = \rho$ et on a encore $\rho \geq 0$.

2-4 Coordonnées sphériques

On notera sur la figure la définition des coordonnées sphériques.

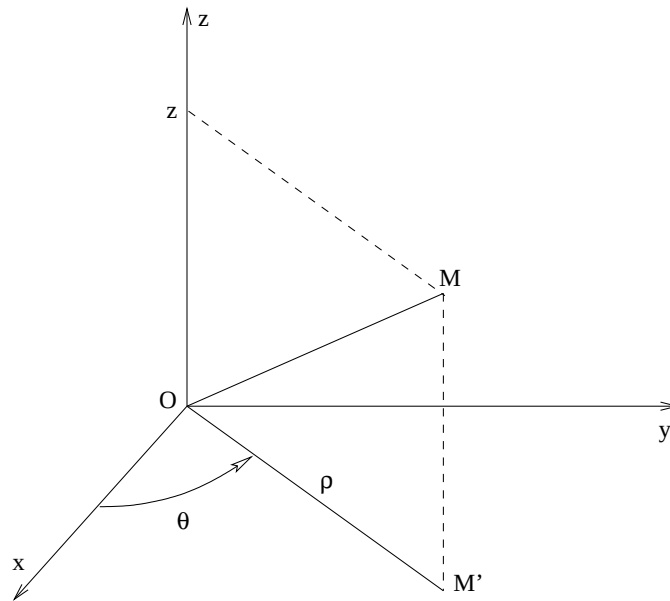
Math : Les physiciens utilisent l'angle entre Oz et OM qui appartient donc à $[0, \pi]$.
 Dans la formule, au niveau de la valeur absolue du jacobien, ils échangent ainsi $\sin \phi$ et $\cos \phi$.
 Attention, parfois, ils changent aussi le nom des angles...

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \cos \phi \\ y = \rho \sin \theta \cos \phi \\ z = \rho \sin \phi \end{cases} \quad (x, y, z) \in D \Leftrightarrow (\rho, \theta, \phi) \in \Delta, \text{ et } f(x, y, z) = g(\rho, \theta, \phi)$$

On regardera la figure 6, page 8.

$$\iiint_D f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iiint_{\Delta} g(\rho, \theta, \phi) \rho^2 \cos \phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi$$

Le calcul du jacobien est facile $\frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \theta, \phi)} = \rho^2 \cos \phi$, et on a bien $\cos \phi \geq 0$.

Figure 5 – *Coordonnées cylindriques*

3 Calculs divers

3-1 Aire ou volume de Δ

Il suffit de calculer $\iint_{\Delta} dx dy$ pour l'aire d'une partie fermée bornée du plan et $\iiint_{\Delta} dx dy dz$ pour le volume d'une partie fermée bornée de l'espace.

3-2 Masse

Si on a $\mu(x,y,z)$ la masse volumique du solide en un point donné,

$$M = \iiint_{\Delta} \mu(x,y,z) dx dy dz$$

donne la masse. Pour une plaque, on peut faire un calcul équivalent avec la densité surfacique $\sigma(x,y)$ et une intégrale double,

$$M = \iint_{\Delta} \sigma(x,y) dx dy$$

3-3 Centre d'inertie

Avec les mêmes notation, et P de coordonnées (x,y,z) on a :

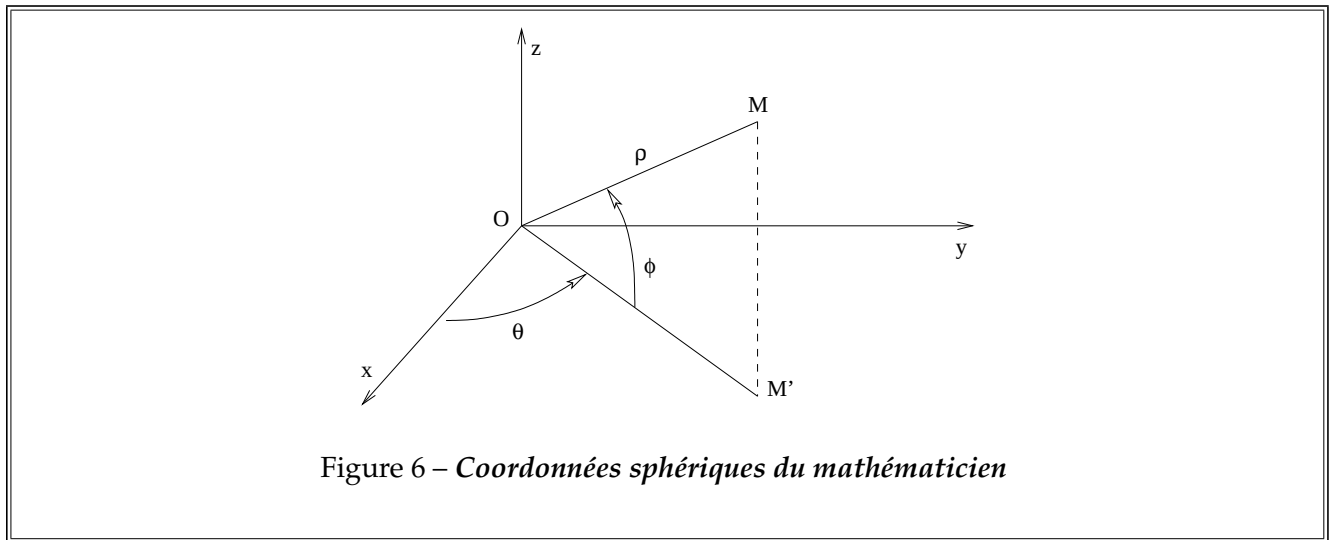
$$\vec{OG} = \frac{1}{M} \iiint_{\Delta} \vec{OP} \mu(x,y,z) dx dy dz$$

ou en densité surfacique :

$$\vec{OG} = \frac{1}{M} \iint_{\Delta} \vec{OP} \sigma(x,y) dx dy$$

Ce qui donne pour la première coordonnée par exemple :

$$x_G = \frac{1}{M} \iiint_{\Delta} x \mu(x,y,z) dx dy dz$$



ou encore, dans le cas d'une densité surfacique :

$$x_G = \frac{1}{M} \iint_{\Delta} x \sigma(x, y) dx dy$$

3-4 Moments d'inertie

Pour un solide, un moment d'inertie peut se calculer par rapport à un point, une droite ou un plan qu'on appelle dans tous les cas A .

On note $d((x, y, z), A)$ la distance du point courant à A .

Toujours avec les mêmes notations, on a :

$$J_A = \iiint_{\Delta} d((x, y, z), A)^2 \mu(x, y, z) dx dy dz$$

On peut faire, une dernière fois, le même type de calcul pour une plaque :

$$J_A = \iint_{\Delta} d((x, y), A)^2 \sigma(x, y) dx dy$$

Pour un volume, le moment d'inertie par rapport à l'axe Oz est donc :

$$J_{Oz} = \iiint_{\Delta} (x^2 + y^2) \mu(x, y, z) dx dy dz$$

4 Avec Maple

C'est le package « student » qui possède les mots clefs permettant de calculer des intégrales doubles ou triples.

Les deux commandes sont « Doubleint » et « Tripleint ». Ce sont des formes inertes, il faut leur appliquer « value » pour avoir le calcul effectif.

Pas de faux espoirs cependant, il nous faut une description hiérarchique du domaine pour que ce soit utilisable...

Sommaire

1 Etude locale d'une courbe paramétrée	2	3-7 Courbes usuelles en polaires	11
1-1 Tangente et demi-tangente en un point	2	4 Etude métrique	11
1-2 Etude locale d'une courbe plane . . .	3	4-1 Longueur d'un arc, abscisse curviligne	11
1-3 Branches infinies	5	4-2 Repère de Frenet	12
2 Courbes planes définies de façon implicite	6	4-3 Courbure	13
2-1 Lignes de niveau	6	4-4 Calcul élémentaire de la courbure . . .	13
2-2 Tangente en un point non singulier . .	6	4-5 Calcul pratique de la courbure	14
2-3 Paramétrer une ligne de niveau	6	4-6 Calcul direct des éléments de courbure	15
3 Courbes planes en polaires	6	4-7 Valeur 0 du paramètre	17
3-1 Courbes en coordonnées polaires . . .	6	5 Trajectoires orthogonales	17
3-2 Ensemble d'étude	7	5-1 Trajectoire orthogonale	17
3-3 Tangente	7	5-2 Recherche des trajectoires orthogonales	17
3-4 Branches infinies	8	6 Compléments	19
3-5 Plan d'étude	9	6-1 Avec Maple	19
3-6 Exemple	10	6-2 Les mathématiciens du chapitre	19

Figures

1 La tangente est la limite des sécantes .	2	5 Asymptote en polaires	9
2 Etude locale d'une courbe paramétrée	4	6 Exemple de courbe en polaires	10
3 Exemple de ρ négatif en polaires . . .	7	7 Repère de Frenet	12
4 Tangente en polaires	8	8 Cercle, rayon et centre de courbure . .	14
		9 Trajectoire orthogonale	18

Il existe plusieurs moyens de décrire une courbe pour l'étudier :

- Pour des courbes planes :
 - $y = f(x)$, en cartésiennes,
 - $\begin{pmatrix} x = x(t) \\ y = y(t) \end{pmatrix}$, en paramétriques,
 - $F(x, y) = 0$, en ligne de niveau,
 - et $\rho = \rho(\theta)$ en polaires.
- Pour les courbes de l'espace :
 - $\begin{pmatrix} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{pmatrix}$, en paramétriques,
 - $\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$ par intersection de surfaces.

Concernant les courbes de l'espace, les seules notions abordées dans ce chapitre sont la tangente à une courbe paramétrée et la longueur d'un arc (abscisse curviligne).

Dans le chapitre sur les surfaces, on verra aussi comment déterminer, si elle existe, la tangente à une courbe de l'espace définie par intersection de surfaces.

Pour le reste, toutes les courbes étudiées sont planes. Ce chapitre complète ce que vous avez déjà pu apprendre sur le sujet.

Dans tout le chapitre, on travaille dans le plan ou l'espace euclidien habituel muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ou $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ selon les cas.

En l'absence de mention contraire, les coordonnées d'un point sont prises dans ce repère.

1 Etude locale d'une courbe paramétrée

1-1 Tangente et demi-tangente en un point

La courbe C est l'ensemble des points M ou $M(t)$ tels que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{F}(t)$ de coordonnées $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$

selon les cas, $t \in I$, un intervalle de $\mathbb{R}$.

Sur cet intervalle, on suppose au minimum que $\overrightarrow{F}$ est continue.

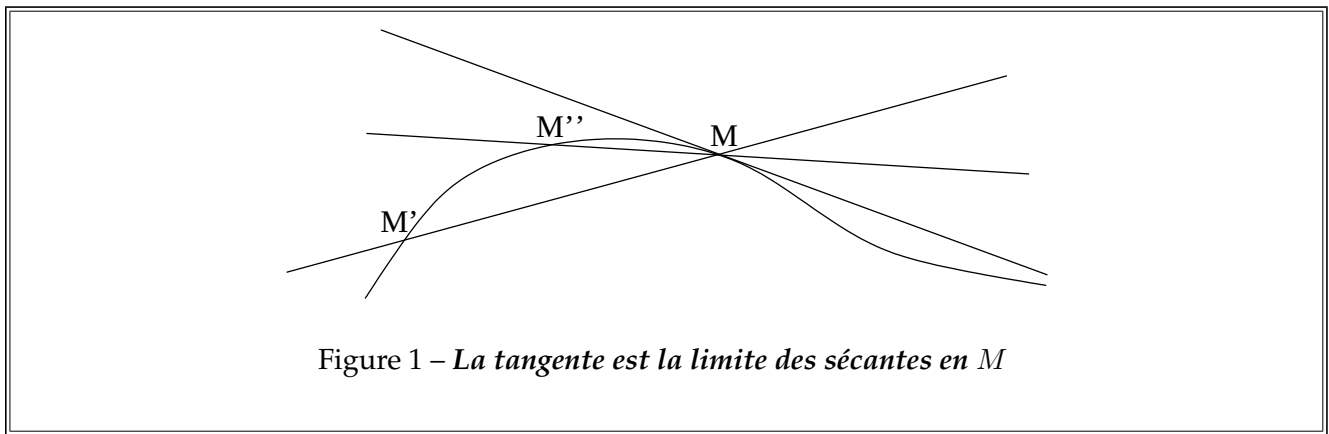
Définition : $M_0(t_0) \in C$, on dit que C **admet une tangente** en M_0

$\Leftrightarrow$ la droite (M_0M) , avec $M = M(t)$, a une limite quand $M \rightarrow M_0$, c'est à dire quand $t \rightarrow t_0$.

Cette droite est alors la **tangente** à C en M_0 .

On parlera éventuellement de demi-tangente si on a une limite à droite ou une limite à gauche.

Voir la figure 1, ci-dessous.



Comme il y a, selon son orientation, deux vecteurs unitaires qui dirigent une droite, cela revient à ce que le vecteur unitaire $\pm \frac{\overrightarrow{M_0M}}{\|\overrightarrow{M_0M}\|}$ admet une limite quand $M \rightarrow M_0$.

La tangente est alors la droite passant par M_0 et dirigée par ce vecteur.

Définition : Un point $M_0(t_0) \in C$ est **régulier** $\Leftrightarrow \overrightarrow{F}'(t_0) \neq \vec{0}$.

Définition : Un point non régulier est un point stationnaire.

Théorème : En un point $M_0(t_0)$ régulier, la courbe C admet une tangente dirigée par $\overrightarrow{F}'(t_0)$.

Démonstration : On fait la démonstration pour une courbe plane, c'est exactement la même pour une courbe paramétrée de l'espace. $\frac{\overrightarrow{M_0M}}{\|\overrightarrow{M_0M}\|}$ a pour coordonnées :

$$\frac{1}{\|\overrightarrow{M_0M}\|} \begin{pmatrix} x(t) - x(t_0) \\ y(t) - y(t_0) \end{pmatrix} = \frac{t - t_0}{\|\overrightarrow{M_0M}\|} \begin{pmatrix} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} \\ \frac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0} \end{pmatrix}$$

Or

$$\begin{aligned}\frac{t-t_0}{\|\overrightarrow{M_0M}\|} &= \frac{t-t_0}{\sqrt{(x(t)-x(t_0))^2 + (y(t)-y(t_0))^2}} \\ &= \frac{\pm 1}{\sqrt{\left(\frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0}\right)^2 + \left(\frac{y(t)-y(t_0)}{t-t_0}\right)^2}} \\ \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{t-t_0}{\|\overrightarrow{M_0M}\|} &= \frac{\pm 1}{\sqrt{x'(t_0)^2 + y'(t_0)^2}} \\ \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{1}{\|\overrightarrow{M_0M}\|} \begin{pmatrix} x(t)-x(t_0) \\ y(t)-y(t_0) \end{pmatrix} &= \frac{\pm 1}{\sqrt{x'(t_0)^2 + y'(t_0)^2}} \begin{pmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Ce qui assure le résultat. ■

Théorème : $M_0(t_0)$ un point stationnaire de C , si $\overrightarrow{F}$ est de classe suffisante au voisinage de t_0 , pour qu'il existe un vecteur dérivé non nul $\overrightarrow{F^{(p)}}(t_0)$.

Alors, C admet en M_0 une tangente ou des demi-tangentes. Elles sont portées par ce premier vecteur dérivé non nul $\overrightarrow{F^{(p)}}(t_0)$. On note habituellement p l'ordre de dérivation de ce vecteur.

Démonstration : On travaille ici exactement de la même façon dans le plan ou dans l'espace. On fait un développement limité de $\overrightarrow{F}$ à l'ordre p , en tenant compte du fait que les dérivées aux ordres inférieurs à p sont nulles :

$$\overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{F(t)} - \overrightarrow{F(t_0)} = \frac{(t-t_0)^p}{p!} \overrightarrow{F^{(p)}}(t_0) + (t-t_0)^p \varepsilon(t-t_0)$$

Ce qui permet d'avoir le résultat annoncé en calculant la limite de $\frac{\overrightarrow{M_0M}}{\|\overrightarrow{M_0M}\|}$. ■

1-2 Etude locale d'une courbe plane paramétrée

On appelle encore p le rang de dérivation du premier vecteur dérivé non nul, $\overrightarrow{F^{(p)}}(t_0) \neq \vec{0}$, et q le rang du premier vecteur dérivé non colinéaire à $\overrightarrow{F^{(p)}}(t_0)$, sous réserve bien sûr que $\overrightarrow{F}$ soit de classe suffisante. $\left(\overrightarrow{F^{(p)}}(t_0), \overrightarrow{F^{(q)}}(t_0)\right)$ est ainsi une famille libre.

Définition : On dit que M_0 est **birégulier** $\Leftrightarrow \begin{cases} p = 1 \\ q = 2 \end{cases}$

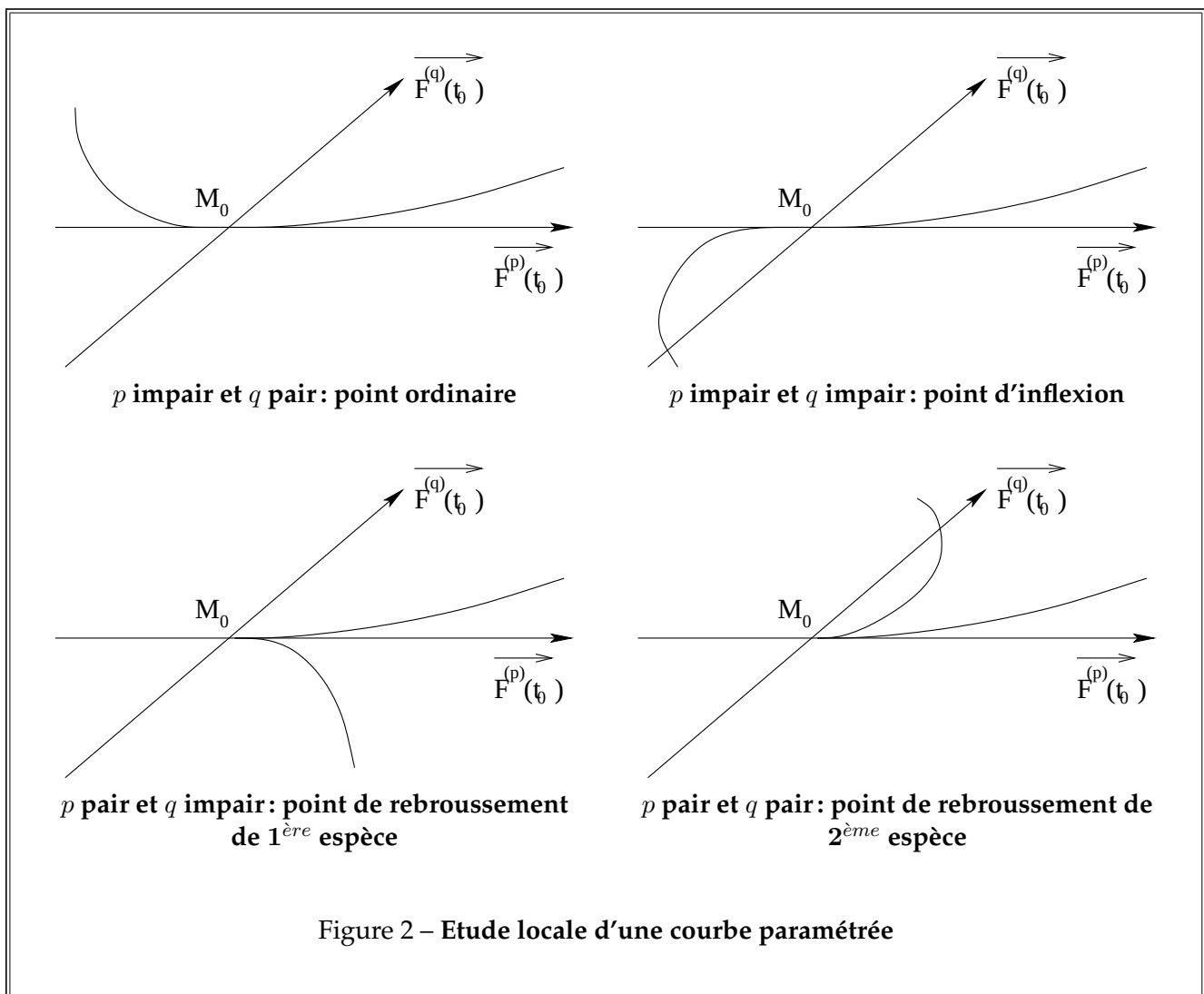
Dans tous les cas, on obtient l'allure locale de la courbe en faisant un développement limité à l'ordre q de $\overrightarrow{F}$.

$$\overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{F(t)} - \overrightarrow{F(t_0)} = \frac{(t-t_0)^p}{p!} (1 + o(t-t_0)) \overrightarrow{F^{(p)}}(t_0) + \frac{(t-t_0)^q}{q!} \overrightarrow{F^{(q)}}(t_0) + (t-t_0)^q \varepsilon(t-t_0)$$

Dans la base $\left(\overrightarrow{F^{(p)}}(t_0), \overrightarrow{F^{(q)}}(t_0)\right)$, les coordonnées de $\overrightarrow{M_0M}$ sont équivalentes à $\frac{(t-t_0)^p}{p!}$ et $\frac{(t-t_0)^q}{q!}$ quand $t \rightarrow t_0$.

On travaille donc dans le repère $\left(M_0, \overrightarrow{F^{(p)}}(t_0), \overrightarrow{F^{(q)}}(t_0)\right)$, tout se décide alors suivant la parité de p et q .

La courbe est toujours tangente à $\overrightarrow{F^{(p)}}(t_0)$, la parité de p donne le signe de la coordonnée lorsque $t < t_0$, la parité de q donne dans ce cas le signe de la deuxième coordonnée. Dans les figures suivantes, le repère tracé est : $\left(M_0, \overrightarrow{F^{(p)}}(t_0), \overrightarrow{F^{(q)}}(t_0)\right)$.



On peut voir sur la figure 2, ci-dessous, l'ensemble des cas.

En un point birégulier, la concavité est tournée vers $\overrightarrow{F''(t_0)}$.

$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y'(t)}{x'(t)}$ quand elle existe, est toujours la pente de la tangente à la courbe au point considéré.

Quand la pente de la tangente, donnée par $\overrightarrow{F^{(p)}(t_0)}$ ou par $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y'(t)}{x'(t)}$ est nulle ou infinie, c'est à dire quand la tangente horizontale ou verticale, la recherche de q est inutile puisque les variations de $x(t)$ et $y(t)$ permettent alors de déterminer le type de point.

Un point d'inflexion géométrique vérifie toujours $\begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix} = 0$. A la demande de l'énoncé, on recherchera les point d'inflexion parmi ceux qui ont cette propriété.

Exemple : On va faire l'étude locale de l'arc paramétré : $\begin{cases} x(t) = 2t + t^2 \\ y(t) = 2t - \frac{1}{t^2} \end{cases}$ en $t = -1$.

On a : $\begin{cases} x'(t) = 2 + 2t \\ y'(t) = 2 + \frac{2}{t^3} \end{cases}$ ce qui donne : $\begin{cases} x(-1) = -1 \\ y(-1) = -3 \end{cases}$ et : $\begin{cases} x'(-1) = 0 \\ y'(-1) = 0 \end{cases}$,

- $\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ est donc un point stationnaire.

De plus : $\begin{cases} x''(t) = 2 \\ y''(t) = -\frac{6}{t^4} \end{cases}$ ce qui donne : $\begin{cases} x''(-1) = 2 \\ y''(-1) = -6 \end{cases}$.

- La tangente est dirigée selon : $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $p = 2$.

Enfin, : $\begin{cases} x'''(t) = 0 \\ y'''(t) = \frac{24}{t^5} \end{cases}$ ce qui donne : $\begin{cases} x'''(-1) = 0 \\ y'''(-1) = -24 \end{cases}$.

- Ce qui donne $q = 3$ et on a un point de rebroussement de première espèce.

1-3 Branches infinies d'une courbe plane paramétrée

On dit que C admet une branche infinie quand $x(t)$ ou $y(t)$ tendent vers $\pm\infty$ en t_0 ou $\pm\infty$. Une hyperbole a ainsi 4 branches infinies.

- 1) $y(t) \rightarrow \pm\infty$ et $x(t) \rightarrow l$ quand $t \rightarrow t_0$: on a une asymptote verticale d'équation $x = l$
- 2) $x(t) \rightarrow \pm\infty$ et $y(t) \rightarrow l$ quand $t \rightarrow t_0$: on a une asymptote horizontale d'équation $y = l$
- 3) $x(t)$ et $y(t) \rightarrow \pm\infty$ quand $t \rightarrow t_0$ on calcule $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y(t)}{x(t)}$ appelée a si elle existe,

- a) si il n'y a pas de limite, on ne dit rien de plus.
- b) $a = \pm\infty$ on a une branche parabolique de direction Oy .
- c) $a = 0$ on a une branche parabolique de direction Ox .
- d) dans les autres cas, on calcule $\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) - ax(t)$ appelée b ,

- si il n'y a pas de limite, on a une branche infinie de direction asymptotique $y = ax$.
- $b = \pm\infty$ on a une branche parabolique de direction $y = ax$.
- dans les autres cas, on a une asymptote $y = ax + b$, de plus :
 - si $y(t) - ax(t) - b > 0$, la courbe est au dessus de l'asymptote,
 - si $y(t) - ax(t) - b < 0$, la courbe est au dessous de l'asymptote.

Exemple : On va faire l'étude locale de l'arc paramétré : $\begin{cases} x(t) = t^2 + \frac{2}{t} \\ y(t) = t + \frac{1}{t} \end{cases}$ en $t = 0^+$.

$x(t)$ et $y(t)$ tendent tous deux vers $+\infty$ en 0^+ , on a une branche infinie.

$$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{t + \frac{1}{t}}{t^2 + \frac{2}{t}} = \frac{t^2 + 1}{t^3 + 2} \xrightarrow{0^+} \frac{1}{2}, \text{ et donc } y = \frac{1}{2}x \text{ est direction asymptotique.}$$

$$y(t) - \frac{1}{2}x(t) = t - \frac{1}{2}t^2 \xrightarrow{0^+} 0^+, \text{ et donc la droite } y = \frac{1}{2}x \text{ est asymptote à la courbe en } t = 0^+.$$

La courbe est donc au dessus de son asymptote.

Exemple : On va faire l'étude locale de l'arc paramétré : $\begin{cases} x(t) = 2t + t^2 \\ y(t) = 2t - \frac{1}{t^2} \end{cases}$ quand $t \rightarrow +\infty$.

$x(t)$ et $y(t)$ tendent tous deux vers $+\infty$ en $+\infty$, on a une branche infinie.

$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{2t - \frac{1}{t^2}}{2t + t^2} = \frac{2t^3 - 1}{2t^3 + t^4} \xrightarrow{+\infty} 0$. Quand $t \rightarrow +\infty$, on a une branche parabolique de direction Ox .

2 Courbes planes définies de façon implicite, Lignes de niveau

2-1 Lignes de niveau

Définition : $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$. La courbe C d'équation $F(x, y) = \lambda$ est l'ensemble des points de $\mathcal{U}$ dont les coordonnées vérifient cette équation. C'est la ligne de niveau de F de hauteur λ .

Définition : Soit $M_0(x_0, y_0)$, un point de C d'équation $F(x, y) = \lambda$.

$$M_0 \text{ est singulier} \Leftrightarrow \overrightarrow{\text{Grad}_F(M_0)} = \vec{0}$$

2-2 Tangente en un point non singulier

Théorème : Soit $M_0(x_0, y_0)$, un point de C d'équation $F(x, y) = \lambda$, M_0 non singulier.

Alors C admet une tangente en M_0 , normale à $\overrightarrow{\text{Grad}_F(M_0)}$. Elle est donc d'équation :

$$(x - x_0) \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

En un point singulier, il est possible que C ait une tangente comme il est possible qu'elle n'en ait pas.

Démonstration : On admet que C puisse être paramétrée par t de telle façon que M_0 soit un point régulier correspondant à t_0 .

Alors $\forall t \in I$, $f(t) = F(x(t), y(t)) = \lambda$, et f est de classe $\mathcal{C}^1$. On dérive, $f'(t_0) = 0$ entraîne

$$x'(t_0) \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) + y'(t_0) \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

Ce qui prouve que le gradient est normal à la tangente. ■

Exemple : On va chercher l'équation de la tangente au point $(1, 1)$ à l'ellipse d'équation $4x^2 + y^2 = 5$.

En $(1, 1)$, le gradient est $(8, 2)$, un vecteur normal à la courbe est donc : $(4, 1)$.

La tangente a donc une équation de la forme $4x + y = k$, et comme elle passe par $(1, 1)$, la tangente est d'équation : $4x + y = 5$.

2-3 Paramétrer une ligne de niveau

Comme il est plus facile de tracer une courbe paramétrée qu'une ligne de niveau, on cherche souvent à paramétrer celles-ci.

Les deux moyens habituels sont :

- 1) Poser : $y = tx$, résoudre : $f(x, tx) = 0$ en x , et on a alors la courbe paramétrée par t .
- 2) Passer en polaire et résoudre : $f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = 0$ en ρ . On a alors la courbe de façon usuelle en polaires.

3 Courbes planes en polaires

3-1 Courbes en coordonnées polaires

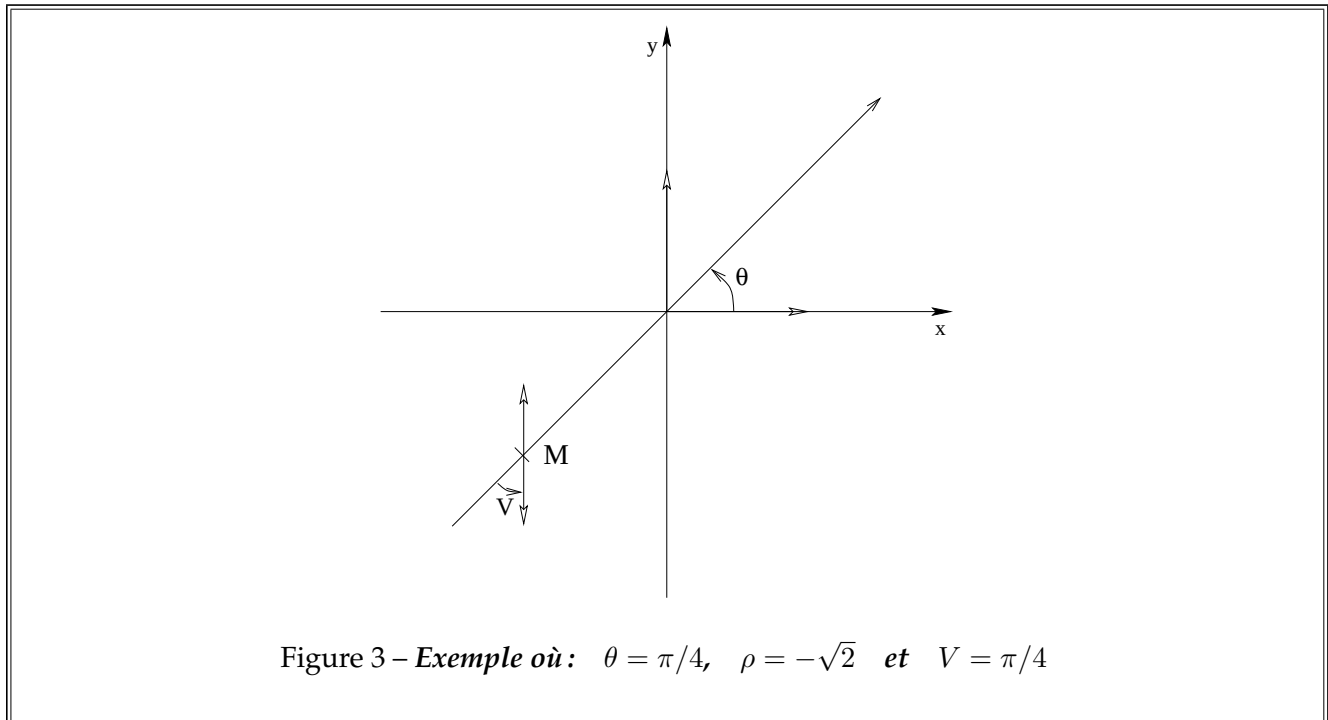
Définition : C la courbe définie en coordonnées polaires par $\rho = f(\theta) = \rho(\theta)$, $\theta \in I$,

est l'ensemble des points M dont les coordonnées vérifient $\begin{cases} x = \rho(\theta) \cos \theta \\ y = \rho(\theta) \sin \theta \end{cases}$ avec $\theta \in I$.

On prendra toujours l'application ρ au moins de classe $\mathcal{C}^1$ sur I .

Contrairement à ce qui se passe quand on prend des coordonnées polaires dans les intégrales doubles, cylindriques ou sphériques dans les intégrales triples, **on admet ici que ρ puisse être négatif.**

La figure 3, ci-dessous, montre un exemple de ρ négatif.



3-2 Ensemble d'étude

En général, ρ est T -périodique. On cherche l'ensemble de définition, la périodicité, un premier ensemble d'étude : celui-ci doit être un multiple de la période et de 2π .

On recherche d'éventuelles symétries pour réduire l'ensemble d'étude.

On regarde en fait comment change ρ quand on change θ , ce qui est résumé dans le tableau suivant :

θ	ρ	C admet
θ en $-\theta$	ρ en ρ	une symétrie / Ox
θ en $-\theta$	ρ en $-\rho$	une symétrie / Oy
θ en $\pi - \theta$	ρ en ρ	une symétrie / Oy
θ en $\pi - \theta$	ρ en $-\rho$	une symétrie / Ox
θ en $\pi + \theta$	ρ en ρ	une symétrie / O
θ en $\pi + \theta$	ρ en $-\rho$	uniquement des points doubles

Dans chaque cas, on peut réduire l'intervalle d'étude.

3-3 Tangente

Théorème : C la courbe définie en coordonnées polaires par $\rho = \rho(\theta)$ avec ρ de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de θ_0 . Alors C admet une tangente en $M_0(\theta_0)$ définie par

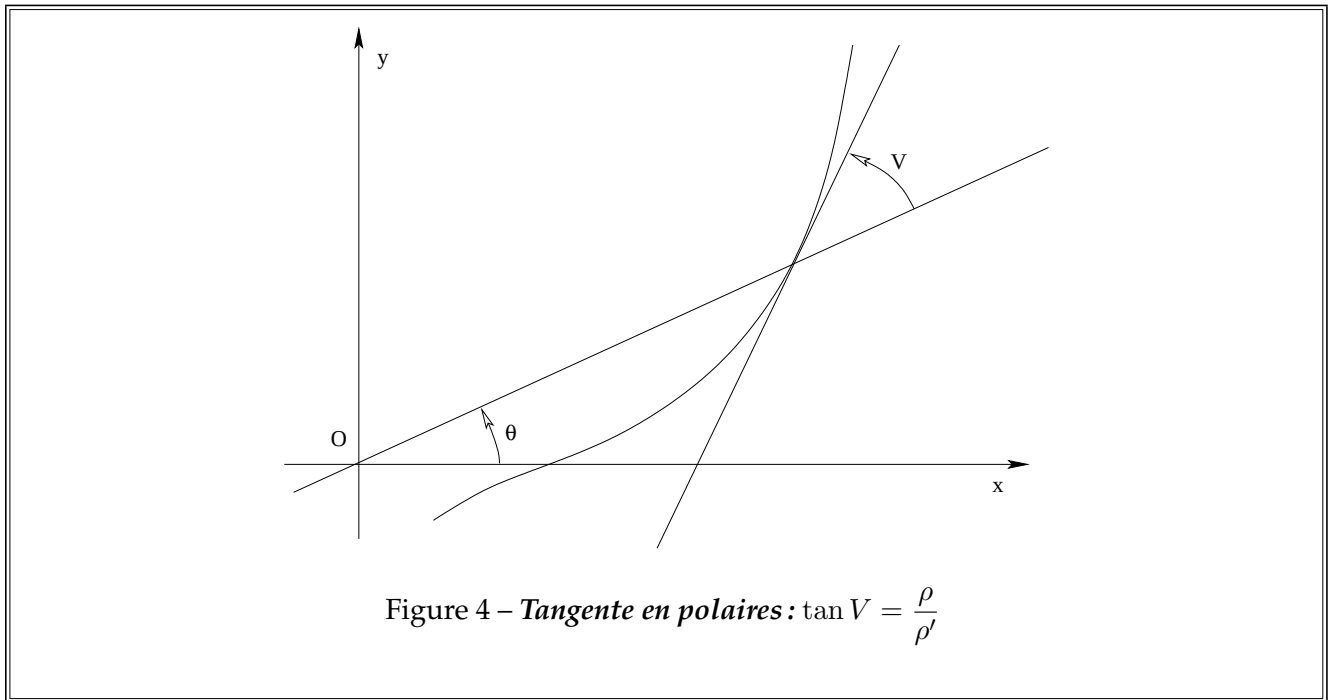
$$\tan V = \frac{\rho}{\rho'}$$

avec V l'angle, orienté, entre le rayon vecteur et la tangente. En un point où $\rho(\theta_0) = 0$, la tangente à la courbe est la droite $\theta = \theta_0$.

Corollaire : Si de plus, $\rho(\theta_0) = 0$, alors $V = 0$

Conclusion : Dans tous les cas, l'équation de la tangente dans le repère local $(M_0, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ est : $Y = \tan V X$

Ceci est illustré par la figure 3, déjà vue, et la figure 4, ci-dessous.



Démonstration : On utilise ici les notations des physiciens $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$.

$$\overrightarrow{OM} = \rho(\theta) \vec{u}_r$$

et donc comme la dérivée de $\vec{u}_r$ par rapport à θ est $\vec{u}_\theta$

$$\frac{d\vec{M}}{d\theta} = \rho'(\theta) \vec{u}_r + \rho(\theta) \vec{u}_\theta$$

En écrivant cette égalité en θ_0 , on obtient que $\tan V = \frac{\rho(\theta_0)}{\rho'(\theta_0)}$, avec V l'angle, orienté, entre le rayon vecteur et la tangente.

Si $\rho(\theta_0) = 0$, la pente de $\overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{OM}$ est $\frac{y}{x} = \frac{\rho(\theta) \sin \theta}{\rho(\theta) \cos \theta}$ qui tend bien vers $\tan \theta_0$ ■

3-4 Branches infinies

On a une branche infinie quand $\lim_{\theta \rightarrow \theta_0} \rho(\theta)$ est infini.

On remarque que $\begin{cases} \rho(\theta) \cos(\theta - \theta_0) = X \\ \rho(\theta) \sin(\theta - \theta_0) = Y \end{cases}$ dans le repère tourné de θ_0 .

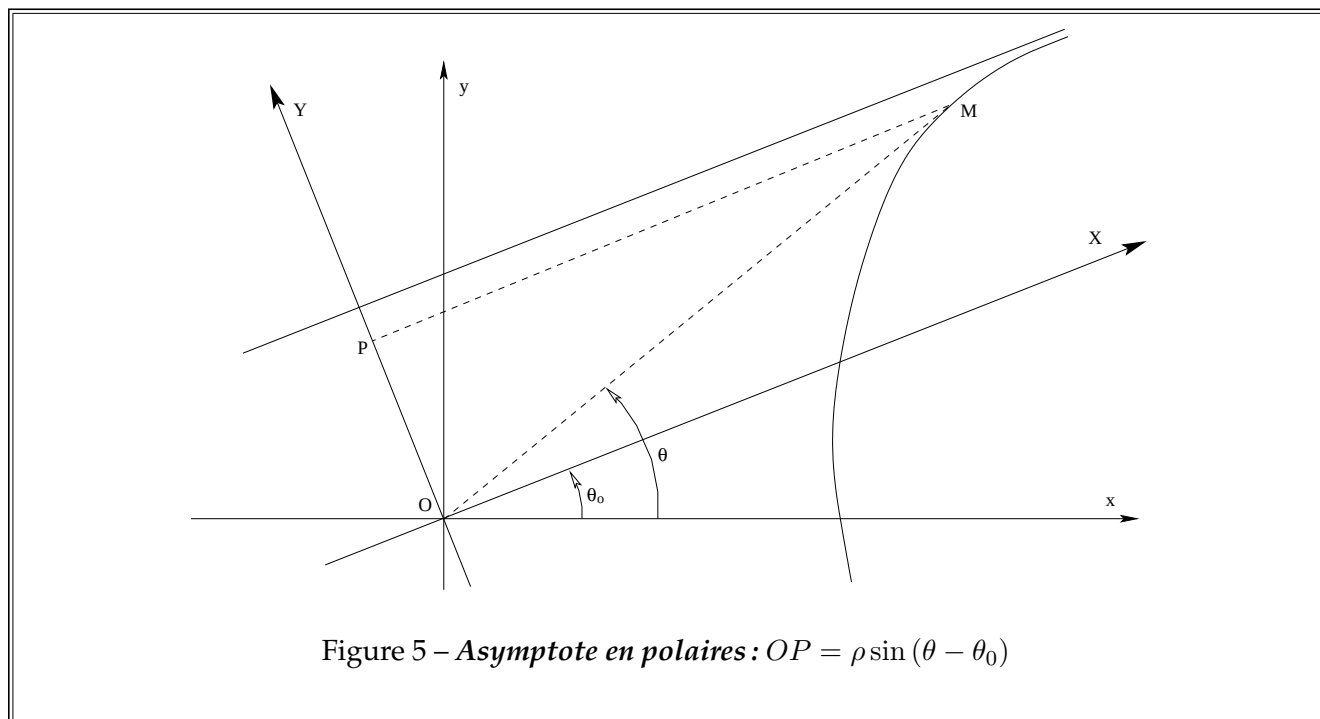
Dans tous les cas, quand $\theta \rightarrow \theta_0$ $\begin{cases} X \rightarrow \infty \\ \frac{Y}{X} \rightarrow 0 \end{cases}$ La direction asymptotiques est donc toujours OX .

Pour l'étude des branches infinies, on cherche donc : $\lim_{\theta \rightarrow \theta_0} Y = \lim_{\theta \rightarrow \theta_0} \rho(\theta) \sin(\theta - \theta_0)$.

- s'il n'y a pas de limite, on a une branche infinie de direction asymptotique OX .
- cette limite est infinie, on a une branche parabolique de direction OX .

- cette limite est finie Y_0 , on a une asymptote d'équation $Y = Y_0$. Comme $X \sim \rho$, on sait de quel côté de l'asymptote on est, puisqu'on a pris soin de tracer le repère local.

Ceci est illustré par la figure 5, ci-dessous, avec : $Y = \overline{OP}$



Exemple : On va étudier la branche infinie de la courbe d'équation $\rho = \frac{2 \cos \theta + 1}{2 \sin \theta - 1}$ en $\theta = \frac{\pi}{6}$.

$$Y = \rho \sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{2 \cos \theta + 1}{2 \left(\sin \theta - \sin \frac{\pi}{6}\right)} \sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{2(2 \cos \theta + 1) \sin\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{12}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{12}\right)}{4 \sin\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{12}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{12}\right)}$$

$$Y = \frac{(2 \cos \theta + 1) \cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{12}\right)}{2 \cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{12}\right)} \xrightarrow{\frac{\pi}{6}} \frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$$

On a donc une asymptote d'équation $Y = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$ dans le repère XOY tourné de $\frac{\pi}{6}$ par rapport à xOy .

3-5 Plan d'étude

On a ici 2 originalités :

- On ne fait l'étude des variations de ρ par le signe de ρ' que **si cette étude est simple** ! On peut très bien s'en passer pour tracer la courbe ! Cependant, le calcul de ρ' reste nécessaire pour déterminer la tangente en des points particuliers.
- Par contre, on fait l'étude **indispensable** du signe de ρ , qui figure dans le tableau de « variations » et permet de déterminer dans quel cadran on trace la courbe.

On a donc :

- 1) Ensemble de définition, période, symétries, ensemble d'étude.
- 2) Tableau de « variations », θ , $\rho(\theta)$, signe de ρ , éventuellement ρ' , $\tan V = \frac{\rho}{\rho'}$.
- 3) Branches infinies.
- 4) Points essentiels et leurs tangentes.
- 5) Tracé de la courbe.

3-6 Exemple

On va étudier la courbe d'équation $\rho(\theta) = 1 - \cos \theta$ en coordonnées polaires.

$\rho(\theta)$ est définie sur $\mathbb{R}$, 2π périodique et paire. On va donc étudier la fonction sur $[0, \pi]$ et il faudra compléter la courbe par une symétrie par rapport à Ox .

On a $\rho' = \sin \theta$ qui permet d'avoir le tableau de variation :

θ	0	π
ρ'	0	+ 0
signe de ρ	+	
ρ	0	$\nearrow$ 2
$\tan V$	0	∞

$\tan V = \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} = \tan \frac{\theta}{2}$, on a facilement la tangente en $\theta = \pi$, $\rho = 2$ et $\tan V$ est infini et donc $V = \frac{\pi}{2}$,
 en $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\rho = 1$ et $\tan V = 1$ et donc $V = \frac{\pi}{4}$.

Il n'y a pas de branche infinie, il ne reste qu'à tracer la courbe.

Ceci est illustré par la figure 6, ci-dessous.

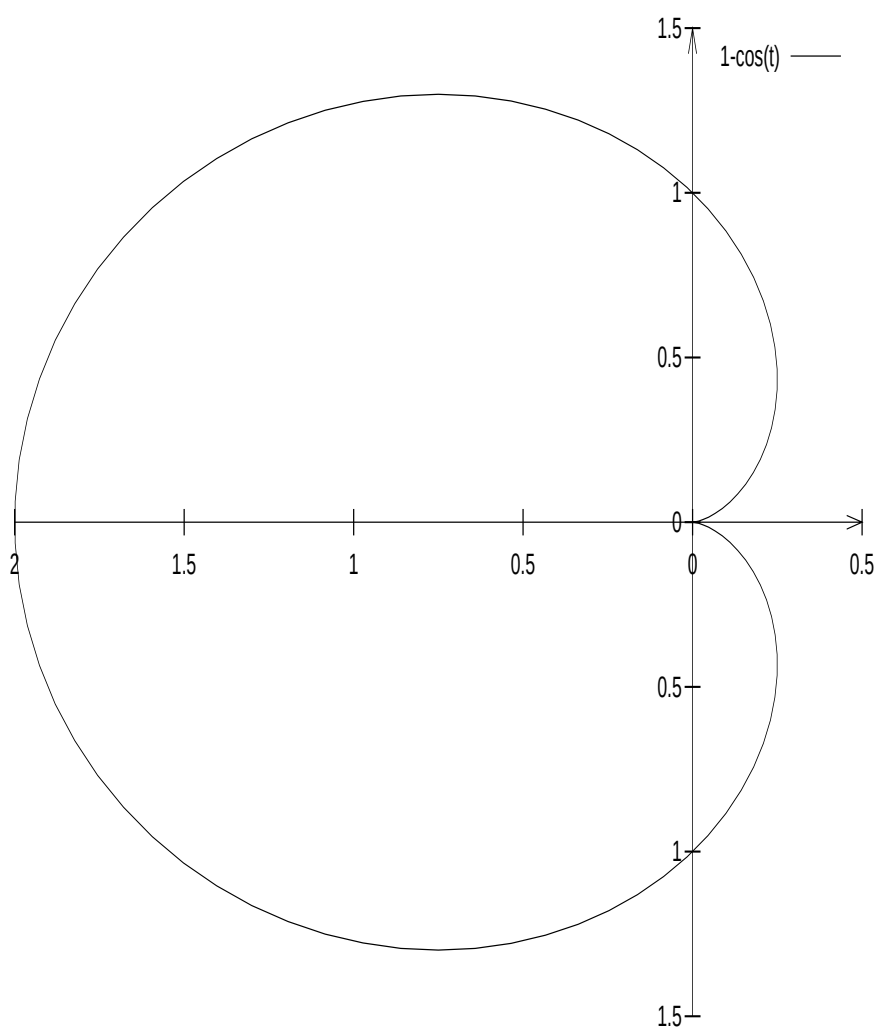


Figure 6 – Tracé en polaires : $\rho = 1 - \cos \theta$

3-7 Courbes usuelles en polaires

- On a les coniques d'équation $\rho = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$.
 p est le paramètre de la conique, c'est à dire la distance du foyer à la directrice,
et e est l'excentricité de la conique.
 - $e < 1$, correspond à une ellipse.
 - $e = 1$, une parabole.
 - $e > 1$, une hyperbole.

On montre ceci facilement en repassant en cartésiennes :

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{p}{1 + e \cos \theta} \\ \rho + e \rho \cos \theta &= p \\ \rho &= p - e x \\ x^2 + y^2 &= (p - e x)^2 \\ (1 - e^2) x^2 + y^2 + 2 e p x &= p^2\end{aligned}$$

qui est bien l'équation de la conique précisée selon les cas.

- $\rho = \frac{d}{\cos(\theta - \theta_0)}$ est une droite Δ , à la distance d de O , normale à la droite $\theta = \theta_0$.
On a $X = d$ dans le repère tourné de θ_0
- $\rho = A \cos(\theta - \theta_0)$ est le cercle passant par O de diamètre A et de centre sur la droite $\theta = \theta_0$.
Ce qui se montre facilement, on a ici, dans le repère tourné de θ_0 :

$$\begin{aligned}\rho^2 &= A \rho \cos(\theta - \theta_0) \\ X^2 + Y^2 &= A X \\ \left(X - \frac{A}{2}\right)^2 + Y^2 &= \frac{A^2}{4}\end{aligned}$$

4 Etude métrique des courbes planes paramétrées

4-1 Longueur d'un arc, abscisse curviligne

Ce paragraphe est applicable aux courbes paramétrées de l'espace.

Définition : Soit C un arc paramétré du plan, ou de l'espace, tel que :

$M(t)$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ avec x, y, z de classe $\mathcal{C}^1$ sur I un intervalle de $\mathbb{R}$.

La **longueur** de C entre $M(a)$ et $M(b)$ est selon les cas :

$$\begin{aligned}L(C) &= \int_a^b \|\overrightarrow{M'(t)}\| dt = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt \\ L(C) &= \int_a^b \|\overrightarrow{M'(t)}\| dt = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt\end{aligned}$$

Théorème :

Dans le cas d'une courbe plane définie en coordonnées polaires, la longueur de C entre $M(\theta_0)$ et $M(\theta_1)$ est :

$$L(C) = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \|\overrightarrow{M'(\theta)}\| d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2} d\theta$$

Démonstration : On a vu que $\overrightarrow{M'}(\theta) = \rho'(\theta) \vec{u}_r + \rho(\theta) \vec{u}_\theta$ ce qui fournit immédiatement sa norme. ■

Définition : C un arc paramétré du plan ou de l'espace, de classe $\mathcal{C}^1$ sur I . On appelle **abscisse curviligne** de C dans le sens des t (ou θ) croissants et d'origine $M(t_0)$ (ou $M(\theta_0)$), selon les cas :

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\overrightarrow{M'}(u)\| du$$

$$s(\theta) = \int_{\theta_0}^{\theta} \|\overrightarrow{M'}(\varphi)\| d\varphi$$

On a alors

$$\frac{ds}{dt} = \|\overrightarrow{M'}(t)\| \text{ ou } \frac{ds}{d\theta} = \|\overrightarrow{M'}(\theta)\|$$

ou encore, toujours selon les cas :

$$ds = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt$$

$$ds = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\theta$$

4-2 Repère de Frenet

Définition : C un arc paramétré du plan, de classe $\mathcal{C}^1$ sur I . M_{t_0} un point régulier de C .

$(M_{t_0}, \vec{T}, \vec{N})$ est le **repère de Frenet** au point M_{t_0} avec

$$\vec{T} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{ds} = \frac{\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}}{\left\| \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right\|} \text{ calculé au point considéré}$$

et $(\vec{T}, \vec{N})$ orthonormal direct.

Voir la figure 7, de la présente page.

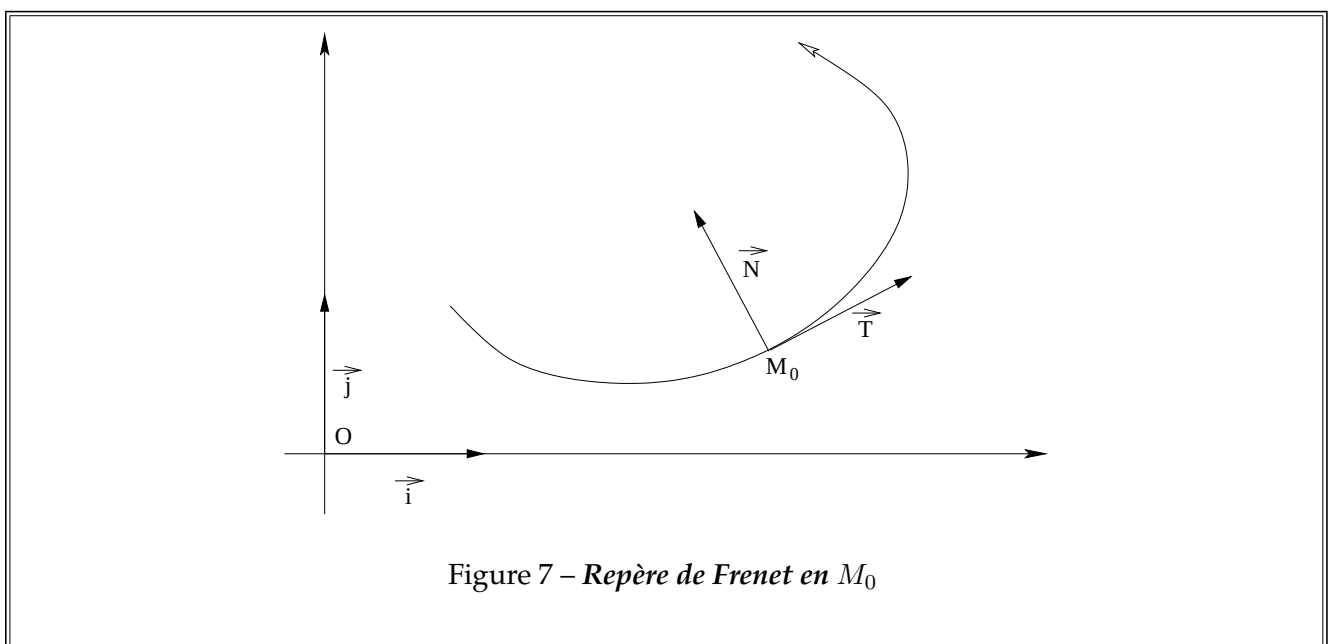


Figure 7 – Repère de Frenet en M_0

Définition : Quand C est paramétré par s une abscisse curviligne, on dit que le paramétrage est **normal**.

Théorème : C un arc paramétré du plan, de classe $\mathcal{C}^2$ sur I . Alors $\frac{d\vec{T}}{ds}$ est colinéaire à $\vec{N}$.

Démonstration : On a $\vec{T} \cdot \vec{T} = 1$, d'où, en dérivant, $2\vec{T} \cdot \frac{d\vec{T}}{ds} = 0$,

ce qui entraîne $\frac{d\vec{T}}{ds}$ normal à $\vec{T}$, donc colinéaire à $\vec{N}$. ■

On a ici une différence avec les conventions des physiciens.

Pour nous, $(\vec{T}, \vec{N})$ est toujours direct,

tandis que pour les physiciens, $\vec{N}$ dépend de la concavité, c'est à dire du fait qu'on tourne sur la gauche ou sur la droite. Il est ainsi toujours tourné vers l'intérieur de la courbe.

4-3 Courbure d'une courbe plane, rayon de courbure, centre de Courbure, cercle osculateur

Définition : Le **rayon de courbure** R , la **courbure** γ en un point sont donnés par

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \gamma \vec{N} = \frac{1}{R} \vec{N}$$

C'est la première formule de Frenet.

Définition : Le **centre de courbure** Ω est

$$\Omega = M + R \vec{N}$$

Le **cercle de courbure** ou **cercle osculateur** est le cercle de centre Ω et de rayon R . C'est le cercle le « mieux » tangent à la courbe au point M .

On regardera avec soin la figure 8, page suivante.

Théorème : On a aussi

$$\frac{d\vec{N}}{ds} = -\gamma \vec{T} = -\frac{1}{R} \vec{T}$$

C'est la deuxième formule de Frenet.

Démonstration : $\vec{N} \cdot \vec{N} = 1$, qu'on dérive $2\vec{N} \cdot \frac{d\vec{N}}{ds} = 0$. D'où $\frac{d\vec{N}}{ds}$ est colinéaire à $\vec{T}$.

De plus, $\vec{N} \cdot \vec{T} = 0$, qu'on dérive aussi, $\frac{d\vec{N}}{ds} \cdot \vec{T} + \vec{N} \cdot \frac{d\vec{T}}{ds} = 0$. Mais $\vec{N} \cdot \frac{d\vec{T}}{ds} = \gamma$.

On a donc $\frac{d\vec{N}}{ds} \cdot \vec{T} = -\gamma$ et enfin $\frac{d\vec{N}}{ds} = -\gamma \vec{T}$. ■

Si $R > 0$, on tourne à gauche et si $R < 0$, on tourne à droite.

(la convention est différente de celle des physiciens pour lesquels R est le rayon de courbure géométrique c'est à dire qu'on a toujours $R > 0$)

4-4 Calcul élémentaire de la courbure en un point birégulier

On considère la fonction anglaise associée φ qui est l'angle entre Ox et $\vec{T}$, $\varphi = \widehat{(\vec{i}, \vec{T})}$ d'où, en paramétriques :

$$\vec{T} : \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dx}{ds} \\ \frac{dy}{ds} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} / \frac{ds}{dt} \\ \frac{dy}{dt} / \frac{ds}{dt} \end{pmatrix} \text{ et } \vec{N} : \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}$$

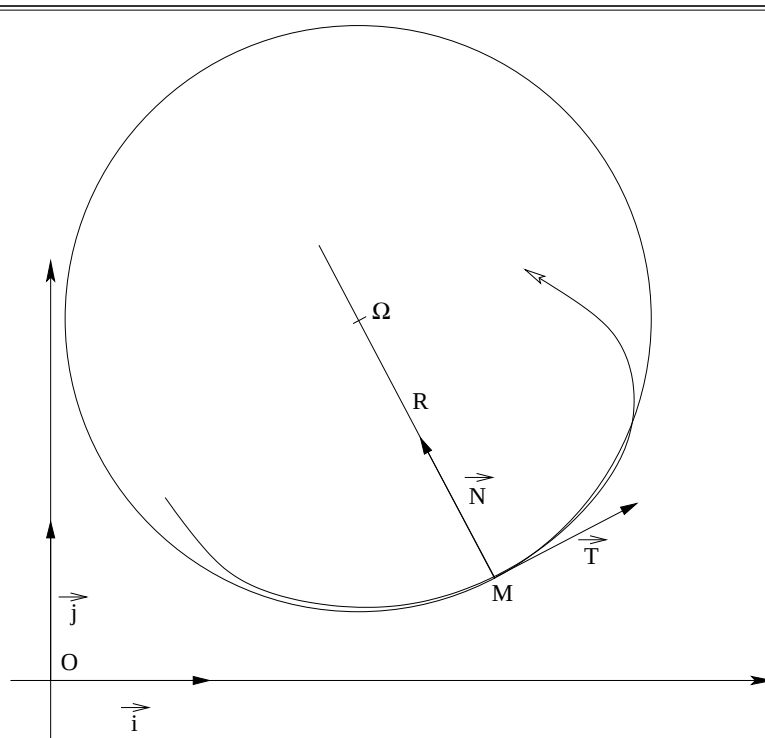


Figure 8 – *Centre, rayon et cercle de courbure avec ici $R > 0$*

En polaires, on a :

$$\varphi = \theta + V$$

Théorème : Avec les notations précédentes, on a

$$\gamma = \frac{d\varphi}{ds} \quad R = \frac{ds}{d\varphi}$$

Démonstration : $\vec{T} : \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$ qu'on dérive par rapport à s . D'où $\frac{d\vec{T}}{ds} = \gamma \vec{N} : \begin{pmatrix} -\sin \varphi \times \frac{d\varphi}{ds} \\ \cos \varphi \times \frac{d\varphi}{ds} \end{pmatrix}$.

Ce qui donne immédiatement $\gamma = \frac{d\varphi}{ds}$. ■

4-5 Calcul pratique de la courbure en utilisant la fonction angulaire associée φ

On remarque que dans tous les cas, on a besoin de $\frac{ds}{dt}$ ou de $\frac{ds}{d\theta}$.

- En paramétriques, on peut parfois « reconnaître » directement la fonction $\varphi(t)$ en écrivant $\vec{T}$.
Si on ne reconnaît pas cette fonction, on écrit, à partir de $\vec{T}$:

$$\tan \varphi = \frac{y'}{x'}$$

Expression que l'on simplifie avant de dériver :

$$(1 + \tan^2 \varphi) \frac{d\varphi}{dt} = \left(\frac{y'}{x'} \right)'$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\left(\frac{y'}{x'} \right)'}{(1 + \tan^2 \varphi)}$$

Alors, on calcule facilement

$$R = \frac{ds}{d\varphi} = \frac{ds}{dt} / \frac{d\varphi}{dt}$$

- En polaires :

$\varphi = \theta + V$ avec $\tan V = \frac{\rho}{\rho'}$, en dérivant après simplification,

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = 1 + \frac{dV}{d\theta}$$

Ce qui permet de calculer :

$$R = \frac{ds}{d\varphi} = \frac{ds}{d\theta} / \frac{d\varphi}{d\theta}$$

Exemple : On va chercher le rayon de courbure en tous points de la courbe de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = (1 + \cos^2 t) \sin t \\ y = \sin^2 t \cos t \end{cases}.$$

On obtient facilement : $\begin{cases} x' = (3 \cos^2 t - 1) \cos t \\ y' = \sin t (3 \cos^2 t - 1) \end{cases}$

d'où $\frac{ds}{dt} = |3 \cos^2 t - 1|$ et $\tan \varphi = \tan t$, ce qui donne $\frac{d\varphi}{dt} = 1$.

Enfin, $R = \frac{ds}{d\varphi} = |3 \cos^2 t - 1|$

On peut continuer le calcul et on obtient : $\vec{T} = \text{signe}(3 \cos^2 t - 1) \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$,

puis : $\vec{N} = \text{signe}(3 \cos^2 t - 1) \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$.

Les coordonnées du centre de courbure sont donc : $\begin{cases} x = 2 \sin^3 t \\ y = 2 \cos^3 t \end{cases}$.

Exemple : On va chercher le rayon de courbure en tous points de la courbe d'équation $\rho = 1 - \cos \theta$ en coordonnées polaires.

On a déjà calculé $\tan V = \tan \frac{\theta}{2}$, et ainsi $\frac{dV}{d\theta} = \frac{1}{2}$, puis $\frac{d\varphi}{d\theta} = \frac{3}{2}$.

$\rho^2 + \rho'^2 = 2(1 - \cos \theta)$ qui donne $\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{2(1 - \cos \theta)}$.

Enfin, $R = \frac{ds}{d\varphi} = \frac{2\sqrt{2(1 - \cos \theta)}}{3}$.

4-6 Calcul direct des éléments de courbure

On peut aussi rechercher, si on aime les calculs, des formules directes donnant courbure et rayon de courbure.

- Si $\frac{y'}{x'}$ ou $\frac{\rho}{\rho'}$ ne se simplifient pas du tout, les calculs sont les mêmes que ceux faits en utilisant la fonction angulaire associée,
- mais, si $\frac{y'}{x'}$ ou $\frac{\rho}{\rho'}$ se simplifient, ne serait-ce qu'un peu, les calculs seront plus longs, et souvent plus complexes, en utilisant le calcul direct qu'en utilisant la fonction angulaire associée.

C'est pourquoi, on réserve cette méthode quand on travaille pour une valeur particulière du paramètre.

- Dans le cas $\begin{cases} x = f(t) = x(t) \\ y = g(t) = y(t) \end{cases}$

$$\vec{T} : \frac{1}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad \vec{N} : \frac{1}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \begin{pmatrix} -y' \\ x' \end{pmatrix}$$

$$R = \frac{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{\begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}}$$

$$\Omega : \begin{cases} X = x - y' \frac{x'^2 + y'^2}{\begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}} \\ Y = y + x' \frac{x'^2 + y'^2}{\begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}} \end{cases}$$

- Dans le cas $y = f(x)$, on considère qu'on a une courbe paramétrée par $\begin{cases} x = x \\ y = f(x) \end{cases}$.

Ceci évite d'avoir à mémoriser de nouvelles formules...

- Dans le cas des coordonnées polaires $\rho = \rho(\theta)$:

$$R = \frac{(\rho^2 + \rho'^2)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}$$

Démonstration : Il nous faut démontrer ces dernières formules, en particulier :

$$R = \frac{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{\begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}} \quad \text{et} \quad R = \frac{(\rho^2 + \rho'^2)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}.$$

En paramétriques, on a : $(1 + \tan^2 \varphi) \frac{d\varphi}{dt} = \left(\frac{y'}{x'}\right)'$ et $R = \frac{ds}{d\varphi} = \frac{\frac{ds}{dt}}{\frac{d\varphi}{dt}}$

$$\text{donne : } R = \frac{\sqrt{x'^2 + y'^2}}{\frac{y''x' - y'x''}{x'^2}} = \frac{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''x' - y'x''}$$

$$1 + \frac{y'^2}{x'^2}$$

$$\text{En polaires, } \tan V = \frac{\rho}{\rho'} \text{ donne : } \frac{dV}{d\theta} = \frac{\frac{\rho'^2 - \rho\rho''}{\rho'^2}}{1 + \frac{\rho^2}{\rho'^2}} = \frac{\rho'^2 - \rho\rho''}{\rho^2 + \rho'^2} \quad \text{et donc : } \frac{d\varphi}{d\theta} = 1 + \frac{dV}{d\theta} = \frac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}{\rho^2 + \rho'^2}$$

$$\text{Et enfin, } R = \frac{ds}{d\varphi} = \frac{\frac{ds}{d\theta}}{\frac{d\varphi}{d\theta}} = \frac{(\rho^2 + \rho'^2)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}$$

■

Dans le cas d'une courbe définie en coordonnées polaire, les **points d'inflexion** vérifient

$$\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho'' = 0$$

puisque en un point d'inflexion, la courbure est nulle.

4-7 Cas particulier de la valeur 0 du paramètre

Il s'agit ici du cas où on utilisera systématiquement les formules de calcul direct.

- Enfin, dans le cas où on est en paramétriques et où Ω correspond à la valeur 0 du paramètre. Un développement limité à l'ordre 2 de $x(t)$ et $y(t)$ en 0 fournit, par la formule de Taylor,

$$x(t) = x(0) + x'(0)t + \frac{x''(0)}{2}t^2 + o(t^2)$$

$$y(t) = y(0) + y'(0)t + \frac{y''(0)}{2}t^2 + o(t^2)$$

$x'(0), x''(0), y'(0), y''(0)$ qui permettent de calculer facilement R .

- On peut faire la même chose en polaires si on cherche la courbure à la valeur 0 de θ . Un développement limité à l'ordre 2 de $\rho(\theta)$ en 0 fournit $\rho(0), \rho'(0)$, et $\rho''(0)$.

$$\rho(\theta) = \rho(0) + \rho'(0)\theta + \frac{\rho''(0)}{2}\theta^2 + o(\theta^2)$$

Exemple : On va chercher la courbure de la courbe d'équation polaire $\rho(\theta) = \frac{\cos \theta - 2 \sin \theta}{1 + \sin^3 \theta}$ au point (0,1) correspondant à la valeur 0 du paramètre.

$$\rho(\theta) = \frac{1 - 2\theta - \theta^2/2 + o(\theta^2)}{1 + o(\theta^2)} = 1 - 2\theta - \theta^2/2 + o(\theta^2)$$

Ce qui nous donne : $\rho(0) = 1, \rho'(0) = -2$ et $\rho''(0) = -1$ et enfin $\gamma = \frac{5^{3/2}}{10} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

5 Trajectoires orthogonales d'une famille de courbes

5-1 Trajectoire orthogonale

Définition : Soit $(C_\lambda)_{\lambda \in J}$ une famille de courbes.

On appelle trajectoire orthogonale de $(C_\lambda)_{\lambda \in J}$ toute courbe Γ qui coupe chaque C_λ à angle droit.

En général il y a une famille $(\Gamma_\mu)_{\mu \in K}$ de courbes qui conviennent.

5-2 Recherche des trajectoires orthogonales d'une famille de courbes paramétrées

Soit une famille de courbes $(C_\lambda)_{\lambda \in J}$ telle que $(t, \lambda) \rightarrow M(t, \lambda)$ soit de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I \times J$.

On cherche les trajectoires orthogonales Γ de $(C_\lambda)_{\lambda \in J}$ sous la forme $t \rightarrow M(t, \lambda(t))$ pour $t \in I$.

C'est à dire avec λ dépendant de t .

La tangente à C_λ en $M(t, \lambda)$ est dirigée par $\frac{\partial \vec{M}}{\partial t}$, tandis que,

la tangente à Γ en $M(t, \lambda(t))$, qui est le même point, est dirigée par $\frac{\partial \vec{M}}{\partial t} + \lambda'(t) \frac{\partial \vec{M}}{\partial \lambda}$.

On a donc

$$\frac{\partial \vec{M}}{\partial t} \cdot \left(\frac{\partial \vec{M}}{\partial t} + \lambda'(t) \frac{\partial \vec{M}}{\partial \lambda} \right) = 0$$

c'est à dire :

$$\left\| \frac{\partial \vec{M}}{\partial t} \right\|^2 + \lambda'(t) \frac{\partial \vec{M}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{M}}{\partial \lambda} = 0$$

On résout cette équation différentielle (en général non linéaire !) du premier ordre en λ pour obtenir une famille $(\Gamma_\mu)_{\mu \in K}$ de courbes, trajectoires orthogonales des $(C_\lambda)_{\lambda \in J}$.

Exemple : Trajectoire orthogonales des hyperboles d'équation $xy = \lambda, \lambda \in \mathbb{R}$.

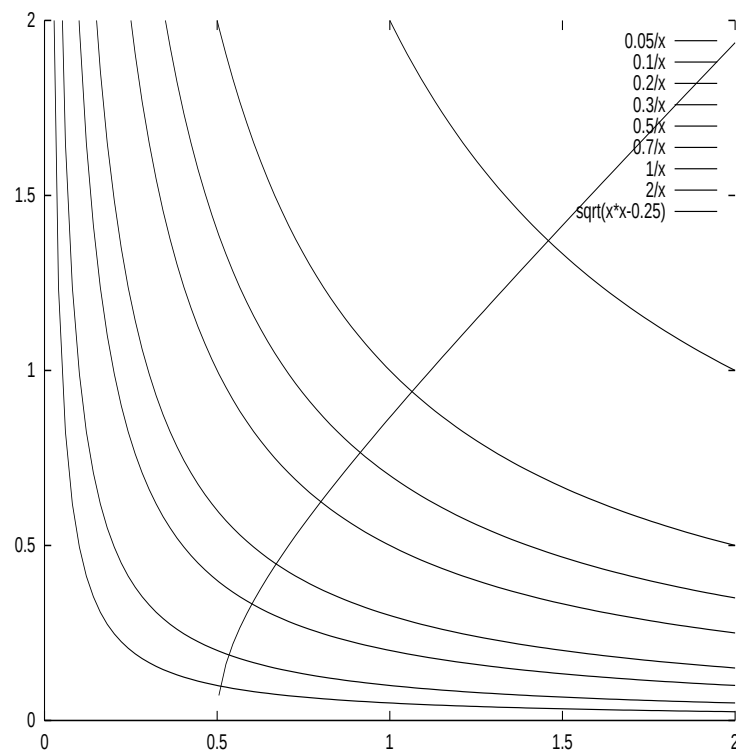


Figure 9 – Trajectoire orthogonale d'une famille de courbes

La figure 9, ci-dessous, montre une trajectoire orthogonale d'une famille de courbes.

On paramètre ces hyperboles $M : \begin{cases} x = t \\ y = \frac{\lambda}{t} \end{cases}, \frac{\partial M}{\partial t} : \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{\lambda}{t^2} \end{pmatrix}, \frac{\partial M}{\partial \lambda} : \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{t} \end{pmatrix}$

On cherche λ sous la forme $\lambda(t)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial t} \cdot \left(\frac{\partial M}{\partial t} + \lambda'(t) \frac{\partial M}{\partial \lambda} \right) &= \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{\lambda}{t^2} \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{\lambda}{t^2} \end{pmatrix} + \lambda'(t) \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{t} \end{pmatrix} \right) \\ &= 1 + \frac{\lambda^2}{t^4} - \frac{\lambda \lambda'}{t^3} = 0 \end{aligned}$$

On pose $u = \lambda^2$, on obtient :

$$1 + \frac{u}{t^4} - \frac{u'}{2t^3} = 0$$

qui est linéaire du premier ordre. $u = kt^2$ est solution de l'équation homogène associée. On cherche la solution

générale par variation de la constante.

$$\begin{aligned}
 u &= kt^2 \\
 u' &= k't^2 + 2kt \\
 1 + \frac{u}{t^4} - \frac{u'}{2t^3} &= 1 + \frac{k}{t^2} - \frac{k'}{2t} - \frac{k}{t^2} = 1 - \frac{k'}{2t} = 0 \\
 k' &= 2t \\
 k &= t^2 + \mu \\
 u &= (t^2 + \mu)t^2 = \lambda^2 \\
 \lambda &= \pm t\sqrt{t^2 + \mu} \\
 y = \pm \sqrt{t^2 + \mu} \quad \left. \begin{array}{l} x = t \end{array} \right\} &\Leftrightarrow y^2 - x^2 = \mu
 \end{aligned}$$

On obtient un autre réseau d'hyperboles.

6 Compléments

6-1 Avec Maple

- « `plot` » permet de tracer des courbes planes du type $y = f(x)$ ou des courbes paramétrées ou des courbes définies en coordonnées polaires. On va donner les commandes pour tracer le cercle trigonométrique ou une partie de celui-ci.
`> plot(sqrt(1-x*x), x=-1..1);`
`> plot([cos(t), sin(t), t=0..2*Pi], scaling=constrained);`
`> plot([rho, theta, theta=0..2*Pi], coords=polar, scaling=constrained);`
- On peut obtenir un graphe mélangeant les types de coordonnées en utilisant la fonction « `display` ».
- « `implicitplot` » permet lui de tracer une courbe du type $f(x, y) = 0$. Attention, il faut auparavant charger le package « `plots` ».
`> with(plots);`
`> implicitplot(x^2+y^2-1, x=-1.2..1.2, y=-1.2..1.2);`
- Toujours dans le même package, on trouve « `spacecurve` » pour tracer une courbe paramétrée de l'espace.
- Signalons enfin qu'on peut toujours tracer plusieurs courbes du même type (classique, paramétrée, polaire, implicite, de l'espace) en séparant les définitions de virgules et en les embrassant par `{ }`.
`> plot({sqrt(1-x*x), -sqrt(1-x*x)}, x=-1..1);`
`> plot([cos(t), sin(t), t=0..2*Pi], [cos(2*t), sin(3*t), t=0..Pi]);`

6-2 Les mathématiciens du chapitre

Ils sont trop nombreux ici. On ne peut pas ne pas reciter Euler par exemple. mais aussi :

Frenet Frédéric 1816-1900 Mathématicien français né à Périgueux, il s'est spécialisé en géométrie différentielle.

Sommaire

1 Nappes Paramétrées	1	2-3 Tangente à une courbe	5
1-1 Nappe paramétrée	1	2-4 Tangente à une intersection de surfaces	6
1-2 Plan tangent	1	2-5 Projection d'une courbe	6
1-3 Courbe tracée sur une nappe	3	2-6 Equation cartésienne d'une nappe . .	6
1-4 Paramétrisation cartésienne	3	3 Lignes de Plus Grande Pente	7
2 Surfaces en cartésiennes	4	3-1 Ligne de plus grande pente	7
2-1 Surface d'équation $F(x,y,z) = 0$. . .	4	3-2 Recherche des lignes...	7
2-2 Plan tangent en un point non singulier	5	4 Avec Maple	8

On verra trois façons principales de définir une surface :

- comme nappe paramétrée, voir au 1,
- en équation cartésienne, voir au 2,
- et enfin en paramétrisation cartésienne qui peut se voir comme une nappe paramétrée ou comme une équation cartésienne, voir au 1-4.

Ainsi, un même objet géométrique, la « surface », peut être décrite de différentes façons...

1 Nappes Paramétrées

1-1 Nappe paramétrée

Définition : Soit $\mathcal{D}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$, et $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$, de classe $\mathcal{C}^1$.

$S = f(\mathcal{D})$ est appelée **nappe paramétrée** par f . En pratique,

$$M : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in S \Leftrightarrow \exists (u,v) \in \mathcal{D}, \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}$$

Si f est de classe $\mathcal{C}^k$, on parle de nappe paramétrée de classe $\mathcal{C}^k$.

Définition : Soit $S = (\mathcal{D}, f)$ une nappe paramétrée de classe $\mathcal{C}^k$ ($k \geq 1$),

$$M_0 : \begin{pmatrix} x(u_0, v_0) \\ y(u_0, v_0) \\ z(u_0, v_0) \end{pmatrix} \text{ un point de la nappe.}$$

On dit que M_0 est **régulier** $\Leftrightarrow \left(\frac{\partial \vec{M}}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial \vec{M}}{\partial v}(u_0, v_0) \right)$ forment une famille libre

$$\Leftrightarrow \left(\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial u} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} \right) \text{ forment une famille libre } \Leftrightarrow \text{ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires.}$$

1-2 Plan tangent en un point régulier d'une nappe paramétrée

Théorème : Soit $S = (\mathcal{D}, f)$ une nappe paramétrée de classe $\mathcal{C}^k$ ($k \geq 1$),

$$M_0 : \begin{pmatrix} x(u_0, v_0) \\ y(u_0, v_0) \\ z(u_0, v_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \text{ un point régulier, alors } S \text{ admet un plan tangent en } M_0.$$

C'est le plan $\left(M_0, \frac{\partial \vec{M}}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial \vec{M}}{\partial v}(u_0, v_0) \right)$. Son équation est :

$$\begin{vmatrix} (X - x_0) & \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0) \\ (Y - y_0) & \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0) \\ (Z - z_0) & \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \end{vmatrix} = 0$$

Le vecteur : $\frac{\partial \vec{M}}{\partial u}(u_0, v_0) \wedge \frac{\partial \vec{M}}{\partial v}(u_0, v_0)$ est normal à la surface au point.

Démonstration : $\overrightarrow{M_0 M} = (u - u_0) \frac{\partial \vec{M}}{\partial u}(u_0, v_0) + (v - v_0) \frac{\partial \vec{M}}{\partial v}(u_0, v_0) + o(u - u_0, v - v_0)$

ce qui prouve que $\lim_{(u,v) \rightarrow (u_0, v_0)} \frac{\overrightarrow{M_0 M}}{\|\overrightarrow{M_0 M}\|}$ est bien dans la direction du plan indiqué. ■

La figure 1, ci-dessous, montre le plan tangent et le vecteur normal à une surface.

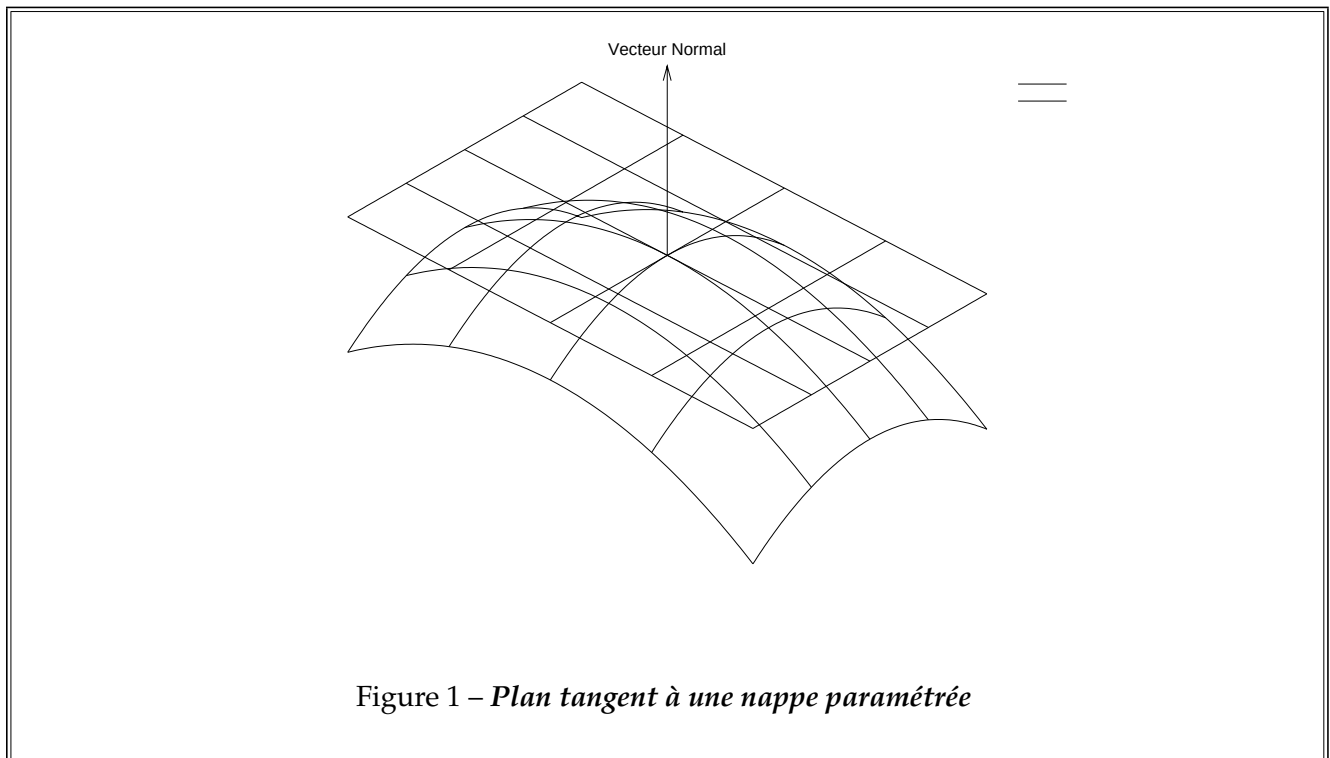


Figure 1 – *Plan tangent à une nappe paramétrée*

Les courbes tracées sur la surface sont les courbes à u ou à v constants, il apparaît bien ici que le plan tangent est engendré par les tangentes à ces courbes au point considéré.

Exemple : On va chercher, s'il existe, le plan tangent à la nappe : $\begin{cases} x = u + v \\ y = u - v \\ z = u^2 - v^2 \end{cases}$ au point $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

correspondant aux valeurs $u = 2$ et $v = 1$ des paramètres.

On calcule les dérivées partielles par rapport à u puis leur valeur au point :

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial u} = 1 \\ \frac{\partial y}{\partial u} = 1 \\ \frac{\partial z}{\partial u} = 2u \end{cases} \quad \text{qui au point indiqué est le vecteur} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

On fait de même avec v :

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial v} = 1 \\ \frac{\partial y}{\partial v} = -1 \\ \frac{\partial z}{\partial v} = -2v \end{cases} \quad \text{qui au point indiqué est le vecteur} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Le plan tangent est donc, s'il existe, d'équation : $\begin{vmatrix} x-3 & 1 & 1 \\ y-1 & 1 & -1 \\ z-3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 0$, soit : $2x + 6y - 2z = 6$.

Enfin, le plan tangent (qui existe !) est d'équation : $x + 3y - z = 3$

1-3 Courbe tracée sur une nappe paramétrée

Elle peut correspondre à u ou v constant, ce sont par exemple les courbes que trace Maple quand il trace en « fil de fer » une nappe paramétrée.

D'une façon plus générale, une courbe tracée sur une nappe paramétrée correspond souvent à avoir l'un des paramètres en fonction de l'autre (via si possible une fonction de classe $\mathcal{C}^1$). On obtient ainsi une courbe paramétrée de l'espace (de classe $\mathcal{C}^1$).

La tangente à la courbe, quand elle existe est alors tracée sur le plan tangent. On montrera ceci dans un autre cadre.

1-4 Paramétrisation cartésienne

Définition : On dit qu'on a une paramétrisation cartésienne quand on a x et y comme paramètres. On note alors simplement

$$z = f(x, y)$$

$(x, y) \in \mathcal{D}$, avec f de classe $\mathcal{C}^k$.

Théorème : Soit $\mathcal{S}$ une nappe paramétrée cartésienne définie par $z = f(x, y)$, $(x, y) \in \mathcal{D}$,

avec f de classe $\mathcal{C}^k$, $k \geq 2$. Soit $M_0 : \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ un point de $\mathcal{S}$. Soit

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0), \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0), \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)$$

- Si $s^2 - rt < 0$, la surface est en ballon en M_0 ,
 - au dessus pour $r > 0$,
 - en dessous pour $r < 0$.
- Si $s^2 - rt > 0$, la surface est en col en M_0 , et donc traverse le plan tangent.

Démonstration : On applique la formule de Taylor-Toung à l'ordre 2, toutes les dérivées partielles étant prises en (x_0, y_0) :

$$\begin{aligned} z - z_0 &= f(x, y) - f(x_0, y_0) \\ &= \underbrace{\left((x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y} \right)}_{=z_1 - z_0} \\ &\quad + \underbrace{\frac{1}{2} \left((x - x_0)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2(x - x_0)(y - y_0) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + (y - y_0)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)}_{=z_2 - z_1} + o \left(\left\| \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \right\|^2 \right) \end{aligned}$$

Le point M_1 de coordonnées (x, y, z_1) étant un point du plan tangent.

Le signe de $(z - z_1)$ permet de déterminer de quel côté du plan tangent est le point M .

On a :

$$z - z_1 = \frac{1}{2} \left((x - x_0)^2 r + 2(x - x_0)(y - y_0)s + (y - y_0)^2 t \right) + o \left(\left\| \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \right\|^2 \right)$$

$(z - z_1)$ finit par être du signe de l'expression du second degré quand elle n'est pas nulle. On pose

$$\Delta = 4(s^2 - rt)$$

- $\Delta > 0$
 $z - z_1$ change de signe, on a un col,
- $\Delta < 0$
 $z - z_1$ ne change pas de signe, on a un point en ballon, son signe est celui de r .
- $\Delta = 0$

dans une certaine direction, le signe de cette expression est celui de $o \left(\left\| \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \right\|^2 \right)$ qu'on ne connaît pas. On ne peut pas conclure.

■

Exemple : On va chercher la nature du point $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ de la nappe paramétrée cartésienne d'équation :

$$z = f(x, y) = x^2 - y^2.$$

Cette équation est clairement de classe $\mathcal{C}^2$ au moins. On calcule les dérivées partielles premières et secondes.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2.$$

Au point considéré, (et d'ailleurs en tous points), $r = 2, s = 0, t = -2, s^2 - rt = 4 > 0$.

Le point $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, comme tous les points, est en col.

2 Surfaces définies par une Equation Cartésienne

2-1 Surface d'équation cartésienne $F(x, y, z) = 0$

Définition : $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^3$, $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^k, k \geq 1$. $\mathcal{S}$, la surface d'équation cartésienne $F(x, y, z) = 0$ est l'ensemble des points : $M : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que : $F(x, y, z) = 0$

Définition : $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^3$, $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^k, k \geq 1$. $\mathcal{S}$ d'équation cartésienne $F(x, y, z) = 0$, M_0 est dit **singulier** $\Leftrightarrow \overrightarrow{\text{Grad}_F}(M_0) = \vec{0}$

On ne confondra pas les points singuliers d'une surface définie par une équation cartésienne et les points réguliers d'une nappe paramétrée...

2-2 Plan tangent à S en un point non singulier

Théorème : $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^3$, $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^k$, $k \geq 1$.

S d'équation cartésienne $F(x, y, z) = 0$, M_0 un point non singulier de S .

Alors S admet un plan tangent en M_0 . Ce plan passe par M_0 et est normal au vecteur $\overrightarrow{\text{Grad}_F(M_0)}$.

Son équation est donc : $\overrightarrow{M_0 M} \cdot \overrightarrow{\text{Grad}_F(M_0)} = 0$ ou encore : $dF_{M_0} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = 0$

ou enfin : $(x - x_0) \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + (y - y_0) \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) + (z - z_0) \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 0$

On a bien sûr la même figure que pour une nappe paramétrée. Seul le calcul du vecteur normal change.

Démonstration : On admet que S a aussi au voisinage de M_0 une représentation paramétrique de classe $\mathcal{C}^1$ $(u, v) \rightarrow \overrightarrow{f(u, v)}$ sur $\mathcal{D}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

M_0 correspondant aux valeurs (u_0, v_0) des paramètres. On a donc :

$$\forall (u, v) \in \mathcal{D}, F(\overrightarrow{f(u, v)}) = 0 = H(u, v)$$

Sa différentielle en (u_0, v_0) est aussi nulle, $\frac{\partial H}{\partial u}(u_0, v_0) = \frac{\partial H}{\partial v}(u_0, v_0) = 0$, donc, en ne précisant pas en quels points on prend les dérivées, pour alléger les notations :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} \times \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial y} \times \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial z} \times \frac{\partial z}{\partial u} &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x} \times \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial y} \times \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial z} \times \frac{\partial z}{\partial v} &= 0 \end{aligned}$$

Egalités qu'on peut interpréter comme des produits scalaires :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{Grad}_F(M_0)} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{f}}{\partial u}(u_0, v_0) &= 0 \\ \overrightarrow{\text{Grad}_F(M_0)} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{f}}{\partial v}(u_0, v_0) &= 0 \end{aligned}$$

Ce qui prouve que la direction du plan tangent à la nappe est le plan normal à $\overrightarrow{\text{Grad}_F(M_0)}$. ■

$z = f(x, y)$ a la particularité de pouvoir être considéré comme une nappe paramétrée par x et y , ou comme une surface d'équation cartésienne $z - f(x, y) = 0$.

Rechercher le plan tangent selon l'un ou l'autre des points de vue conduit à des calculs différents, mais au même résultat !

Exemple : On reprend la nappe d'équation $g(x, y, z) = z - x^2 - y^2 = 0$, et on cherche le plan tangent en $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Cette équation est clairement de classe $\mathcal{C}^1$ au moins. Au point considéré, $\frac{\partial g}{\partial x} = -2$, $\frac{\partial g}{\partial y} = -2$ et $\frac{\partial g}{\partial z} = 1$.

Le plan tangent est donc d'équation $-2(x - 1) - 2(y - 1) + z = 0$, ou encore $2x + 2y - z = 4$.

2-3 Tangente à une courbe paramétrée tracée sur une surface

Théorème : Γ une courbe paramétrée de classe $\mathcal{C}^1$ tracée sur S de classe $\mathcal{C}^1$. En un point régulier de Γ , et non singulier de S , la tangente à Γ est tracée sur le plan tangent à S .

Démonstration : $\Gamma : M : \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, t \in I, \text{ et } S : F(x, y, z) = 0, M_0 \text{ correspondant à } t_0 \text{ et on a :}$

$$\forall t \in I, F(x(t), y(t), z(t)) = 0$$

On différencie en t_0 , cela donne : $\frac{\partial F}{\partial x} \times x'(t_0) + \frac{\partial F}{\partial y} \times y'(t_0) + \frac{\partial F}{\partial z} \times z'(t_0) = 0$

On le réécrit : $\overrightarrow{\text{Grad}_F(M_0)} \cdot \frac{d\vec{M}}{dt}(t_0) = 0$

Ceci prouve que le vecteur tangent à Γ est dans la direction du plan tangent à S , et comme tous deux passent par M_0 , on a le résultat annoncé. ■

2-4 Tangente à une courbe intersection de surfaces cartésiennes

Théorème : S_1 et S_2 deux surfaces de classe $\mathcal{C}^1$ d'équations $\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0 \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$

Soit M_0 un point non singulier de S_1 et S_2 , tel que les plans tangents à S_1 et S_2 en M_0 sont distincts.

Et enfin : $\Gamma = S_1 \cap S_2$.

Alors, la tangente à Γ en M_0 , si elle existe, est l'intersection des deux plans tangents. Elle est dirigée par

$$\overrightarrow{\text{Grad}_{F_1}(M_0)} \wedge \overrightarrow{\text{Grad}_{F_2}(M_0)}$$

Démonstration : Puisque la tangente, si elle existe, est tracée sur chacun des plans tangents... ■

2-5 Projection d'une courbe sur les plans de coordonnées

Une courbe dans l'espace peut toujours être définie par intersection de surfaces cartésiennes ou en paramétriques. On va voir comment obtenir ces projections (orthogonales) dans chacun des cas.

- Par intersection de surfaces. $\Gamma = S_1 \cap S_2 : \begin{cases} F_1(x, y, z) = 0 \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{cases} (x, y, z) \in \mathcal{U}.$

Il suffit d'éliminer z entre les deux équations pour trouver l'équation d'une courbe de xOy qui contient la projection cherchée. En effet, une relation entre x et y , indépendante de z , vérifiée par les points de Γ est aussi vérifiée par les points de sa projection...

- En paramétriques. $\Gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} t \in I.$

C'est encore plus simple, pour avoir la projection sur xOy , il suffit « d'oublier » z !

$$\text{D'où : } \Gamma' : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} t \in I$$

2-6 Equation cartésienne d'une nappe paramétrée

On a la nappe paramétrée $S : (u, v) \in \mathcal{D}, \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases}$

On cherche l'équation cartésienne d'une surface S' qui contient S .

Cela revient à chercher une relation entre x, y, z qui ne contient ni u ni v .

Pour cela, on élimine les 2 paramètres entre les 3 équations.

On élimine l'un des 2 paramètres **puis** l'autre. Il faut prendre soin d'éviter les dénominateurs, qui nous obligeraient à considérer des cas particuliers inutilement. On travaille à priori par implications.

- Si les relations sont polynomiales, on fabrique de proche en proche des relations de degré de plus en plus petits.
- Si on a de la trigonométrie, c'est souvent $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ qui permet d'avancer.

Pour savoir si on a ajouté des points, il faut chercher si pour un point de la surface on peut retrouver les valeurs des paramètres qui correspondent à ce point. C'est toujours une tâche un peu délicate, qu'on ne réalise qu'à la demande explicite de l'énoncé ...

Exemple : On va chercher une équation cartésienne de la nappe paramétrée :
$$\begin{cases} x = u - v \\ y = uv \\ z = u^2 + v^2 \end{cases}.$$

On peut facilement éliminer u en utilisant la première équation : $u = x + v$.

Ce qui donne :
$$\begin{cases} y = xv + v^2 \\ z = x^2 + 2xv + 2v^2 \end{cases}.$$

ou encore, en éliminant les termes en v^2 de la seconde équation :
$$\begin{cases} y = xv + v^2 \\ z - 2y = x^2 \end{cases}.$$

La dernière équation ne contient plus de paramètres... L'équation cherchée est $x^2 + 2y - z = 0$. C'est l'équation d'une surface $\mathcal{S}'$ qui contient la nappe paramétrée.

3 Lignes de Plus Grande Pente

3-1 Ligne de plus grande pente

Définition : Les **lignes de plus grand pente** d'une surface sont les trajectoires orthogonales des lignes de niveau de cette surface.

3-2 Recherche des lignes de plus grande pente de $z = f(x, y)$

Les lignes de niveau vérifient $\lambda = f(x, y)$. On paramètre ces courbes par t , on obtient $M(t, \lambda) : \begin{cases} x = x(t, \lambda) \\ y = y(t, \lambda) \\ z = \lambda \end{cases}$

On applique alors le chapitre précédent relatif aux trajectoires orthogonales. On rappelle que cela revient à

résoudre :
$$\left\| \frac{\partial \vec{M}}{\partial t} \right\|^2 + \lambda'(t) \frac{\partial \vec{M}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{M}}{\partial \lambda} = 0$$

Exemple : On cherche, en liaison avec le chapitre précédent, les lignes de plus grande pente de la surface d'équation $z = xy$.

Les lignes de niveau sont les hyperboles $xy = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$, comme on l'a déjà fait :

On paramètre ces hyperboles $M : \begin{cases} x = t \\ y = \frac{\lambda}{t} \end{cases}$, $\frac{\partial \vec{M}}{\partial t} : \begin{cases} 1 \\ -\frac{\lambda}{t^2} \end{cases}$, $\frac{\partial \vec{M}}{\partial \lambda} : \begin{cases} 0 \\ \frac{1}{t} \end{cases}$

On cherche λ sous la forme $\lambda(t)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{M}}{\partial t} \cdot \left(\frac{\partial \vec{M}}{\partial t} + \lambda'(t) \frac{\partial \vec{M}}{\partial \lambda} \right) &= \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{\lambda}{t^2} \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{\lambda}{t^2} \end{pmatrix} + \lambda'(t) \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{t} \end{pmatrix} \right) \\ &= 1 + \frac{\lambda^2}{t^4} - \frac{\lambda \lambda'}{t^3} = 0 \end{aligned}$$

On pose $u = \lambda^2$, on obtient : $1 + \frac{u}{t^4} - \frac{u'}{2t^3} = 0$ qui est linéaire du premier ordre. On cherche la solution générale comme au chapitre précédent.

On obtient les courbes vérifiant :
$$\begin{cases} z = xy \\ y^2 - x^2 = \mu \end{cases}.$$

Leurs projections orthogonales sur le plan horizontal forment un réseau d'hyperboles.

4 Avec Maple

« `plot3d` » permet de tracer une (ou plusieurs avec { }) surfaces en cartésiennes ou nappes paramétrées. On regardera les options « `axes, style, scaling, view, orientation` »

- Courbe d'équation : $z = f(x, y)$
> `plot3d(z, x=a..b, y=c..d, axes=normal);`
- Courbe en paramétriques : $x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v)$
> `plot3d([x, y, z], u=a..b, v=c..d, axes=normal);`
On regardera ici les options « `coords` » (« `cylindrical, spherical` »)
- On rappelle « `spacecurve` » du package « `plots` » pour les courbes en paramétrique
- Dans le même package « `implicitplot3d` » pour $f(x, y, z) = 0$
> `implicitplot3d(x^2+y^2-z^2-1, x=a..b, y=c..d, z=e..f);`
- Enfin, « `display3d` » permet de mélanger différents types de graphiques

Sommaire

1 Cylindres	1	2-3 Plan tangent le long d'une génératrice	6
1-1 Cylindre	1	2-4 Cône de sommet et directrice donnés .	6
1-2 Equation d'un cylindre	1	2-5 Recherche du contour apparent	8
1-3 Plan tangent le long d'une génératrice	2	2-6 Cône circonscrit à une surface	9
1-4 Equation d'un cylindre	2	3 Surfaces de Révolution	10
1-5 Recherche du contour apparent	4	3-1 Surface de révolution d'axe Δ	10
1-6 Equation d'un cylindre circonscrit . .	4	3-2 Equation cartésienne	10
2 Cônes	5	3-3 Rotation d'une demi-méridienne / Oz	10
2-1 Cône	5	3-4 Rotation de Γ autour de Δ	11
2-2 Equation polynomiale d'un cône . . .	5	4 Cylindres et cônes de révolution	12

Figures

1 Exemples de cylindres	2	4 Exemples de cônes	6
2 Cylindre : direction et directrice	3	5 Cône : sommet et directrice	7
3 Contour apparent dans une direction .	5	6 Contour apparent depuis un point . .	9
		7 Surface de révolution	11

Ce chapitre étudie quelques surfaces particulières : les cylindres et cônes qui sont formés de droites, et les surfaces de révolution. Enfin, on traitera à part les cylindres et cônes de révolution.

Dans tout le chapitre, $\mathbb{R}^3$ sera muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1 Cylindres

1-1 Cylindre

Définition : Un **cylindre de direction** $\vec{u}$ est une surface formée d'une famille de droites de direction $\vec{u}$.

Ces droites sont les **génératrices** du cylindre.

Une courbe qui rencontre toutes les génératrices est une **directrice**.

L'intersection de la surface avec un plan perpendiculaire à la direction $\vec{u}$, est une **section droite** du cylindre.

La figure 1, page suivante, montre des exemples de « cylindres ».

Un cylindre n'est pas, en général, un cylindre de révolution !

Définition : Si S est une surface, l'ensemble des points M de S tels que la direction du plan tangent à S en M contient $\vec{u}$ est le **contour apparent** de S dans la direction $\vec{u}$.

Le cylindre de direction $\vec{u}$ et de directrice ce contour apparent est le **cylindre circonscrit** à S dans la direction $\vec{u}$.

1-2 Equation d'un cylindre

Théorème : S est un cylindre de direction $\vec{k} \Leftrightarrow S$ a une équation de la forme : $F(x, y) = 0$.

C'est aussi dans le plan xOy l'équation de la section droite de S .

La courbe d'équation $F(x, y) = 0$ dans le plan xOy est la section droite du cylindre d'équation $F(x, y) = 0$ dans l'espace.

Ainsi, l'**interprétation** d'une équation incomplète (en x , ou y ou z) est celle d'une courbe ou d'une surface...

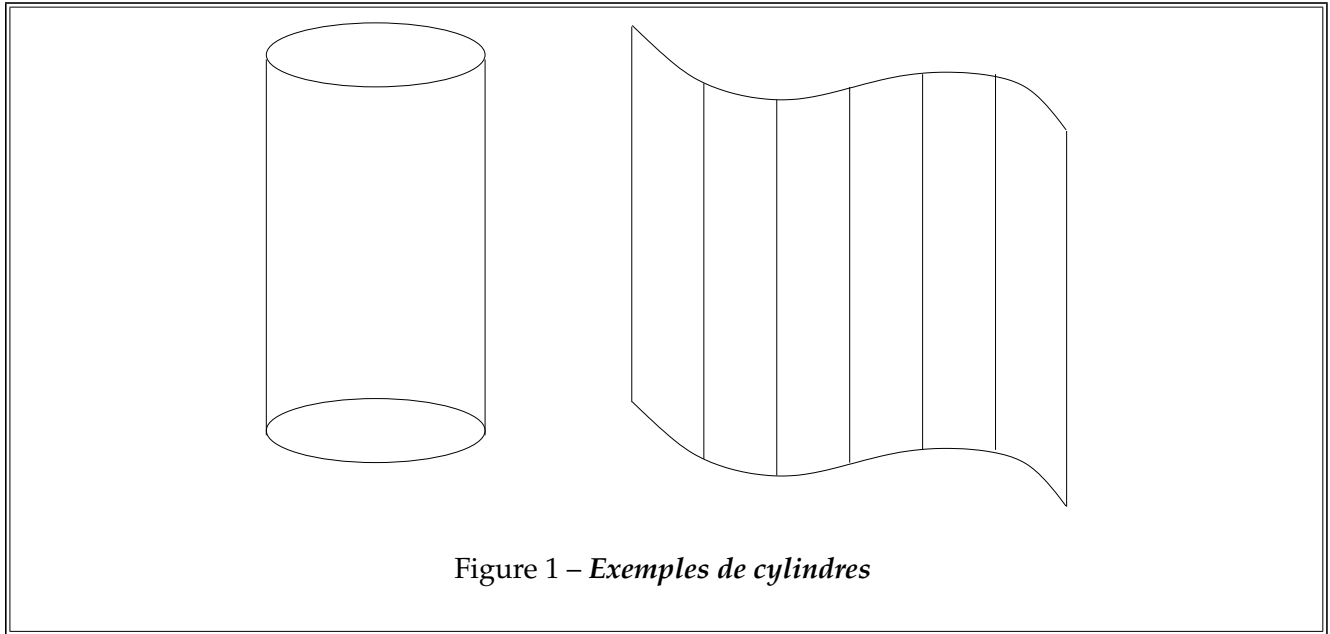


Figure 1 – Exemples de cylindres

De même, s'il manque y dans l'équation, on a un cylindre de direction $\vec{j}$.

Démonstration : On admet que S a une équation de la forme $H(x, y, z) = 0$.

Mais, si $M_0 : \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ appartient à S , la droite $(M_0, \vec{k})$ est tracée sur S et donc : $\forall z \in \mathbb{R}, H(x_0, y_0, z) = 0$

Ce qui prouve qu'en fait, H ne dépend pas de z . On peut donc écrire : $H(x, y, z) = F(x, y)$ ■

Théorème : S est un cylindre de direction $\vec{u} \Leftrightarrow S$ a une équation de la forme :

$$F(P_1, P_2) = 0$$

avec $P_1(x, y, z) = k_1$ et $P_2(x, y, z) = k_2$, l'équation de deux plans.

Et enfin, $P_1 \cap P_2$ donne la direction $\vec{u}$.

Démonstration : Un changement de repère orthonormal où $\vec{K} // \vec{u}$, fournit $F(X, Y) = 0$, et en revenant dans le repère d'origine, $F(P_1, P_2) = 0$. ■

1-3 Plan tangent le long d'une génératrice

Théorème : Le plan tangent à un cylindre le long d'une génératrice est invariant.

Démonstration : Quitte à changer de repère, on peut travailler avec $F(x, y) = 0$. Le plan tangent le long de la génératrice (x_0, y_0, λ) est d'équation :

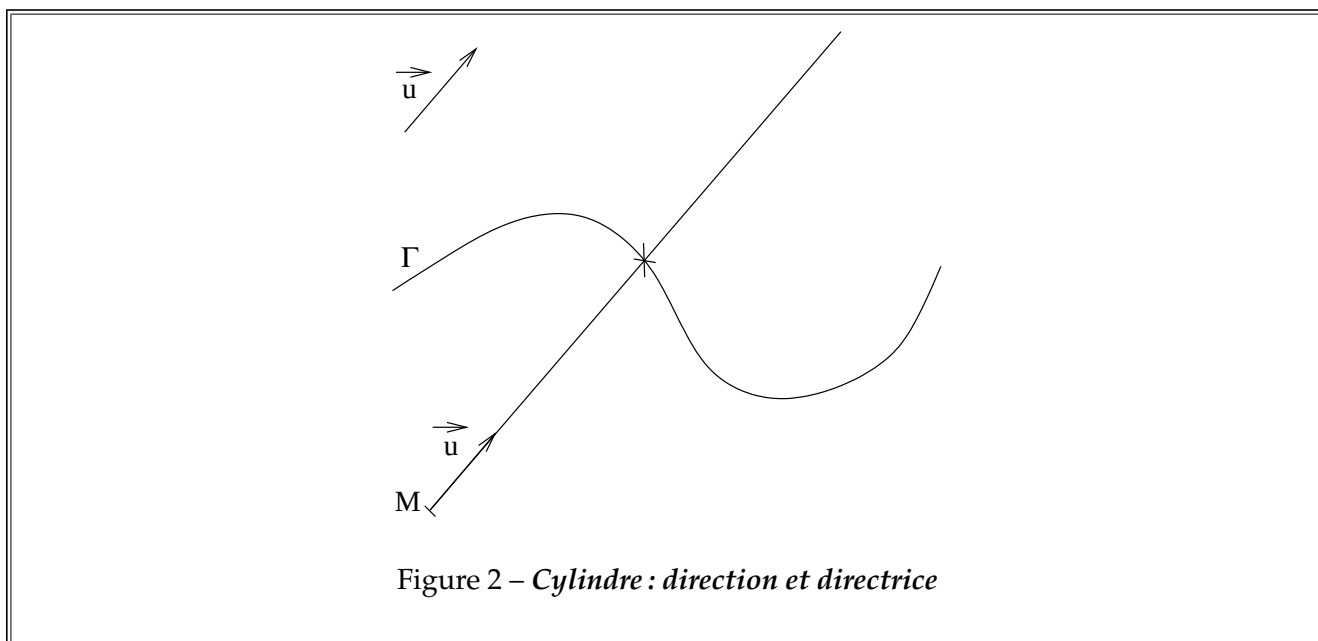
$$(x - x_0) \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

qui clairement ne contient pas λ . ■

1-4 Equation d'un cylindre de direction et de directrice données

On va chercher l'équation d'un cylindre Σ de direction $\vec{u}$ et de directrice Γ donnés.

- Faire une figure symbolique, comme la figure 2, page suivante.



- Partir d'un point **quelconque** du cylindre Σ cherché $M : \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$
- Ecrire que la droite (décrite en paramétrique) $(M, \vec{u})$ rencontre Γ : $\exists \lambda \in \mathbb{R}, M + \lambda \vec{u} \in \Gamma$
Pour cela, on a, en pratique, deux cas selon que Γ est donnée en paramétriques ou par intersection de surfaces.

- Si Γ est définie en paramétriques.

$$\text{On a } \vec{u} : \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}, \text{ et } \Gamma : \begin{cases} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{cases} \quad t \in I$$

$$M : \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \in \Sigma \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \lambda \in \mathbb{R} \\ \exists t \in I \end{cases} \begin{cases} x(t) = X + \lambda\alpha \\ y(t) = Y + \lambda\beta \\ z(t) = Z + \lambda\gamma \end{cases}$$

On a directement une représentation de Σ en nappe paramétrée. Pour obtenir une équation cartésienne, on élimine λ et t entre ces deux équations, on obtient l'équation d'un cylindre Σ' qui contient le cylindre cherché.

- Si Γ est définie par intersection de surfaces.

$$\text{On a } \vec{u} : \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}, \text{ et } \Gamma : \begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

$$M : \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \in \Sigma \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \begin{cases} F(X + \lambda\alpha, Y + \lambda\beta, Z + \lambda\gamma) = 0 \\ G(X + \lambda\alpha, Y + \lambda\beta, Z + \lambda\gamma) = 0 \end{cases}$$

On élimine le paramètre λ , on obtient l'équation d'un cylindre Σ' qui contient Σ le cylindre cherché.

Dans le cas où Γ est définie en paramétriques $\Gamma : \begin{cases} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{cases} t \in I$, on peut aussi paramétrer la droite de

direction $\vec{u} : \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ passant par un point de Γ , on obtient :

$$M : \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \in \Sigma \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \lambda \in \mathbb{R} \\ \exists t \in I \end{cases} \begin{cases} X = x(t) + \lambda\alpha \\ Y = y(t) + \lambda\beta \\ Z = z(t) + \lambda\gamma \end{cases}$$

Par rapport à la méthode précédente, cela revient à changer λ et $-\lambda$. On a encore directement une représentation en nappe paramétrée.

Exemple : On cherche une équation cartésienne du cylindre Σ de direction $\vec{u} : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et de directrice définie

$$\text{par } t \in \mathbb{R} : \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = t \end{cases}. \text{ On a donc } M : \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \in \Sigma \Leftrightarrow \exists \lambda, t \in \mathbb{R} : \begin{cases} \cos t = X + \lambda \\ \sin t = Y + \lambda \\ t = Z \end{cases}.$$

On élimine facilement t , ce qui donne $\begin{cases} \cos Z = X + \lambda \\ \sin Z = Y + \lambda \end{cases}$.

Tout aussi facilement, on élimine λ , et on obtient enfin : $\cos Z - \sin Z = X - Y$ qui est l'équation d'un cylindre Σ' qui contient le cylindre cherché.

1-5 Recherche du contour apparent

On cherche le contour apparent de la surface $\mathcal{S}$ d'équation $F(x, y, z) = 0$ dans la direction $\vec{u} : \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$.

Pour cela, on prend un point M de la surface $\mathcal{S}$, et on écrit que le gradient de F en ce point est normal à $\vec{u}$. Cela donne :

$$\begin{aligned} F(x, y, z) &= 0 \\ \alpha \frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) + \beta \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) + \gamma \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) &= 0 \end{aligned}$$

On a le ainsi contour apparent par intersection de surfaces.

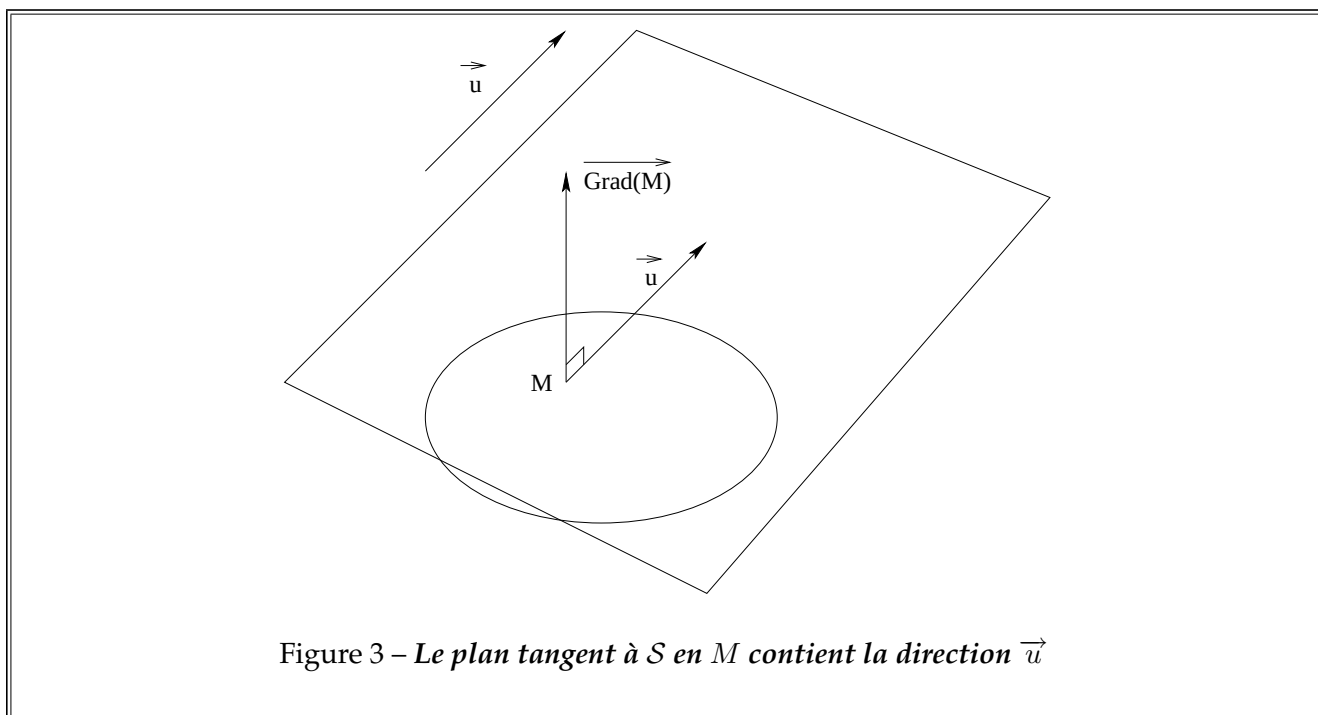
Si on peut, il faut absolument simplifier au maximum les équations de ce contour apparent.

La figure 3, page ci-contre, illustre cette recherche.

1-6 Equation d'un cylindre circonscrit à une surface

Il suffit de chercher le contour apparent, puis de chercher le cylindre de la direction donnée et de directrice ce contour apparent.

Exemple : On cherche une équation cartésienne du cylindre Σ de direction $\vec{u} : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ circonscrit à $\mathcal{S}$ d'équation : $x^2 + y^2 - z = 0$.

Figure 3 – Le plan tangent à S en M contient la direction $\vec{u}$

Le contour apparent est donné comme on vient de le voir par :
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases}.$$

On a donc $M : \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \in \Sigma \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} : \begin{cases} (X + \lambda)^2 + (Y + \lambda)^2 - Z = 0 \\ 2(X + \lambda) + 2(Y + \lambda) = 0 \end{cases}.$

On élimine λ en réécrivant la deuxième équation, $\lambda = -\frac{X+Y}{2}$, et on obtient : $\left(\frac{X-Y}{2}\right)^2 + \left(\frac{Y-X}{2}\right)^2 - Z = 0$ ou encore $(X - Y)^2 - 2Z = 0$ qui est l'équation d'un cylindre Σ' qui contient le cylindre cherché.

2 Cônes

2-1 Cône

Définition : Une **cône de sommet** Ω est formée d'une famille de droites passant par Ω .

Ces droites sont les **génératrices** du cône.

Une courbe qui rencontre toutes les génératrices est une **directrice**.

La figure 4, page suivante, montre des exemples de « cônes ».

Un cône n'est pas, en général, un cône de révolution!

Définition : Si S est une surface, l'ensemble des points M de S tels que le plan tangent à S en M contient Ω est le **contour apparent** de S vu de Ω .

Le cône de sommet Ω et de directrice ce contour apparent est le **cône circonscrit** à S vu de Ω .

2-2 Equation polynomiale d'un cône de sommet O

Théorème : Une surface dont l'équation cartésienne est un polynôme en x, y, z est un cône de sommet O si et seulement si tous les monômes sont de même degré (en degré cumulé en x, y, z).

Démonstration : S d'équation $F(x, y, z) = 0$, alors $\forall \lambda \in \mathbb{R}, F(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = 0$, ce qui prouve que F est de degré homogène en x, y, z . ■

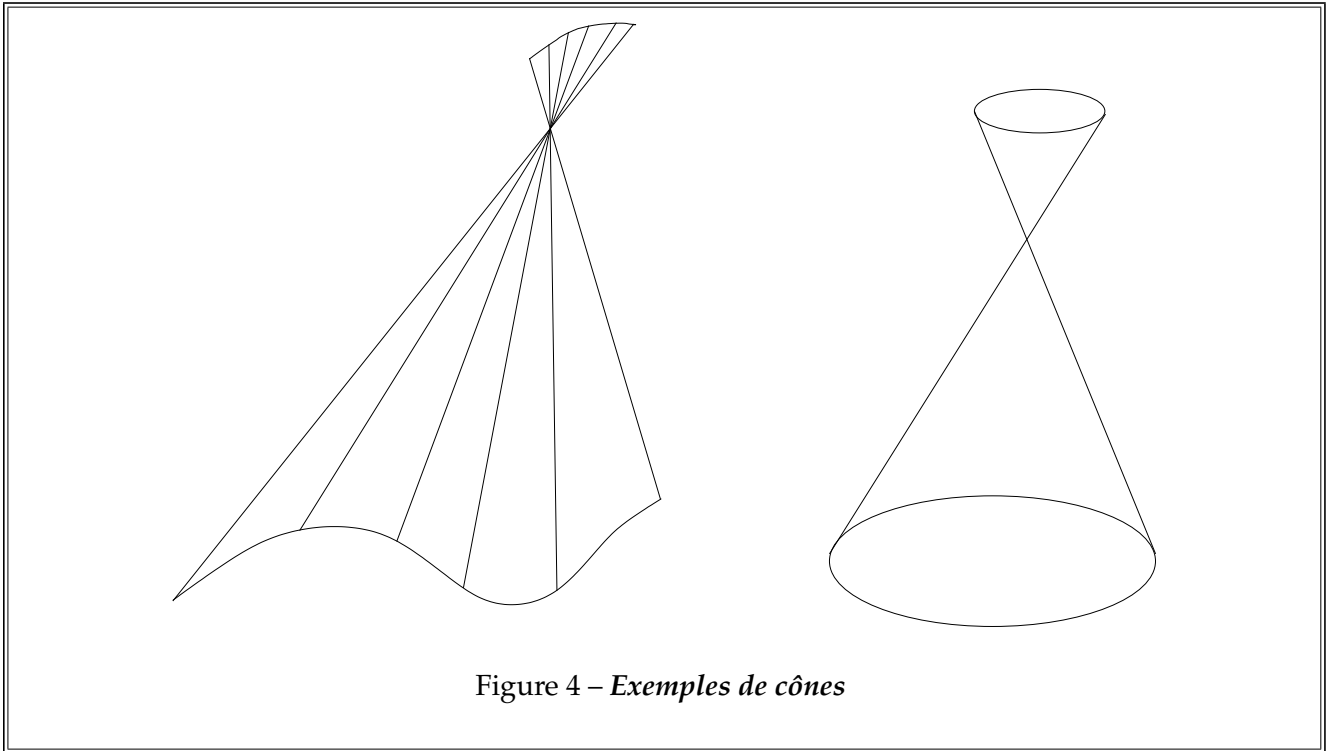


Figure 4 – Exemples de cônes

2-3 Plan tangent le long d'une génératrice

Théorème : Le plan tangent à un cône, le long d'une génératrice, sauf au sommet, est invariant.

Démonstration : Quitte à changer de repère, on prend un cône de sommet O .

On a une directrice $\Gamma : \begin{cases} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{cases}, t \in I$, le cône en paramétrique est donc : $\begin{cases} X = \lambda x(t) \\ Y = \lambda y(t) \\ Z = \lambda z(t) \end{cases}, t \in I, \lambda \in \mathbb{R}$.

Le plan tangent le long de cette génératrice (si seul λ varie) est donc normal à : $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \lambda x'(t) \\ \lambda y'(t) \\ \lambda z'(t) \end{pmatrix}$

comme $\lambda \neq 0$, normal à : $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}$ qui ne contient plus λ .

Comme de plus, tous ces plans tangents contiennent cette génératrice, ils sont confondus. ■

2-4 Equation d'un cône de sommet et directrice donnés

On va chercher l'équation d'un cône Σ de sommet Ω et de directrice Γ donnés.

- Faire une figure symbolique comme la figure 5, page ci-contre.

- Partir d'un point **quelconque** du cône Σ^* cherché $M : \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$.

(Σ^* est le cône époinché, c'est à dire privé de son sommet Ω).

- Ecrire que la droite (décrite en paramétrique) (ΩM) rencontre Γ : $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \Omega + \lambda \overrightarrow{\Omega M} \in \Gamma$

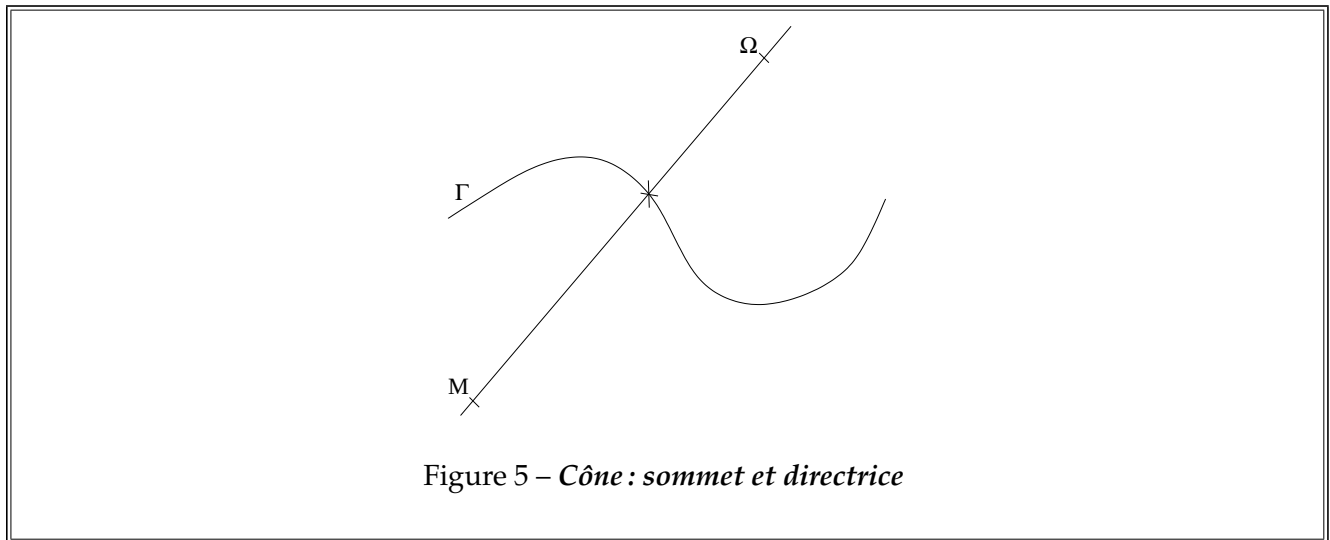


Figure 5 – Cône : sommet et directrice

Pour cela, on a en pratique deux cas selon que Γ est donné en paramétriques ou par intersection de surfaces.

- Si Γ est donné en paramétriques.

$$\text{On a } \Omega : \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \text{ et } \Gamma : \begin{cases} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{cases} \quad t \in I$$

$$M : \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \in \Sigma^* \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \lambda \in \mathbb{R} \\ \exists t \in I \end{cases} \begin{cases} x(t) = a + \lambda(X - a) \\ y(t) = b + \lambda(Y - b) \\ z(t) = c + \lambda(Z - c) \end{cases}$$

On a pratiquement directement une représentation en nappe paramétrée de Σ , pour obtenir une équation cartésienne, on élimine λ et t entre ces deux équations, on obtient l'équation d'un cône Σ' qui contient le cône cherché. Vérifier que $\Omega \in \Sigma'$.

- Si Γ est donné par intersection de surfaces.

$$\text{On a } \Omega : \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \text{ et } \Gamma : \begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

$$M : \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \in \Sigma^* \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \begin{cases} F(a + \lambda(X - a), b + \lambda(Y - b), c + \lambda(Z - c)) = 0 \\ G(a + \lambda(X - a), b + \lambda(Y - b), c + \lambda(Z - c)) = 0 \end{cases}$$

On élimine le paramètre λ , on obtient l'équation d'un cône Σ' qui contient Σ le cône cherché. Vérifier que $\Omega \in \Sigma'$.

Dans le cas où Γ est définie en paramétriques $\Gamma : \begin{cases} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{cases} \quad t \in I$, on peut aussi paramétrer la droite de direction passant par un point de Γ et Ω , on obtient :

$$M : \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \in \Sigma \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \lambda \in \mathbb{R} \\ \exists t \in I \end{cases} \begin{cases} X = a + \lambda(x(t) - a) \\ Y = b + \lambda(y(t) - b) \\ Z = c + \lambda(z(t) - c) \end{cases}$$

Par rapport à la méthode précédente, cela revient à changer λ et $\frac{1}{\lambda}$. On a encore directement une représentation en nappe paramétrée.

Exemple : On cherche une équation cartésienne du cône Σ de sommet $\Omega : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et de directrice définie par

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ x + y + z = 1 \end{cases}.$$

On a donc $M : \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \in \Sigma^* \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} : \begin{cases} (1 + \lambda(X - 1))^2 + (1 + \lambda(Y - 1))^2 + (\lambda Z)^2 = 4 \\ (1 + \lambda(X - 1)) + (1 + \lambda(Y - 1)) + (\lambda Z) = 1 \end{cases}.$

On réécrit ce système $\begin{cases} \lambda^2 ((X - 1)^2 + (Y - 1)^2 + Z^2) + 2\lambda((X - 1) + (Y - 1)) = 2 \\ \lambda((X - 1) + (Y - 1) + Z) = -1 \end{cases}.$

On multiplie la première équation par $((X - 1) + (Y - 1) + Z)^2$ et on remplace $\lambda((X - 1) + (Y - 1) + Z)$ par -1 .

On obtient $((X - 1)^2 + (Y - 1)^2 + Z^2) - 2((X - 1) + (Y - 1) + Z)((X - 1) + (Y - 1)) = 2$.

Ceci est l'équation d'un cône Σ' qui contient le cône cherché.

2-5 Recherche du contour apparent

On cherche le contour apparent de la surface $\mathcal{S}$ d'équation $F(x, y, z) = 0$ vu du point $\Omega : \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

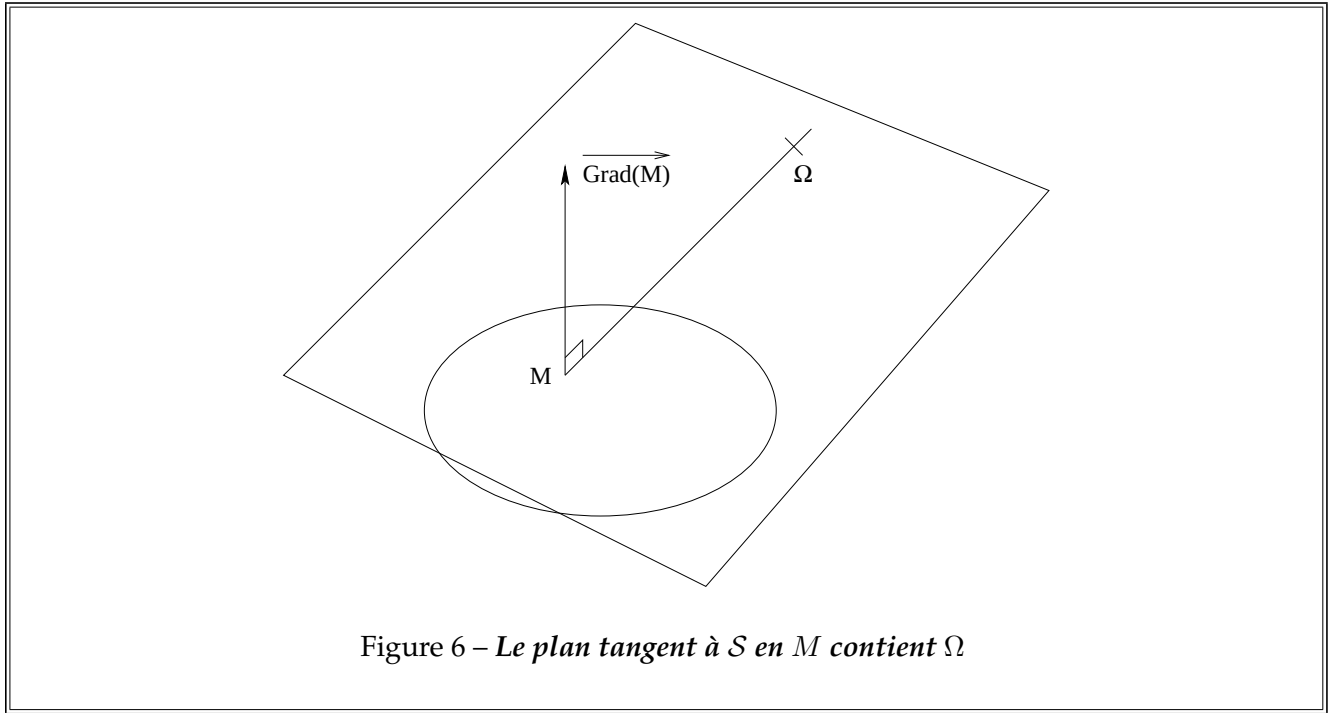
Pour cela, on écrit que le gradient de F en un point M de $\mathcal{S}$ est normal au vecteur $\overrightarrow{\Omega M}$.

Le contour apparent est donc donné par intersection de surfaces :

$$\begin{aligned} F(x, y, z) &= 0 \\ (x - a) \frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) + (y - b) \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) + (z - c) \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) &= 0 \end{aligned}$$

Si on peut, il faut absolument simplifier au maximum les équations de ce contour apparent.

La figure 6, page suivante, illustre cette recherche.

Figure 6 – Le plan tangent à S en M contient Ω

2-6 Equation d'un cône circonscrit à une surface

Il suffit de rechercher le contour apparent, puis de rechercher le cône de sommet donné et de directrice ce contour apparent.

Exemple : On cherche une équation cartésienne du cône Σ de sommet $\Omega : \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et circonscrit à la surface $\mathcal{S}$

définie par $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Le contour apparent est donné par :
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ 2x(x-1) + 2y(y-2) + 2z^2 = 0 \end{cases}.$$

On réécrit ce système :
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ 1 - x - 2y = 0 \end{cases}.$$

On a donc $M : \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \in \Sigma^* \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} : \begin{cases} (1 + \lambda(X-1))^2 + (2 + \lambda(Y-2))^2 + (\lambda Z)^2 = 1 \\ 1 - (1 + \lambda(X-1)) - 2(2 + \lambda(Y-2)) = 0 \end{cases}.$

Système qu'on réécrit :
$$\begin{cases} \lambda^2 ((X-1)^2 + (Y-2)^2 + Z^2) + 2\lambda((X-1) + 2(Y-2)) + 4 = 0 \\ \lambda((X-1) + 2(Y-2)) = -4 \end{cases}.$$

On multiplie la première par $((X-1) + 2(Y-2))^2$ et on remplace $\lambda((X-1) + 2(Y-2))$ par -4 .

Ceci donne, après simplification par -4 :

$$((X-1) + 2(Y-2))^2 + 4((X-1)^2 + (Y-2)^2 + Z^2) + 2(-(X-1) - 2(Y-2))((X-1) + 2(Y-2)) = 0.$$

Ou encore : $-((X-1) + 2(Y-2))^2 + 4((X-1)^2 + (Y-2)^2 + Z^2) = 0.$

Ceci est l'équation d'un cône Σ' qui contient le cône cherché.

3 Surfaces de Révolution

3-1 Surface de révolution d'axe Δ

Définition : Δ une droite de l'espace.

Un cercle de l'espace est d'axe $\Delta \Leftrightarrow \begin{cases} \text{son centre appartient à } \Delta \\ \text{il est tracé dans un plan orthogonal à } \Delta \end{cases}$

Définition : Une **surface de révolution d'axe Δ** est formée d'une famille de cercles d'axe Δ .

Un plan contenant l'axe de révolution est un **plan méridien**, son intersection avec la surface est une **méridienne**.

Les cercles d'axe Δ sont les **parallèles** de la surface.

La méridienne est symétrique par rapport à l'axe de révolution. On parle donc parfois de demi-méridienne.

Une surface de révolution est donc engendrée par la rotation d'une méridienne ou d'une demi-méridienne autour de l'axe de révolution.

3-2 Equation cartésienne d'une surface de révolution d'axe Δ

Théorème : Une surface est de révolution d'axe $Oz \Leftrightarrow$ elle a une équation de la forme

$$F(x^2 + y^2, z) = 0$$

Démonstration : xOz est un plan méridien. La méridienne est symétrique par rapport à Oz .

Elle est donc d'équation $F(x^2, z) = 0$. L'équation en coordonnées cylindriques est donc $F(\rho^2, z) = 0$. On obtient donc en coordonnées cartésiennes $F(x^2 + y^2, z) = 0$. ■

Théorème : Une surface de révolution Σ d'axe Δ a une équation de la forme : $F(S, P) = 0$

avec $\begin{cases} S(x, y, z) = R^2 & \text{l'équation d'une sphère et,} \\ P(x, y, z) = k & \text{l'équation d'un plan.} \end{cases}$

L'axe de révolution Δ est orthogonal à P et passe par le centre de S .

Démonstration : Dans un repère orthonormal centré sur $\Omega \in \Delta$, tel que $\vec{K}$ est dans la direction de Δ , Σ a une équation de la forme : $F_1(X^2 + Y^2, Z) = 0$ Ou encore : $F(X^2 + Y^2 + Z^2, Z) = 0$

Or, en utilisant le produit scalaire et la norme : $\vec{K} = \alpha \vec{i} + \beta \vec{j} + \gamma \vec{k}$

On obtient : $Z = \alpha(x - a) + \beta(y - b) + \gamma(z - c)$ et $X^2 + Y^2 + Z^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2$

Ce qui donne le résultat. ■

3-3 Equation d'une surface de révolution engendrée par la rotation d'une demi-méridienne autour de Oz

Il s'agit de rechercher l'équation d'une surface de révolution d'axe Oz dont on connaît une demi-méridienne ou une méridienne.

Si on a une demi-méridienne dans le plan xOz , elle est d'équation : $f(x, z) = 0$

En complétant par symétrie, la méridienne complète est d'équation : $f(x, z) f(-x, z) = 0$

Ce qu'on réécrit : $F(x^2, z) = 0$

Alors la surface de révolution est simplement d'équation : $F(x^2 + y^2, z) = 0$

Pour cela, on utilise simplement les coordonnées cylindriques.

Exemple : On va chercher l'équation du tore de révolution engendré par la rotation du cercle du plan xOz d'équation $(x - 2)^2 + z^2 = 1$ autour de Oz .

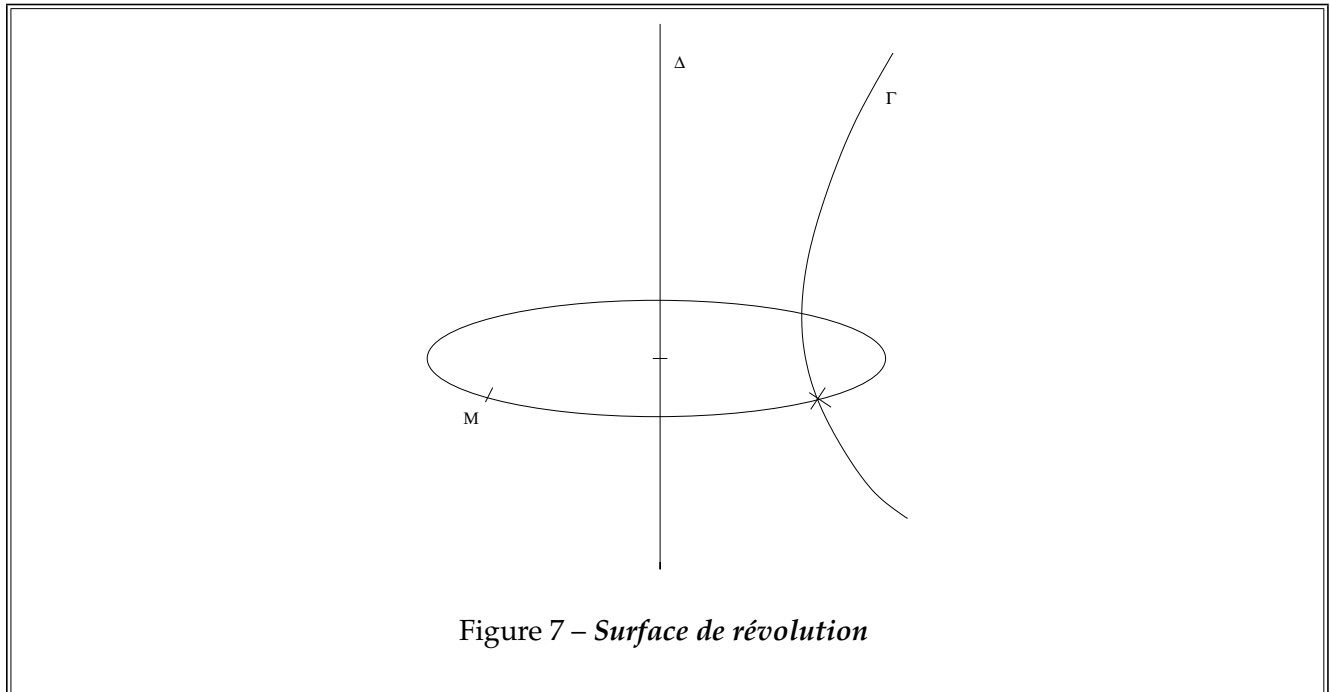
Ce cercle est une demi-méridienne, l'autre demi-méridienne est d'équation $(x - 2)^2 + z^2 = 1$, et donc la méridienne : $((x - 2)^2 + z^2 - 1)((x + 2)^2 + z^2 - 1) = 0$.

Ce qu'on réécrit : $(x^2 - 4)^2 + 2(z^2 - 1)(x^2 + 4) + (z^2 - 1)^2 = 0$. Il suffit alors de remplacer x^2 par $x^2 + y^2$ et on obtient : $(x^2 + y^2 - 4)^2 + 2(z^2 - 1)(x^2 + y^2 + 4) + (z^2 - 1)^2 = 0$.

3-4 Equation d'une surface engendrée par la rotation de Γ autour de Δ

On recherche ici l'équation d'une surface de révolution Σ engendrée par la rotation de Γ autour de Δ . on traite ici le cas général.

- Faire une figure symbolique comme la figure 7, ci-dessous.



- Partir d'un point **quelconque** de la surface Σ cherchée $M : \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$
- Ecrire qu'un point de Γ appartient au cercle d'axe Δ passant par M .
Ce qui revient à écrire qu'un point de Γ appartient à la fois,
 - à la sphère centrée sur un point arbitraire de Δ (choisi le plus simple possible) passant par M et
 - au plan perpendiculaire à Δ passant par M .

Pour cela, on a en pratique deux cas selon que Γ est donné en paramétriques ou par intersection de surfaces.

- Si Γ est définie en paramétriques.

$$\Delta = (\Omega, \vec{u}) \text{ avec } \Omega : \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ et } \vec{u} : \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \text{ et enfin } \Gamma : \begin{cases} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{cases} \quad t \in I$$

$$M \in \Sigma \Leftrightarrow \exists t \in I, \begin{cases} \alpha x(t) + \beta y(t) + \gamma z(t) = \alpha X + \beta Y + \gamma Z \\ (x(t) - a)^2 + (y(t) - b)^2 + (z(t) - c)^2 \\ \quad = (X - a)^2 + (Y - b)^2 + (Z - c)^2 \end{cases}$$

On élimine le paramètre, on obtient l'équation d'une surface Σ' de révolution qui contient Σ la surface cherchée.

- Si Γ est définie par intersection de surfaces.

$$\Delta = (\Omega, \vec{u}) \text{ avec } \Omega : \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ et } \vec{u} : \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \text{ et enfin } \Gamma : \begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

$$M \in \Sigma \Leftrightarrow \exists x_0, y_0, z_0 \in \mathbb{R}, \begin{cases} F(x_0, y_0, z_0) = 0 \\ G(x_0, y_0, z_0) = 0 \\ \alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0 = \alpha X + \beta Y + \gamma Z \\ (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 + (z_0 - c)^2 \\ \quad = (X - a)^2 + (Y - b)^2 + (Z - c)^2 \end{cases}$$

On élimine les paramètres, on obtient l'équation d'une surface Σ' de révolution qui contient Σ la surface cherchée.

Exemple : On va chercher l'équation de la surface de révolution Σ engendrée par la rotation de la courbe

$$\Gamma : \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \\ z = 1 + t \end{cases} \quad \text{autour de l'axe } \Delta \text{ passant par } O \text{ et de vecteur directeur } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Soit $M : \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$ appartenant à la surface, Le cercle d'axe Δ passant par M , le plan passant par M et perpendiculaire à Δ , et Γ ont un point commun. Ce qui donne, compte tenu qu'on remplace le cercle par la sphère de

$$\text{centre } O \text{ passant par } M : \exists t \in \mathbb{R} : \begin{cases} t^2 + t^4 + (1+t)^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 \\ t + t^2 = X + Y \end{cases}.$$

On sort $t^2 = X + Y - t$ de la seconde équation, on le plonge dans la première,

$$\text{ce qui donne : } 1 + 2t + 2(X + Y - t) + (X + Y - t)^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$$

$$\text{puis } 1 + 2(X + Y) + (X + Y)^2 - 2t(X + Y) = X^2 + Y^2 + Z^2.$$

$$\text{On a ainsi : } \begin{cases} 2t(X + Y) = 1 + 2(X + Y) + (X + Y)^2 - (X^2 + Y^2 + Z^2) \\ t + t^2 = X + Y \end{cases}.$$

On multiplie la deuxième par $4(X + Y)^2$ et on remplace en utilisant la première :

$$2(X + Y) \left(1 + 2(X + Y) + (X + Y)^2 - (X^2 + Y^2 + Z^2) \right) + \left(1 + 2(X + Y) + (X + Y)^2 - (X^2 + Y^2 + Z^2) \right)^2 = X + Y.$$

On obtient l'équation d'une surface qui contient la surface de révolution cherchée.

4 Cylindres et cônes de révolution

On ne cherche pas l'équation d'un cylindre ou d'un cône de révolution comme celle d'un cylindre ou d'un cône ni comme celle d'une surface de révolution !...

- 1) Pour un cylindre de révolution défini par son axe $D : (A, \vec{u})$ et son rayon R

On cherche l'ensemble des points M tels que la distance de M à D vaut R : $\frac{\|\vec{AM} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} = R$

Si, au lieu d'avoir le rayon du cylindre, on a un point M_0 de ce cylindre,

$$\text{on écrit alors : } \frac{\|\vec{AM} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} = \frac{\|\vec{AM}_0 \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} \quad \text{qui se simplifie : } \|\vec{AM} \wedge \vec{u}\| = \|\vec{AM}_0 \wedge \vec{u}\|$$

En pratique, dans tous les cas, on élève tout au carré pour avoir une égalité équivalente sans racines carrées.

- 2) Pour un cône de révolution défini par son axe D dirigé par $\vec{u}$, son sommet Ω et son demi angle au sommet θ

On cherche l'ensemble des points M tels que l'angle $(\vec{u}, \widehat{\Omega M})$ a pour mesure θ en tant qu'angle non

$$\text{orienté de droites : } \left| \cos(\vec{u}, \widehat{\Omega M}) \right| = |\cos \theta| \Leftrightarrow \frac{|\vec{u} \cdot \vec{\Omega M}|}{\|\vec{u}\| \|\vec{\Omega M}\|} = |\cos \theta|$$

Si, au lieu d'avoir le demi-angle au sommet θ , on a un point M_0 du cône,

on écrit alors : $\frac{|\vec{u} \cdot \overrightarrow{\Omega M}|}{\|\vec{u}\| \|\overrightarrow{\Omega M}\|} = \frac{|\vec{u} \cdot \overrightarrow{\Omega M_0}|}{\|\vec{u}\| \|\overrightarrow{\Omega M_0}\|}$ qui se simplifie : $\frac{|\vec{u} \cdot \overrightarrow{\Omega M}|}{\|\overrightarrow{\Omega M}\|} = \frac{|\vec{u} \cdot \overrightarrow{\Omega M_0}|}{\|\overrightarrow{\Omega M_0}\|}$

En pratique, dans tous les cas, on élève tout au carré pour éviter les valeurs absolues et les racines carrées.

Sommaire

1 Etude des quadriques	1	2 Identification d'une quadrique	7
1-1 Quadriques propres ou dégénérées . . .	1	2-1 Réduction de la forme quadratique . .	7
1-2 Intersection avec un plan	2	2-2 Transformation de la forme linéaire . .	8
1-3 Quadriques de révolution	2	2-3 Réduction finale	8
1-4 Equations réduites	2	2-4 Exemple	8
1-5 Le paraboloïde elliptique (PE)	3	2-5 Classification selon les valeurs propres	8
1-6 Le paraboloïde hyperbolique (PH) . .	3	2-6 Identification géométrique	9
1-7 L'Ellipsoïde (E)	4		

Figures

1 Paraboloïde Elliptique	3	3 Ellipsoïde	5
2 Paraboloïde Hyperbolique	4	4 Hyperboloïde à une nappe	6
		5 Hyperboloïde à 2 nappes	7

Dans tout le chapitre, $\mathbb{R}^3$ sera muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1 Etude des quadriques

1-1 Quadriques propres ou dégénérées

Définition : Une quadrique est une surface dont l'équation est un polynôme du second degré en x, y, z .

Les quadriques sont en quelque sorte à l'espace ce que les coniques sont au plan.

Certaines quadriques sont dites dégénérées. Ainsi, une « quadrique » peut être :

- vide, par exemple : $x^2 + y^2 + z^2 = -1$
- un point, par exemple : $x^2 + y^2 + z^2 = 0$
- une droite, par exemple : $x^2 + y^2 = 0$
- un plan, par exemple : $x^2 = 0$
- deux plans, par exemple : $xy = 0$ ou $x^2 - y^2 = 0$ ou $x^2 = 1$

D'autres quadriques ne sont que des cas particuliers de surfaces déjà étudiées, ce sont :

- des cylindres à base :
 - elliptique, dont certains de révolution, par exemple : $x^2 + y^2 = 1$ ou $x^2 + 2y^2 = 1$
 - parabolique, par exemple : $y = x^2$, ou
 - hyperbolique, par exemple : $x^2 - y^2 = 1$
- des cônes, dont certains de révolution, par exemple : $x^2 + y^2 - z^2 = 0$.

Les autres quadriques sont les quadriques dites propres, objet réel de ce chapitre.

1-2 Intersection avec un plan

Théorème :

L'intersection d'une quadrique (dégénérée ou non) avec un plan est une conique (dégénérée ou non).

Attention, l'intersection d'une quadrique propre avec un plan peut être une conique dégénérée...

Démonstration : Un changement de repère, orthonormal ou non, transforme une équation du second degré en une équation du second degré.

On peut donc supposer que le plan est d'équation $\mathcal{P} : z = 0$.

$$\mathcal{Q} : ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz + gx + hy + iz + j = 0$$

a pour intersection avec $\mathcal{P}$:

$$\mathcal{C} : ax^2 + by^2 + 2dxy + gx + hy + j = 0$$

On a bien l'équation générale d'une conique. ■

1-3 Quadriques de révolution

L'intersection d'une quadrique avec un plan étant une conique, l'intersection d'une quadrique de révolution d'axe Δ avec un plan méridien est une conique dont Δ est axe de symétrie...

Une quadrique de révolution est donc engendrée par la rotation d'une conique autour d'un de ses axes de symétrie.

Certaines quadriques ainsi obtenues sont des cylindres et des cônes de révolution.

Mais certaines quadriques sont de « nouvelles » surfaces, quadriques dites propres.

On va ainsi trouver :

- Le parabolôïde de révolution, obtenu en faisant tourner une parabole autour de son axe.
- L'ellipsoïde de révolution, obtenu en faisant tourner une ellipse autour d'un de ses axes.
Il sera en forme de « ballon de rugby » si l'axe de révolution est l'axe focal de l'ellipse et en forme de « soucoupe » si l'axe de révolution est l'axe non focal de l'ellipse.
- L'hyperboloïde de révolution à une nappe, obtenu en faisant tourner une hyperbole autour de son axe non focal.
- L'hyperboloïde de révolution à deux nappes, obtenu en faisant tourner une hyperbole autour de son axe focal.

1-4 Equations réduites des quadriques propres

Définition : Il y a 5 types de quadriques propres :

- Le parabolôïde elliptique (PE) d'équation réduite : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{2z}{c}$, $a > 0, b > 0, c \neq 0$
Si $a = b$, il est de révolution d'axe Oz .
- Le parabolôïde hyperbolique (PH) d'équation réduite : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{2z}{c}$, $a > 0, b > 0, c \neq 0$
Il n'est jamais de révolution.
- L'ellipsoïde (E) d'équation réduite : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $a > 0, b > 0, c > 0$
Si $a = b$, il est de révolution d'axe Oz .
- L'hyperboloïde à une nappe (H1) d'équation réduite : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, $a > 0, b > 0, c > 0$
Si $a = b$, il est de révolution d'axe Oz .
- L'hyperboloïde à deux nappes (H2) d'équation réduite : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$, $a > 0, b > 0, c > 0$
Si $a = b$, il est de révolution d'axe Oz .

On verra plus loin qu'on peut toujours faire un changement de repère orthonormal tel que dans ce repère l'équation d'une quadrique donnée est réduite.

Toutes, sauf le paraboloïde hyperbolique possèdent une « version » de révolution. On a ainsi facilement une description géométrique de ces quadriques en dilatant selon un ou deux axes la quadrique de révolution correspondante.

1-5 Le paraboloïde elliptique (PE)

Equation réduite: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2pz$ avec $a > 0$ $b > 0$

Si $a = b$ il est de révolution d'axe Oz , alors obtenu en faisant tourner une parabole autour de son axe de symétrie.

Il est formé de paraboles (intersection avec un plan vertical) et d'ellipses.

L'intersection avec le plan tangent est réduite à un point. Tout point est en ballon. Il ne contient pas de droites.

Il n'y a pas non plus de centre de symétrie.

On obtient un paramétrage classique en s'inspirant des coordonnées cylindriques :

$$t \in \mathbb{R}^+, \theta \in [0, 2\pi] \left\{ \begin{array}{l} x = a t \cos \theta \\ y = b t \sin \theta \\ z = \frac{t^2}{2p} \end{array} \right.$$

Le paraboloïde elliptique est représenté figure 1, ci-dessous.

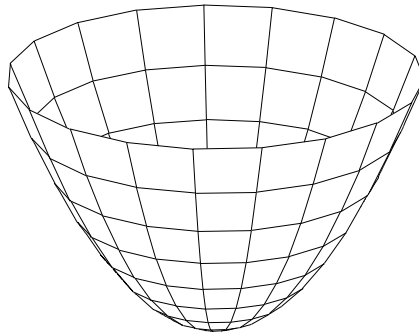


Figure 1 – *Paraboloïde Elliptique*

1-6 Le paraboloïde hyperbolique (PH)

Equation réduite: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2pz$ avec $a > 0$ $b > 0$

Il n'est jamais de révolution, mais contient deux familles de droites obtenues en factorisant

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right) \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right)$$

ce qui donne : $\begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = k \\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{2pz}{k} \end{cases}$ et $\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = k \\ \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \frac{2pz}{k} \end{cases}$ avec k non nul.

Pour un point donné de ce paraboloidé, on obtient les deux droites tracées sur ce paraboloidé et qui passent par ce point en remplaçant x, y, z par les coordonnées du point, ce qui donne à chaque fois la valeur correspondante de k .

L'intersection avec le plan tangent est formée de 2 droites. Par tout point, il passe deux droites distinctes tracées sur la surface, intersection avec le plan tangent à ce point. Tout point est en col.

Il n'a pas de centre de symétrie.

Il est formé d'hyperboles et de paraboles.

On obtient un paramétrage classique en s'inspirant des coordonnées cylindriques associées à de la trigonomé-

trie hyperbolique : $t \in \mathbb{R}, \theta \in \mathbb{R} \begin{cases} x = a t \operatorname{ch} \theta \\ y = b t \operatorname{sh} \theta \\ z = \frac{t^2}{2p} \end{cases}$ pour $\left| \frac{x}{a} \right| > \left| \frac{y}{b} \right|$

On inverse ch et sh et le signe de z pour $\left| \frac{x}{a} \right| < \left| \frac{y}{b} \right|$

Le paraboloidé hyperbolique est représenté figure 2, ci-dessous.

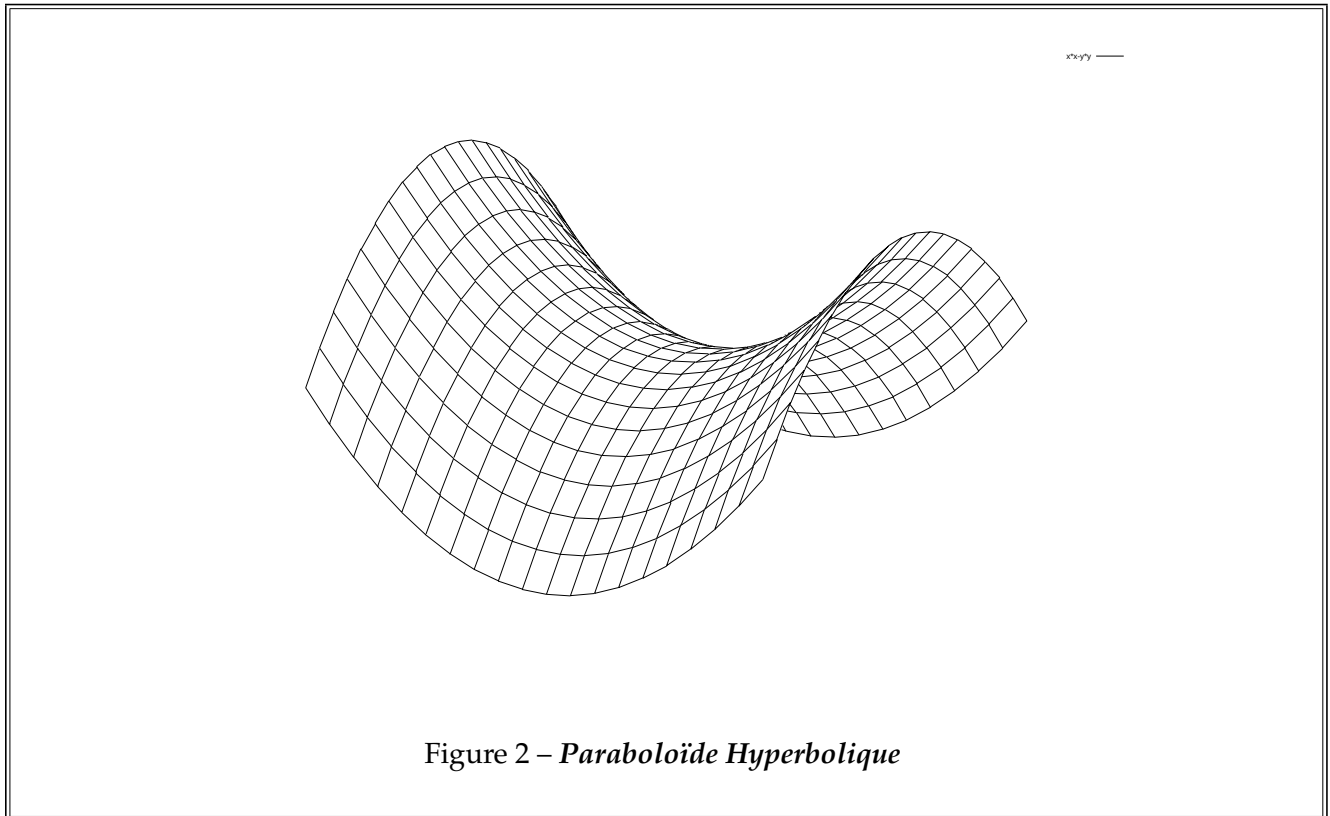


Figure 2 – *Paraboloidé Hyperbolique*

1-7 L'Ellipsoïde (E)

Equation réduite centrée : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ avec $a > 0$ $b > 0$ $c > 0$

Si $a = b$ il est de révolution d'axe Oz . Il est alors obtenu en faisant tourner une ellipse autour d'un de ses axes de symétrie.

L'intersection avec le plan tangent est réduite à un point. Il ne contient pas de droites. Tout point est en ballon.

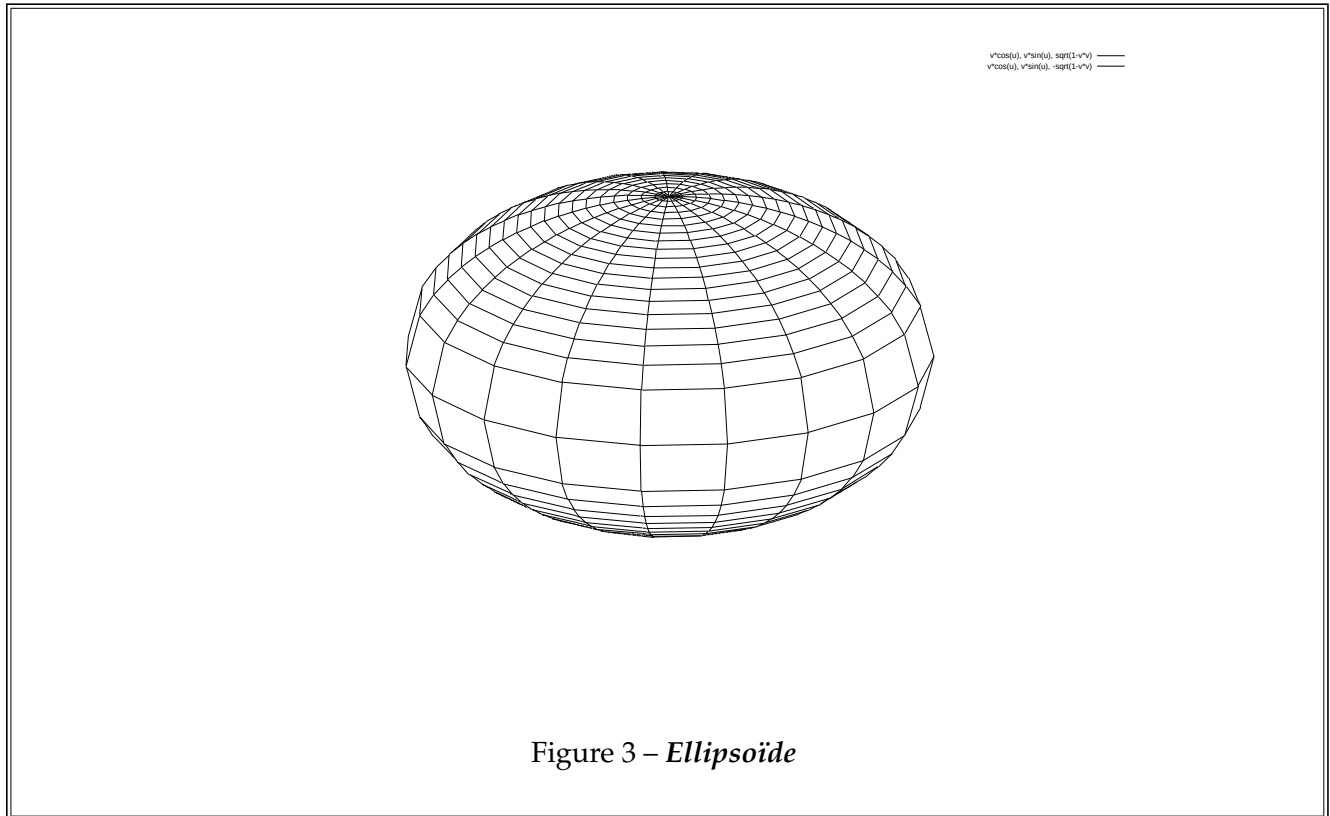
L'origine est centre de symétrie.

Il est formé d'ellipses.

On obtient un paramétrage classique en s'inspirant des coordonnées sphériques :

$$\theta \in [0, 2\pi], \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \begin{cases} x = a \cos \varphi \cos \theta \\ y = b \cos \varphi \sin \theta \\ z = c \sin \varphi \end{cases}$$

L'ellipsoïde est représenté figure 3, ci-dessous.



1-8 L'hyperboloïde à une nappe ($H1$)

Equation réduite centrée: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ avec $a > 0$ $b > 0$ $c > 0$

Si $a = b$ il est de révolution d'axe $0z$, alors obtenu en faisant tourner une hyperbole autour de son axe de symétrie non focal.

Le **cône asymptote** est d'équation: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$

Il contient deux familles de droites obtenues en factorisant $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2}$ et $1 - \frac{y^2}{b^2}$ comme différences de 2 carrés :

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \left(1 - \frac{y}{b}\right) \left(1 + \frac{y}{b}\right)$$

Ce qui donne: $\begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = k \left(1 - \frac{y}{b}\right) \\ \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = \frac{1}{k} \left(1 + \frac{y}{b}\right) \end{cases}$ et $\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = k \left(1 - \frac{y}{b}\right) \\ \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \frac{1}{k} \left(1 + \frac{y}{b}\right) \end{cases}$ avec k non nul.

Pour un point donné de cet hyperboloïde, on obtient les deux droites tracées sur cet hyperboloïde et qui passent par ce point en remplaçant x, y, z par les coordonnées du point, ce qui donne à chaque fois la valeur correspondante de k .

L'intersection avec le plan tangent est formée de 2 droites. Par tout point, il passe deux droites distinctes tracées sur la surface, intersection avec le plan tangent à ce point. Tout point est un point col.

L'origine est centre de symétrie.

Il est formé d'ellipses, de paraboles et d'hyperboles.

On obtient un paramétrage classique en s'inspirant des coordonnées sphériques, et en utilisant de la trigono-

$$\text{métrie hyperbolique: } \varphi \in \mathbb{R}, \theta \in [0, 2\pi] \begin{cases} x = a \operatorname{ch} \varphi \cos \theta \\ y = b \operatorname{ch} \varphi \sin \theta \\ z = c \operatorname{sh} \varphi \end{cases}$$

L'hyperboloïde à une nappe est représenté figure 4, ci-dessous.

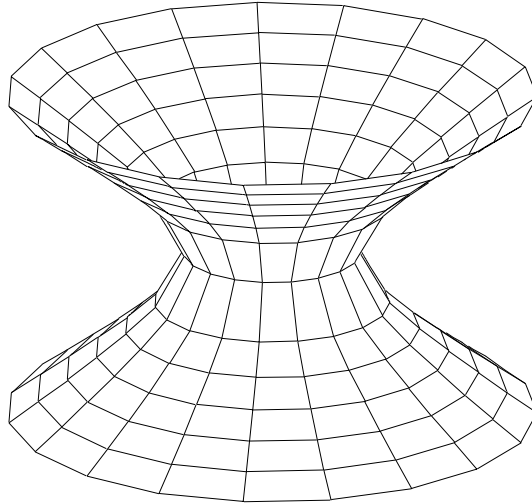


Figure 4 – *Hyperboloïde à une nappe*

1-9 L'hyperboloïde à 2 nappes (H_2)

Equation réduite centrée: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ avec $a > 0$ $b > 0$ $c > 0$

Si $a = b$ il est de révolution d'axe Oz , alors obtenu en faisant tourner une hyperbole autour de son axe focal.

Le **cône asymptote** est d'équation: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$

L'intersection avec le plan tangent est réduite à un point. H_2 ne contient pas de droites. Tout point est en ballon.

L'origine est centre de symétrie.

Il est formé d'ellipses, de paraboles et d'hyperboles.

On obtient un paramétrage classique **d'une seule des deux nappes** en s'inspirant des coordonnées sphériques,

$$\text{et en utilisant de la trigonométrie hyperbolique: } \varphi \in \mathbb{R}, \theta \in [0, 2\pi] \begin{cases} x = a \operatorname{sh} \varphi \cos \theta \\ y = b \operatorname{sh} \varphi \sin \theta \\ z = c \operatorname{ch} \varphi \end{cases}$$

L'hyperboloïde à deux nappes est représenté figure 5, page ci-contre.

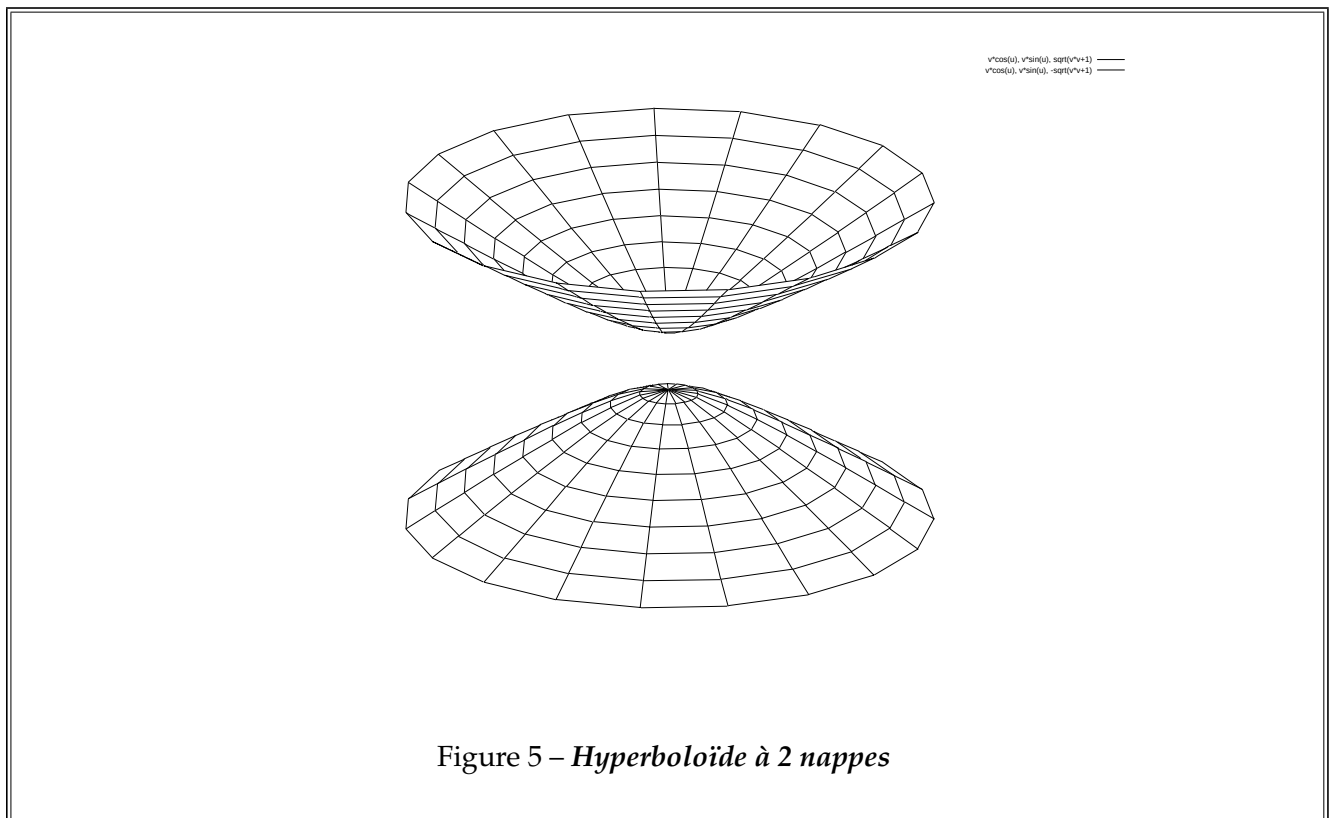


Figure 5 – *Hyperboloïde à 2 nappes*

2 Identification d'une quadrique

On part d'un polynôme quelconque du second degré en x , y et z :

$$Q : \underbrace{ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz}_{\text{Forme Quadratique}} + \underbrace{gx + hy + iz + j}_{\text{Forme Linéaire}} = 0$$

2-1 Réduction de la forme quadratique

Il faut réduire la forme quadratique dans le cas où il y a des termes en xy , xz ou yz . Sinon, on va directement au paragraphe suivant (transformation de la forme linéaire).

- On repère la forme quadratique formée des termes du second degré :

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz$$

- On considère sa matrice $\begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix}$ qu'on diagonalise dans une base orthonormale directe de vecteurs propres, avec P la matrice de passage et λ , μ et ν les trois valeurs propres. Cela revient à faire une rotation du repère.

- Alors : $ax^2 + 2bxy + 2cxz + dy^2 + 2eyz + fz^2 = \lambda X^2 + \mu Y^2 + \nu Z^2$ avec $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$

Si on a deux valeurs propres égales non nulles, la quadrique est de révolution.

2-2 Transformation de la forme linéaire

La relation précédente : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$ permet de transformer la forme linéaire.

On obtient alors l'équation de la quadrique dans un nouveau repère qui a subi une rotation par rapport au repère de départ.

2-3 Réduction finale

Dans ce cas, il n'y a plus de termes ni en xy , ni en xz ni en yz , (ni en $XY...$).

- Avaler si possible les termes en x , y et en z (ou X, Y, Z) dans des carrés correspondants par une transformation du type : $x^2 + ax = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4}$
Cela revient à faire une translation de l'origine du repère.
- Se ramener ensuite à une des formes canoniques décrites, en avalant au besoin dans le cas des paraboloides la constante dans le terme correspondant à la valeur propre nulle. C'est alors une nouvelle translation du repère.
 - On trouve des paraboloides elliptiques et hyperboliques, hyperboloides à 1 ou 2 nappes et ellipsoïdes (ou sphères),
 - mais aussi des quadriques dégénérées: cylindres, cônes, ..., point, vide.

2-4 Exemple

On va chercher à identifier la quadrique d'équation $z - xy = 1$.

Pour éviter les fractions dans la matrice, on écrit : $2z - 2xy = 2$.

La forme quadratique est : $-2xy$ de matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ qui a pour polynôme caractéristique : $-\lambda^3 + \lambda = 0$.

Les valeurs propres sont 0, 1 et -1 , toutes simples. La forme linéaire est non nulle, on a besoin de la matrice de passage (orthogonale).

$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ convient, l'ordre des vecteurs correspondant à l'ordre annoncé des valeurs propres.

Dans cette nouvelle base, $-2xy = Y^2 - Z^2$.

La forme linéaire est $2z$ et $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$ soit $z = X$.

L'équation dans la nouvelle base est donc $2X + Y^2 - Z^2 = 2$ ou encore $Z^2 - Y^2 = 2(X - 1) = 2X'$ par une translation du repère.

On a un paraboloïde hyperbolique.

2-5 Classification selon les valeurs propres

Si on a 2 valeurs propres égales non nulles, la quadrique est de révolution.

- 3 valeurs propres strictement de même signe, on a :
 - un ellipsoïde,

- un point,
- le vide.
- 2 valeurs propres strictement de même signe et une nulle, on a :
 - un paraboloïde elliptique,
 - un cylindre elliptique,
 - une droite ou le vide.
- 2 valeurs propres strictement de signes différents et une nulle, on a :
 - un paraboloïde hyperbolique,
 - un cylindre hyperbolique,
 - 2 plans sécants.
- 2 valeurs propres strictement d'un signe, la troisième strictement de l'autre, on a :
 - un hyperboloïde à une ou deux nappes,
 - un cône.
- une valeur propre non nulle et 0 valeur propre double, on a :
 - un cylindre parabolique,
 - 2 plans parallèles, un plan ou le vide.

Si une des variables est absente, c'est un cylindre.

2-6 Identification géométrique

En récapitulant ce qu'on vient de voir, on peut déterminer les intersections possibles des quadriques avec un plan quelconque ou avec un plan tangent. On peut aussi voir celles qui ont un centre de symétrie et celles qui peuvent être de révolution.

	E	PE	PH	H1	H2
Ellipse	×	×		×	×
Parabole		×	×	×	×
Hyperbole			×	×	×
Vide	×	×			×
Plan tangent : deux droites, tout point est en col			×	×	
Plan tangent : un point, tout point est en ballon	×	×			×
Il y a un centre de symétrie	×			×	×
Peut être de révolution	×	×		×	×

Sommaire

		2-5	Exemple	3
1	Isométries Affines	1		
1-1	Application affine	1		
1-2	Isométrie vectorielle associée	1		
1-3	Principe général d'étude	2		
1-4	Isométries affines sans points fixes	2		
2	Isométries affines du plan	2		
2-1	Tous les points sont fixes	2		
2-2	Une droite fixe Δ	2		
2-3	Un seul point fixe Ω	2		
2-4	Pas de points fixes	3		
3	Isométries affines de l'espace	4		
3-1	Tous les points sont fixes	4		
3-2	Un plan fixe Π	4		
3-3	Une droite fixe Δ	4		
3-4	Un seul point fixe Ω	4		
3-5	Pas de points fixes	4		
3-6	Exemple	5		
4	Décomposition en produit de réflexions	6		
4-1	Dans le plan	6		
4-2	Dans l'espace	7		

Notations

Dans tout le chapitre, E désigne un espace vectoriel euclidien de dimension 2 ou 3, muni d'une base orthonormale directe, notée : $(\vec{i}, \vec{j})$ ou $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ selon les cas.

$\mathcal{E}$ désigne un espace affine euclidien de dimension 2 ou 3, muni d'un repère orthonormal direct, noté $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ou $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ selon les cas.

On dira que E est l'espace vectoriel sous-jacent à $\mathcal{E}$.

En général, on note M' l'image d'un point M par une application affine.

De même, si Δ est une droite affine, sa **direction** $\vec{\Delta}$ est la droite vectorielle associée, c'est à dire l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{MN}$ avec M et N appartenant à Δ .

De même également avec Π un plan affine et $\vec{\Pi}$ le plan vectoriel associé, toujours appelé sa **direction**.

Définition : Si $\mathcal{E}$ est un plan affine, une **réflexion** est une symétrie orthogonale par rapport à une droite affine.

Définition : Si $\mathcal{E}$ est un espace affine de dimension 3, une **réflexion** est une symétrie orthogonale par rapport à un plan affine.

Il est clair que la notion de réflexion est à manier avec soin, puisqu'elle dépend de la dimension de l'espace dans lequel on travaille.

1 Isométries Affines

1-1 Application affine

Définition : f est une application affine si et seulement si

$$\varphi : E \rightarrow E, \text{ définie par : } \varphi(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{f(M)f(N)} = \overrightarrow{M'N'} \text{ est bien définie et est linéaire.}$$

Définition : $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ est une **isométrie affine** $\Leftrightarrow \forall A, B \in \mathcal{E}, d(f(A), f(B)) = d(A', B') = d(A, B)$

On dit qu'une isométrie affine conserve les distances.

1-2 Isométrie vectorielle associée

Théorème : Soit f une isométrie affine.

Alors $\varphi : E \rightarrow E$, définie par $\varphi(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{f(M)f(N)} = \overrightarrow{M'N'}$ est une isométrie vectorielle, c'est à dire un automorphisme orthogonal.

On dit que φ est l'**isométrie vectorielle associée** à f .

Démonstration : Notons simplement que : $\|\varphi(\overrightarrow{MN})\| = \|\overrightarrow{M'N'}\| = d(M', N') = d(M, N) = \|\overrightarrow{MN}\|$
 Conserver la distance des points équivaut à conserver la norme des vecteurs. ■

En pratique, dans le repère et la base donnés, l'isométrie vectorielle associée s'obtient en « éliminant » les constantes.

Cela permet d'avoir la matrice de φ dans la base orthonormale. Cette matrice est bien sûr orthogonale.

On rappelle que φ , une isométrie vectorielle, est une symétrie orthogonale si et seulement si sa matrice dans une base orthonormale est symétrique.

Théorème : f est une isométrie affine $\Leftrightarrow \varphi$ est orthogonale

Démonstration : $\forall A, B \in \mathcal{E}, d(f(A), f(B)) = d(A', B') = d(A, B) \Leftrightarrow \forall \vec{u} \in E, \|\varphi(\vec{u})\| = \|\vec{u}\|$
 On obtient cette équivalence en posant $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ ■

Définition : Si φ est directe, f est un **déplacement**, si φ est indirecte, f est un **antidéplacement**.

1-3 Principe général d'étude

Le principe général d'étude repose sur deux éléments :

- La recherche des **points fixes** de f .
- L'identification de φ l'isométrie vectorielle associée.

Dans le cas où il y a un ou plusieurs points fixes, f est une sorte de « copie affine » de φ .

La description de f s'obtient en remplaçant, dans la description de φ ,

- les espaces vectoriels par
- les espaces affines correspondants qui passent par un des points fixes de f .

1-4 Isométries affines sans points fixes

Théorème : Une isométrie affine sans points fixes se décompose toujours **de façon unique** comme la composée **commutative** :

- une isométrie affine avec points fixes et
- une translation de vecteur dans la direction des points fixes de l'isométrie précédente.

La démonstration est admise.

En pratique, si on appelle $\overrightarrow{E_1}$ l'ensemble des vecteurs propres de φ pour la valeur propre 1, on cherche les points M tels que $\overrightarrow{MM'} \in \overrightarrow{E_1}$. Cela fournit :

- les points fixes de l'isométrie affine avec points fixes et
- le vecteur de la translation qui est $\overrightarrow{MM'}$ pour un point M tel que $\overrightarrow{MM'} \in \overrightarrow{E_1}$.

2 Isométries affines du plan

On cherche d'abord les points fixes de l'isométrie affine.

2-1 Tous les points sont fixes

C'est l'identité ! C'est un déplacement.

2-2 Une droite fixe Δ

C'est une symétrie orthogonale par rapport à Δ , qui est un anti-déplacement. On dit aussi que c'est une réflexion. Notons que normalement on a remarqué que la matrice de φ est symétrique.

2-3 Un seul point fixe Ω

C'est une rotation de centre Ω et d'angle l'angle de la rotation vectorielle associée. C'est un déplacement.

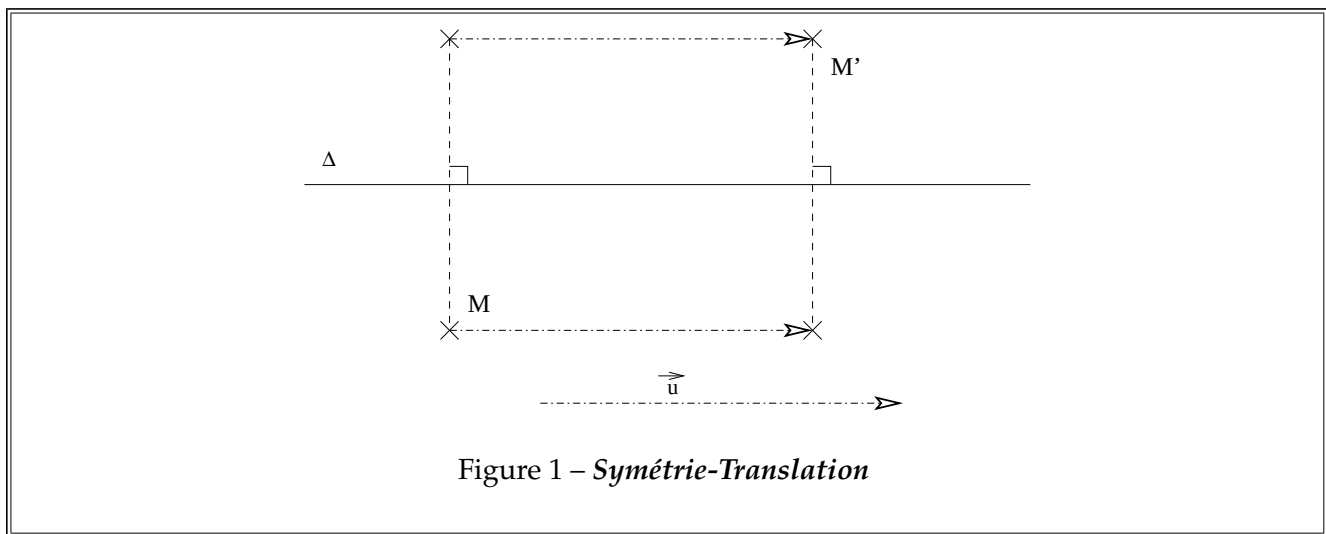
2-4 Pas de points fixes

- Cela peut être une translation, qui est un déplacement.
- Sinon, l'isométrie vectorielle associée est une symétrie orthogonale par rapport à une droite vectorielle $\vec{\Delta}$. La matrice de φ , qui est une isométrie vectorielle, dans une base orthonormale, est d'ailleurs alors symétrique.

L'isométrie affine est la composée d'une symétrie orthogonale par rapport à une droite Δ de direction $\vec{\Delta}$ et d'une translation. On trouve Δ et le vecteur de la translation en cherchant les points M tels que $\overrightarrow{MM'} \in \vec{\Delta}$. Ce que, de toutes façons, on a déjà vu sur la matrice qui est symétrique.

On appelle parfois cette transformation une **symétrie-glissée**. C'est un anti-déplacement.

La figure 1, ci-dessous, montre bien que l'on peut inverser l'ordre de la symétrie et de la translation.



2-5 Exemple

On va étudier la transformation donnée dans un repère orthonormal par : $\begin{cases} x' = y - 1 \\ y' = x + 3 \end{cases}$.

L'application affine associée a pour matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ qui est bien une matrice orthogonale, donc une matrice d'isométrie.

Comme cette matrice est symétrique, la transformation vectorielle associée est une symétrie orthogonale. C'est la symétrie par rapport à la droite vectorielle d'équation $y = x$ de vecteur directeur $\vec{u} : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

L'isométrie affine n'a clairement aucun point fixe !

On cherche donc les points M tels que $\overrightarrow{MM'} // \vec{u}$, c'est à dire $y - 1 - x = x + 3 - y$, c'est donc la droite d'équation : $y - x = 2$.

Et on a alors pour tous les points de cette droite : $\overrightarrow{MM'} : \begin{pmatrix} y - 1 - x \\ x + 3 - y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

On trouve ce vecteur en prenant un point M quelconque de cette droite.

L'isométrie affine est donc la composée :

- de la symétrie orthogonale par rapport à la droite Δ d'équation $y - x = 2$ et,
- de la translation de vecteur $\vec{v} : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3 Isométries affines de l'espace

On cherche d'abord les points fixes de l'isométrie affine.

3-1 Tous les points sont fixes

C'est l'identité ! C'est un déplacement.

3-2 Un plan fixe Π

C'est la symétrie orthogonale par rapport à ce plan, qui est un anti-déplacement. On dit aussi que c'est une réflexion. La matrice de φ dans la base orthonormale est symétrique.

3-3 Une droite fixe Δ

C'est une rotation d'axe Δ . L'angle est l'angle de l'isométrie vectorielle associée. Rappelons la nécessité d'orienter $\vec{\Delta}$, pour déterminer l'angle, c'est à dire simplement ici le signe du sinus. C'est un déplacement.

Une rotation affine du plan est toujours un déplacement.

Ainsi, dans l'espace, une symétrie par rapport à une droite est un déplacement, c'est aussi une rotation d'angle π ; tandis que dans le plan, une symétrie par rapport à une droite est un anti-déplacement.

3-4 Un seul point fixe Ω

- Dans le cas le plus simple, c'est la symétrie par rapport à Ω . L'isométrie vectorielle associée est l'opposé de l'identité. C'est un anti-déplacement.
- Sinon, l'isométrie vectorielle est la composée d'une rotation d'axe $\vec{\Delta}$ et de la symétrie orthogonale par rapport $\vec{\Pi}$ orthogonal à $\vec{\Delta}$.

On appelle Δ la droite $(\Omega, \vec{\Delta})$ et Π le plan $(\Omega, \vec{\Pi})$.

L'isométrie affine est la composée de la rotation d'axe Δ et de même angle et de la symétrie orthogonale par rapport à Π . C'est un anti-déplacement.

3-5 Pas de points fixes

- Cela peut être une translation, qui est un déplacement.
- Cela peut être un vissage, composée d'une rotation et d'une translation dans la direction de l'axe. C'est un déplacement. L'isométrie vectorielle associée est une rotation vectorielle. Si l'angle est π , la matrice de φ dans une base orthonormale est symétrique.

On trouve l'axe et le vecteur de la translation en cherchant les points M tels que $\overrightarrow{MM'} // \vec{u}$, avec $\vec{u}$, vecteur directeur de l'axe de la rotation vectorielle associée.

La figure 2, page suivante, montre bien que l'on peut inverser l'ordre de la rotation et de la translation.

- Sinon, l'isométrie vectorielle associée est une symétrie orthogonale par rapport à un plan vectoriel $\vec{\Pi}$. La matrice de φ , qui est une isométrie vectorielle, dans une base orthonormale, est d'ailleurs alors symétrique. On doit déjà s'en être aperçu !

L'isométrie affine est la composée d'une symétrie orthogonale par rapport à un plan Π de direction $\vec{\Pi}$ et d'une translation. On trouve Π et le vecteur de la translation en cherchant les points M tels que $\overrightarrow{MM'} \in \vec{\Pi}$.

On appelle parfois cette transformation une **symétrie-glissée**. C'est un anti-déplacement.

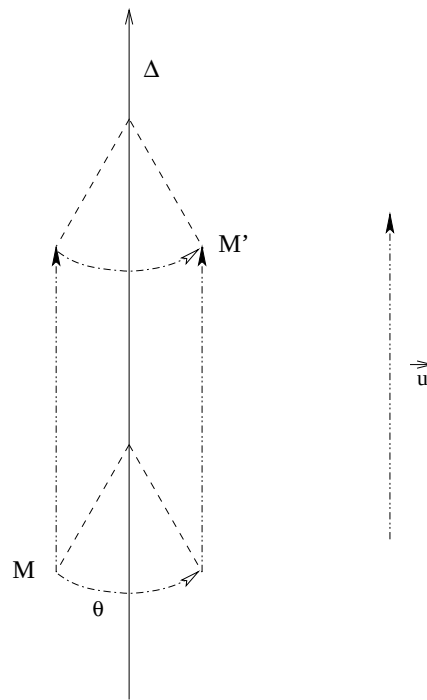


Figure 2 – Vissage

3-6 Exemple

On va étudier la transformation donnée dans un repère orthonormal par :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(-2x - y + 2z) + 1 \\ y' = \frac{1}{3}(2x - 2y + z) + 1 \\ z' = \frac{1}{3}(x + 2y + 2z) + 3 \end{cases}$$

L'application affine associée a pour matrice $\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ qui est bien une matrice orthogonale, donc une

matrice d'isométrie.

Elle n'est pas symétrique, on n'a donc pas une symétrie orthogonale.

Le troisième vecteur est le produit vectoriel des deux premiers, c'est une isométrie directe.

L'isométrie vectorielle associée est donc une rotation vectorielle.

On a $1 + 2 \cos \theta = -\frac{2}{3}$ en utilisant la trace, ce qui donne : $\cos \theta = -\frac{5}{6}$.

L'axe de cette rotation vectorielle est donné par les vecteurs invariants : $\begin{cases} -5x - y + 2z = 0 \\ 2x - 5y + z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases}$ ou encore, en

éliminant les z des deux premières équation grace à la troisième : $\begin{cases} -3x + 3y = 0 \\ 3x - 3y = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases}$ et enfin : $\begin{cases} y = x \\ z = 3x \end{cases}$

Il s'agit de la droite vectorielle engendrée par $\vec{u} : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Pour savoir si l'angle de la rotation est $\pm \arccos\left(-\frac{5}{6}\right)$, il faut calculer le signe du déterminant $\begin{vmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & 1 \\ 0 & \frac{2}{3} & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & 3 \end{vmatrix}$.

Ce signe est positif, donc l'isométrie vectorielle associée est donc la rotation d'axe dirigé par $\vec{u} : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et

d'angle $\arccos\left(-\frac{5}{6}\right)$.

L'isométrie affine est donc soit une rotation affine, soit un vissage.

Pour le déterminer, il faut rechercher les points fixes : $\begin{cases} -5x - y + 2z + 3 = 0 \\ 2x - 5y + z + 3 = 0 \\ x + 2y - z + 9 = 0 \end{cases}$ ou encore, en éliminant les z

des deux premières équation grace à la troisième : $\begin{cases} -3x + 3y + 21 = 0 \\ 3x - 3y + 12 = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases}$.

Ce système est incompatible, il n'y a pas de points fixes, c'est un vissage.

L'axe de ce vissage est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MM'} \parallel \vec{u}$.

Ce qui donne $\begin{pmatrix} -5x - y + 2z + 3 \\ 2x - 5y + z + 3 \\ x + 2y - z + 9 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ équivalent au système : $\begin{cases} -5x - y + 2z = 2x - 5y + z \\ x + 2y - z = 3(2x - 5y + z) \end{cases}$

ou : $\begin{cases} -7x + 4y + z = 0 \\ -5x + 17y - 4z = 0 \end{cases}$ ou : $\begin{cases} -7x + 4y + z = 0 \\ -33x + 33y = 0 \end{cases}$ et enfin : $\begin{cases} y = x \\ z = 3x \end{cases}$

Il s'agit de la droite affine passant par l'origine et de vecteur directeur $\vec{u}$.

Le vecteur de la translation est : $\overrightarrow{OO'} : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

L'isométrie affine est le vissage d'axe orienté $\Delta : (O, \vec{u})$, d'angle $\arccos\left(-\frac{5}{6}\right)$ et de vecteur de translation $\vec{u}$.

4 Décomposition en produit de réflexions

Théorème : Toute isométrie affine du plan et de l'espace se décompose en produit de réflexions.

Démonstration : Compte tenu des décompositions faites, il suffit de montrer qu'une translation et qu'une rotation se décompose en produit de réflexions. Bien sûr, il faudra traiter le cas où on travaille dans le plan et le cas où on travaille dans l'espace.

4-1 Dans le plan

a) Décomposition d'une translation

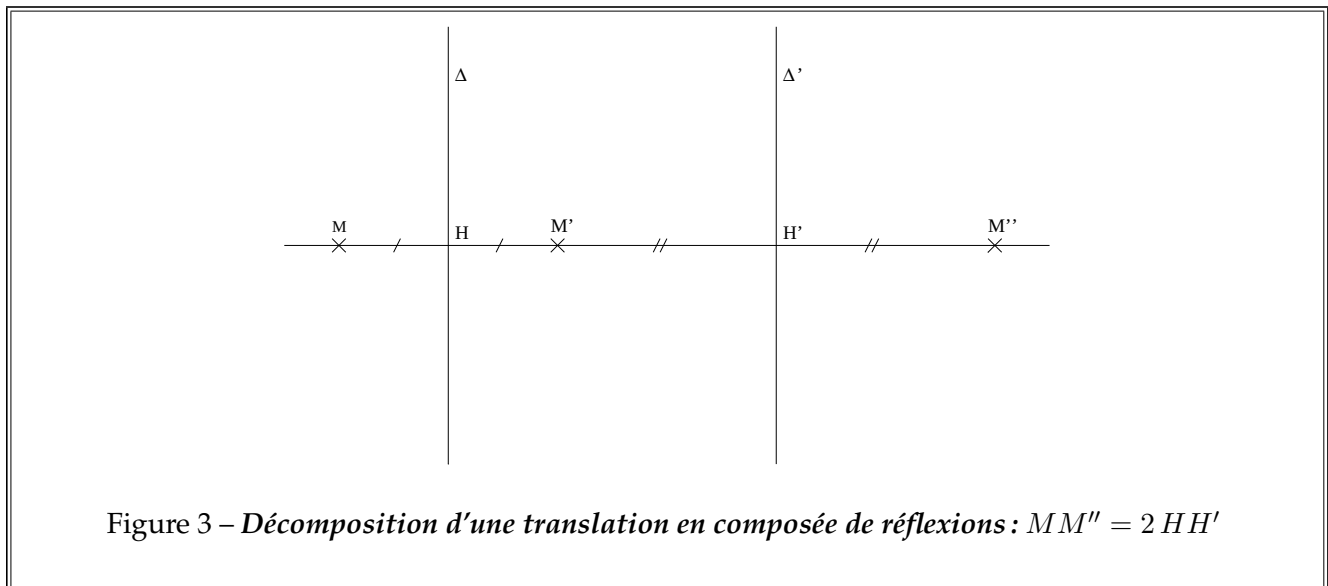
Il suffit de prendre deux droites perpendiculaires à $\vec{u}$, Δ et Δ' telles que Δ' est translatée de Δ de $\frac{1}{2}\vec{u}$.

Alors $T_{\vec{u}} = S_{\Delta'} \circ S_{\Delta}$.

En effet, on note $M' = S_{\Delta}(M)$ et $M'' = S_{\Delta'} \circ S_{\Delta}(M)$. On note H et H' les projections de M sur Δ et Δ' . On a $\overrightarrow{HH'} = \frac{1}{2}\vec{u}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MM''} &= \overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'M''} \\ &= 2\overrightarrow{HM'} + 2\overrightarrow{M'H'} \\ &= 2\overrightarrow{HH'} = \vec{u}\end{aligned}$$

La figure 3, ci-dessous, illustre bien que : $\overrightarrow{MM''} = 2\overrightarrow{HH'}$



b) Décomposition d'une rotation de centre Ω et d'angle θ

Il suffit de prendre deux droites passant par Ω , Δ et Δ' telles que Δ' est Δ tournée de $\frac{1}{2}\theta$.

Alors $R_{\theta} = S_{\Delta'} \circ S_{\Delta}$.

En effet, on note $M' = S_{\Delta}(M)$ et $M'' = S_{\Delta'} \circ S_{\Delta}(M)$.

$$\begin{aligned}(\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M''}}) &= (\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}}) + (\widehat{\overrightarrow{\Omega M'}, \overrightarrow{\Omega M''}}) \\ &= 2(\widehat{\overrightarrow{\Delta}, \overrightarrow{\Omega M'}}) + 2(\widehat{\overrightarrow{\Omega M'}, \overrightarrow{\Delta'}}) \\ &= 2(\widehat{\overrightarrow{\Delta}, \overrightarrow{\Delta'}}) = \theta\end{aligned}$$

La figure 4, page suivante, illustre que : $(\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M''}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{\Delta}, \overrightarrow{\Delta'}})$

4-2 Dans l'espace

a) Décomposition d'une translation

Il suffit de prendre deux plans perpendiculaires à $\vec{u}$, Π et Π' telles que Π' est translatée de Π de $\frac{1}{2}\vec{u}$.

Alors $T_{\vec{u}} = S_{\Pi'} \circ S_{\Pi}$

En effet, On note $M' = S_{\Pi}(M)$ et $M'' = S_{\Pi'} \circ S_{\Pi}(M)$. On note H et H' les projections de M sur Π et Π' . On a

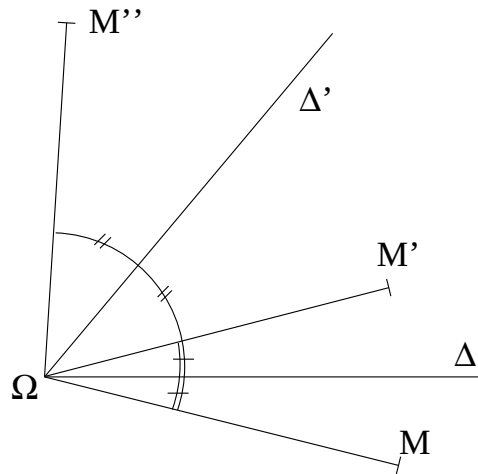


Figure 4 – *Décomposition d'une rotation en composée de réflexions* : $(\Omega M, \Omega M'') = 2(\Delta, \Delta')$

$$\overrightarrow{HH'} = \frac{1}{2} \vec{u}.$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MM''} &= \overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'M''} \\ &= 2\overrightarrow{HM'} + 2\overrightarrow{M'H'} \\ &= 2\overrightarrow{HH'} = \vec{u} \end{aligned}$$

La figure est du même type que dans le plan.

b) Décomposition d'une rotation d'axe Δ et d'angle θ

Il suffit de prendre deux plans contenant Δ , Π et Π' tels que Π' est Π tournée de $\frac{1}{2}\theta$ autour de Δ .

Alors $R_\theta = S_{\Pi'} \circ S_\Pi$.

En effet, on note $M' = S_\Pi(M)$ et $M'' = S_{\Pi'} \circ S_\Pi(M)$. On note encore Ω le point de Δ tel que $\overrightarrow{\Omega M} \perp \Delta$.

$$\begin{aligned} (\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M''}}) &= (\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}}) + (\widehat{\overrightarrow{\Omega M'}, \overrightarrow{\Omega M''}}) \\ &= 2(\widehat{\Pi, \overrightarrow{\Omega M'}}) + 2(\widehat{\overrightarrow{\Omega M'}, \Pi'}) \\ &= 2(\widehat{\Pi, \Pi'}) = \theta \end{aligned}$$

La figure est du même type que dans le plan. ■

Sommaire

1 Syst. Différentiels Linéaires du 1^{er} ordre	1	3 Eq. Différentielle non Linéaire du 1^{er} ordre	7
1-1 Système linéaire du premier ordre . . .	1	3-1 Eq. différentielle du premier ordre . . .	7
1-2 Cas où A est diagonalisable	1	3-2 Premier ordre à variables séparables . .	7
1-3 A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$, pas sur $\mathbb{R}$.	2	3-3 Système autonome	8
1-4 A triangularisable, non diagonalisable	3	4 Solutions Approchées d'une Eq. Diff.	8
1-5 Cas d'un système avec second membre	3	4-1 Méthode d'Euler	8
2 Eq. Différentielles Linéaires du 2nd ordre	4	4-2 Autres équations différentielles	9
2-1 Linéaire du second ordre	4	4-3 Problèmes de la méthode	9
2-2 Existence des solutions	4	5 Compléments	9
2-3 Recherche des solutions	5	5-1 Avec Maple	9
2-4 Recollement de solutions	6	5-2 Pour les physiciens	10
		5-3 Les mathématiciens du chapitre	10

Ce chapitre étudie trois types différents d'équations et systèmes différentiels :

- Les systèmes linéaires du premier ordre à coefficients constants.
- Les équations différentielles linéaires d'ordre 2.
- Les équations différentielles non linéaires du premier ordre.

Même si les fonctions cherchées peuvent être à valeur complexe, la variable est bien sûr réelle ! D'autre part, les solutions d'un système ou d'une équation différentiels n'ont de sens que sur un **intervalle**.

1 Systèmes Différentiels Linéaires du 1^{er} ordre

1-1 Système linéaire du premier ordre

Définition : Soit A est une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et : $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$,

un vecteur de classe C^k sur I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Le **système linéaire d'ordre 1 à coefficients constants et sans second membre** est : $X'(t) = AX(t)$.

Résoudre ce système, c'est trouver tous les vecteurs $X(t)$ qui le vérifient.

On ne traite que les systèmes à coefficients constants, c'est à dire où A ne dépend pas de t .

1-2 Cas où A est diagonalisable

Théorème : Soit A est une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), diagonalisable.

On note $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ les valeurs propres et $(U_1, U_2, \dots, U_n)$ une base de vecteurs propres associés.

Alors, l'ensemble des solutions de $X' = AX$, sur I un intervalle quelconque, est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n , et :

$$X(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} U_1 + \alpha_2 e^{\lambda_2 t} U_2 + \dots + \alpha_n e^{\lambda_n t} U_n$$

Si, de plus, on fixe la condition initiale $X(0) = X_0$, la solution existe et est unique.

Démonstration : On appelle P la matrice de passage dont la $i^{\text{ème}}$ colonne est le vecteur U_i , alors, $P^{-1}AP = D$, matrice diagonale des λ_i . On pose : $Y = P^{-1}X$, $X = PY$, et on a : $Y' = P^{-1}X'$, $X' = PY'$ car P est **constant**, puisque A est constant.

$$X' = AX$$

$$PY' = APY$$

$$Y' = P^{-1}APY = DY$$

On pose $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}$, le système devient : $\begin{cases} y'_1 = \lambda_1 y_1 \\ y'_2 = \lambda_2 y_2 \\ \vdots \\ y'_n = \lambda_n y_n \end{cases}$ qui se résout en : $\begin{cases} y_1 = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} \\ y_2 = \alpha_2 e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ y_n = \alpha_n e^{\lambda_n t} \end{cases}$

Enfin, $X = PY$ donne alors : $X(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} U_1 + \alpha_2 e^{\lambda_2 t} U_2 + \dots + \alpha_n e^{\lambda_n t} U_n$ ■

On remarquera que dans ce cas, le calcul de P^{-1} est inutile.

1-3 Cas où A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ mais pas sur $\mathbb{R}$

Si on résout le système sur $\mathbb{C}$ comme on vient de le faire, les valeurs propres complexes non réelles sont 2 à 2 conjuguées et on peut prendre des vecteurs propres 2 à 2 conjugués. Pour un tel couple de valeurs propres :

$$\text{Vect} \left(e^{\lambda t} U, e^{\bar{\lambda} t} \bar{U} \right) = \text{Vect} \left(\text{Re} \left(e^{\lambda t} U \right), \text{Im} \left(e^{\lambda t} U \right) \right)$$

En effet :

$$e^{\lambda t} U = \text{Re} \left(e^{\lambda t} U \right) + i \text{Im} \left(e^{\lambda t} U \right)$$

$$e^{\bar{\lambda} t} \bar{U} = \text{Re} \left(e^{\lambda t} U \right) - i \text{Im} \left(e^{\lambda t} U \right)$$

et d'autre part :

$$\text{Re} \left(e^{\lambda t} U \right) = \frac{e^{\lambda t} U + e^{\bar{\lambda} t} \bar{U}}{2}$$

$$\text{Im} \left(e^{\lambda t} U \right) = \frac{e^{\lambda t} U - e^{\bar{\lambda} t} \bar{U}}{2i}$$

Or, $\text{Re} \left(e^{\lambda t} U \right)$ et $\text{Im} \left(e^{\lambda t} U \right)$ sont deux solutions du système différentiel sur $\mathbb{R}$, formant une famille libre. Ce qui donne le théorème suivant :

Théorème : Dans le cas où A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ mais pas sur $\mathbb{R}$, il suffit dans la famille génératrice des solutions de remplacer, pour les valeurs propres non réelles,

$$\alpha e^{\lambda t} U + \beta e^{\bar{\lambda} t} \bar{U} \quad \text{par} \quad a \text{Re} \left(e^{\lambda t} U \right) + b \text{Im} \left(e^{\lambda t} U \right)$$

avec a et b réels.

Exemple : On va résoudre le système différentiel : $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = -x + 2y + z \\ z' = x + z \end{cases}$.

C'est un système différentiel linéaire du premier ordre sans second membre.

Sa matrice est : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

et son polynôme caractéristique est : $(1 - \lambda)^2 (2 - \lambda) + 1 + (1 - \lambda) = (2 - \lambda) \left((1 - \lambda)^2 + 1 \right)$.

On a donc trois valeurs propres distinctes 2 , $1 + i$ et $1 - i$. Par nécessité, on travaille pour le moment sur $\mathbb{C}$.

Les vecteurs propres suivants : $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} i \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -i \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, forment, dans l'ordre des valeurs propres, une

base de chaque sous-espace propre.

Sur $\mathbb{C}$, les solutions sont donc :
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta e^{(1+i)t} \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma e^{(1-i)t} \begin{pmatrix} -i \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta e^t \begin{pmatrix} -\sin t + i \cos t \\ -\cos t - i \sin t \\ \cos t + i \sin t \end{pmatrix} + \gamma e^t \begin{pmatrix} -\sin t - i \cos t \\ -\cos t + i \sin t \\ \cos t - i \sin t \end{pmatrix},$$

ce qui fait que sur $\mathbb{R}$, les solutions sont :
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b e^t \begin{pmatrix} -\sin t \\ -\cos t \\ \cos t \end{pmatrix} + c e^t \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

1-4 Cas où A est triangularisable, non diagonalisable

Dans le cas où A est triangularisable, non diagonalisable, on considère P de passage telle que

$$T = P^{-1}AP$$

avec T triangulaire supérieure.

L'énoncé du problème doit vous guider pour trouver T et P .

On pose : $X(t) = PY(t)$, on obtient : $X'(t) = PY'(t)$, car P est constant.

On reporte dans le système différentiel et on obtient : $Y'(t) = TY(t)$.

Travaillons maintenant sur un exemple pour plus de clarté, en considérant au départ directement la matrice

triangulaire T :
$$\begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ y'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} y'_1 &= 2y_1 \\ y'_2 &= 3y_2 + y_3 \\ y'_3 &= 3y_3 \end{aligned}$$

On résout en partant de la dernière équation, et en remontant équation par équation, puis $X = PY$ permet de conclure.

Remarquons que le calcul de P^{-1} est toujours inutile.

1-5 Cas d'un système avec second membre

Remarquons qu'il suffit de trouver une solution particulière qu'on ajoute à la solution générale du système sans second membre, puisque le problème est linéaire. Ce qu'on fait maintenant n'a donc d'intérêt que si **on ne connaît pas de solution particulière au système...**

On a ici : $X'(t) = AX(t) + B(t)$ avec : $B(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$ des fonctions continues sur I .

A est à coefficients constants, diagonalisable. On utilise les mêmes notations que ci-dessus, avec P la matrice de passage et D la matrice diagonale et $X = PY$. Ce qui donne :

$$\begin{aligned} X' &= AX + B \\ PY' &= APY + B \\ Y' &= P^{-1}APY + P^{-1}B = DY + P^{-1}B \end{aligned}$$

On note : $P^{-1}B(t) = \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \\ \vdots \\ c_n(t) \end{pmatrix}.$

Le système devient :

$$\begin{aligned} y_1' &= \lambda_1 y_1 + c_1(t) \\ y_2' &= \lambda_2 y_2 + c_2(t) \\ &\vdots \\ y_n' &= \lambda_n y_n + c_n(t) \end{aligned}$$

On cherche une solution particulière de chaque équation et $X = PY$ permet de conclure.

Remarquons qu'on a ici besoin de P^{-1} pour calculer $P^{-1}B$.

En fait, on peut souvent faire plus rapide, et sans calcul de P^{-1} quand la dimension est petite et le vecteur second membre assez simple, comme un polynôme par une exponentielle.

Il suffit, pour **chaque** variable, de chercher une solution particulière correspondant à un second membre combinaison linéaire de **toutes** les composantes du vecteur second membre.

Dans le cas d'un polynôme par une exponentielle, les racines de l'équation caractéristique du cours de Sup sont remplacées par les valeurs propres.

Enfin, on ne tient compte des conditions initiales que lorsqu'on a la solution générale du système avec second membre.

2 Equations Différentielles Linéaires du second ordre

2-1 Equation différentielle linéaire du second ordre

Définition : Une équation différentielle linéaire du second ordre est une équation du type :

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x) \quad (\text{E})$$

où a, b, c, d sont des fonctions continues sur I un intervalle où, de plus, a ne s'annule pas.

L'équation homogène associée à (E) est :

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0 \quad (\text{H})$$

2-2 Existence des solutions

Théorème : Soit :

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x) \quad (\text{E})$$

où a, b, c, d sont des fonctions continues de $I \rightarrow \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), I un intervalle où, de plus, a ne s'annule pas.

Soit $x_0 \in I$, et les conditions initiales $\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \end{cases}$

Alors (E) admet une solution unique de classe C^2 sur I qui vérifie les conditions initiales.

On ne tient compte des conditions initiales que lorsqu'on a la solution générale de l'équation avec second membre.

Théorème : Soit :

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0 \quad (\text{H})$$

où a, b, c, d sont des fonctions continues de $I \rightarrow \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), I un intervalle où, de plus, a ne s'annule pas. Alors l'ensemble des solutions de (H) sur I a une structure d'espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbb{K}$.

Ces deux théorèmes sont admis.

On notera l'intérêt d'avoir un espace vectoriel de dimension 2 car, la connaissance de 2 solutions non proportionnelles donne alors immédiatement l'ensemble des solutions.

Théorème : La solution générale de (E) est la somme d'une solution particulière de (E) et de la solution générale de (H).

Démonstration : Soit $y_1(x)$ une solution particulière de (E), $y(x)$ une solution quelconque de (E), alors, $(y(x) - y_1(x))$ est solution de (H).

Réciproquement, si $z(x)$ est solution de (H), $(y_1(x) + z(x))$ est alors solution de (E). ■

En pratique, il nous suffit donc d'avoir :

- Une solution particulière de (E),
- Deux solutions non proportionnelles de (H).

2-3 Recherche des solutions

Il n'y a pas de méthode pour trouver dans tous les cas une solution de (E) ou de (H).

L'énoncé doit vous guider.

- Si on recherche une solution sous forme polynomiale, on cherchera d'abord son degré.
- On peut aussi faire faire un changement de variable (attention alors à la notation « prime » ambiguë) ou un changement de fonction inconnue.
- Enfin, on peut vous demander de rechercher une solution développable en série entière. On n'emploie ce procédé qu'à la demande de l'énoncé.

Il existe **un seul procédé** (à notre programme) pour construire la solution générale de (E) à partir d'une solution de (H).

C'est la **variation de la constante**.

La variation de la constante n'est pas un procédé miraculeux !

Elle peut donner des calculs longs et difficiles.

On la réserve donc au cas où **on n'a pas d'autre procédé** pour obtenir une telle solution particulière.

- Soit $h(x)$ une solution de (H).
- On pose :

$$\begin{aligned} y(x) &= z(x) h(x) \\ y'(x) &= z'(x) h(x) + z(x) h'(x) \\ y''(x) &= z''(x) h(x) + 2z'(x) h'(x) + z(x) h''(x) \end{aligned}$$

On reporte dans (E) :

$$\begin{aligned} a(x) y''(x) + b(x) y'(x) + c(x) y(x) &= z(x) \underbrace{(a(x) h''(x) + b(x) h'(x) + c(x) h(x))}_{=0} \\ &\quad + z'(x) (2a(x) h'(x) + b(x) h(x)) + z''(x) a(x) h(x) \\ d(x) &= z'(x) (2a(x) h'(x) + b(x) h(x)) + z''(x) a(x) h(x) \end{aligned}$$

- On obtient donc une équation différentielle linéaire du premier ordre en z' :

$$z''(x) a(x) h(x) + z'(x) (2a(x) h'(x) + b(x) h(x)) = d(x)$$

On résout d'abord cette équation sans le second membre. Ce qui donne :

$$\begin{aligned} z'(x) &= K \exp \left(- \int \frac{(2a(x)h'(x) + b(x)h(x))}{a(x)h(x)} dx \right) \\ &= K \exp \left(- \int \frac{2h'(x)}{h(x)} + \frac{b(x)}{a(x)} dx \right) \\ &= \frac{K}{(h(x))^2} \exp \left(- \int \frac{b(x)}{a(x)} dx \right) \end{aligned}$$

Il suffit alors de terminer ce calcul et, d'éventuellement trouver une solution particulière à l'équation avec second membre. On pourra au besoin utiliser encore une fois la technique de la variation de la constante.

- On obtient donc $z'(x)$ qu'il suffit de primitiver.
- Enfin, on n'oublie pas que $y(x) = z(x)h(x)$ est la solution générale de (E).
- Il faut absolument travailler **le plus longtemps possible** en calcul formel pour bénéficier des simplifications constatées...

Exemple : On va résoudre l'équation différentielle : $x(x+1)y'' + (x+2)y' - y = 0$.

On cherchera d'abord une solution polynomiale.

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire à coefficients non constants et sans second membre.

On la résout sur un intervalle I ne contenant pas 0 ni 1.

On cherche une condition nécessaire sur le degré du polynôme, en n'écrivant à chaque fois que le terme de plus haut degré : $y = x^n + \dots$ et donc : $y' = nx^{n-1} + \dots$ et enfin : $y'' = n(n-1)x^{n-2} + \dots$ qu'on reporte dans l'équation : $x(x+1)y'' + (x+2)y' - y = (n(n-1) + n - 1)x^n + \dots = (n-1)^2 x^n + \dots = 0$, on en conclut que $n = 1$.

On pose donc $y = x + a$, d'où $y' = 1$ et $y'' = 0$. On a donc $(x+2) - x - a = 0$ et donc $a = 2$.

$h = x + 2$ est solution de l'équation sur I .

On applique maintenant la variation de la constante : $y = hz$, ce qui donne, en écourtant le calcul, qu'on mène en théorie :

$$x(x+1)hz'' + (2x(x+1)h' + (x+2)h)z' = 0.$$

$$\begin{aligned} z' &= K \exp \left(- \int \frac{2h'}{h} + \frac{x+2}{x(x+1)} dx \right) = \frac{K}{(x+2)^2} \exp \left(- \int \frac{x+2}{x(x+1)} dx \right) = \frac{K}{(x+2)^2} \exp \left(- \int \frac{2}{x} - \frac{1}{x+1} dx \right) \\ &= K \frac{x+1}{x^2(x+2)^2} = \frac{K}{4} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+2)^2} \right) \text{ en utilisant les décompositions classiques en éléments simples.} \end{aligned}$$

$$\text{On obtient : } z = \frac{K}{4} \left(\frac{1}{(x+2)} - \frac{1}{x} \right) + L.$$

$$\text{Ce qui donne finalement } y = \frac{K}{4} \left(1 - \frac{x+2}{x} \right) + L(x+2) = \frac{K'}{x} + L(x+2).$$

2-4 Recollement de solutions

On résout une équation ou un système différentiels sur un **intervalle** où $a(x)$ ne s'annule pas.

Assez souvent, on demande de recoller les solutions sur des intervalles séparés par un point où $a(x)$ s'annule.

Pour recoller en γ les solutions sur deux intervalles, f sur $] \alpha, \gamma[$ et g sur $] \gamma, \beta[$ il faut chercher à évaluer

- les limites (finies) de f et g en γ
- les limites (finies) de f' et g' en γ
- et éventuellement, les limites (finies) de f'' et g'' en γ , dans le cas d'une équation différentielle du second ordre.

On note qu'il est important **d'appeler de façons différentes** les constantes utilisées par

- f sur $] \alpha, \gamma[$ et,
- g sur $] \gamma, \beta[$.

Exemple : On va chercher sur $\mathbb{R}$, les solutions de l'équation différentielle : $y'' + y = |x|$.

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants et avec second membre. L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ est un espace affine de dimension 2 car la fonction valeur absolue est continue.

Les solutions de l'équation homogène associée sont $y = A \cos x + B \sin x$.

On s'occupe maintenant de l'équation avec second membre.

Sur $]-\infty, 0]$ une solution particulière est $y = -x$, la solution générale : $y = A \cos x + B \sin x - x$.

Sur $[0, +\infty[$ une solution particulière est $y = x$, la solution générale : $y = C \cos x + D \sin x + x$.

Il s'agit maintenant de recoller ces deux solutions en 0.

- Egalité des limites de y en 0.
En 0^- , la limite est A et en 0^+ , la limite est C : $A = C$.
- Egalité des limites de y' en 0.
En 0^- , la limite est $B - 1$ et en 0^+ , la limite est $D + 1$: $D = B - 2$.
- Egalité des limites de y'' en 0.
En 0^- , la limite est $-A$ et en 0^+ , la limite est $-A$ aussi compte tenu de $A = C$.

La solution générale sur $\mathbb{R}$ est donc :
$$\begin{cases} y = A \cos x + B \sin x - x & \text{pour } x \in]-\infty, 0] \\ y = A \cos x + (B - 2) \sin x + x & \text{pour } x \in [0, +\infty[\end{cases}$$

Cette fonction est bien de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

3 Equations Différentielles non Linéaires du 1^{er} ordre

3-1 Equation différentielle du premier ordre

Définition : Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, continue sur $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Une **équation différentielle du premier ordre** est une équation du type :

$$y' = f(x, y) \quad (1)$$

Une solution de (1) est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I un intervalle de $\mathbb{R} : x \rightarrow y(x)$ telle que :

$$\forall x \in I, y'(x) = f(x, y(x))$$

Théorème : On utilise les notations de la définition précédente.

Si $(x_0, y_0) \in \mathcal{U}$, il existe, sous certaines conditions, un intervalle I et une solution unique sur $I : y$, vérifiant $y(x_0) = y_0$. Une telle solution permet de définir une **courbe intégrale de (1)**.

3-2 Equation différentielle du premier ordre à variables séparables

Définition : L'équation (1) est dite à variables séparables lorsque, en posant $y'(x) = \frac{dy}{dx}$, (1) peut se mettre sous la forme :

$$\varphi(x) dx = \psi(y) dy \quad (2)$$

Théorème : On obtient une courbe intégrale de (2) en primitivant chacun de ses membres. Soit, en tenant compte des conditions initiales :

$$\int_{x_0}^x \varphi(x) dx = \int_{y_0}^y \psi(y) dy$$

Ce qui entraîne, en appelant Φ et Ψ deux primitives respectives de φ et ψ :

$$\Phi(x) - \Phi(x_0) = \Psi(y) - \Psi(y_0)$$

En particulier, si l'équation (1) est incomplète, c'est à dire s'il manque x ou y , alors, elle est à variables séparables :

- Incomplète en x :
On a alors $y' = \varphi(y)$ d'où $\frac{dy}{\varphi(y)} = dx$ sur un intervalle où φ ne s'annule pas.
On obtient x comme fonction de y .
- Incomplète en y :
On a alors $y' = \psi(x)$ d'où $dy = \psi(x) dx$. On obtient y comme fonction de x .

3-3 Système autonome de 2 équations différentielles

Définition :
$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \varphi(x,y) \\ \frac{dy}{dt} &= \psi(x,y) \end{aligned} \right\} \text{ avec } \varphi \text{ et } \psi \text{ continues sur } \mathcal{U} \text{ un ouvert de } \mathbb{R}^2,$$

est un **système autonome** de deux équations différentielles.

Une solution est appelée **trajectoire** du système autonome.

a) Système autonome et équation différentielle

- On peut transformer un système autonome en équation différentielle classique $\frac{dy}{dx} = \frac{\psi(x,y)}{\varphi(x,y)}$
Cela revient à faire disparaître « t »
- Réciproquement, une équation différentielle $\frac{dy}{dx} = \frac{\psi(x,y)}{\varphi(x,y)}$ peut se transformer en système autonome en « ajoutant » du temps « t »... Le tout est de bien choisir les deux fonctions φ et ψ de façon à savoir intégrer le système autonome. On aura ainsi les trajectoires du système qui sont les courbes intégrales de l'équation différentielle en paramétriques.

b) Exemple

Soit l'équation différentielle $y' = \frac{1+y}{2x+y}$, on pose
$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 2x+y \\ \frac{dy}{dt} &= 1+y \end{aligned} \right.$$

Il est facile d'intégrer cette dernière équation, cela donne : $y = \lambda e^t - 1$, valeur que l'on reporte dans la première : $\frac{dx}{dt} = 2x + \lambda e^t - 1$.

Il est encore facile d'intégrer cette équation, cela donne cette fois : $x = \mu e^t - \lambda e^t + \frac{1}{2}$.

Finalement, on a les courbes intégrales en paramétriques :
$$\begin{cases} x = \mu e^t - \lambda e^t + \frac{1}{2} \\ y = \lambda e^t - 1 \end{cases}$$

c) Intégration d'un système autonome

- Si l'une des deux est une équation différentielle, on l'intègre et on reporte dans l'autre
- On peut aussi essayer de l'intégrer en passant en complexes, $z = x + iy$, en polaires ou par un autre changement de variable en suivant les indications de l'énoncé.

4 Solutions Approchées d'une Equation Différentielle

4-1 Méthode d'Euler pour une équation différentielle du premier ordre

Le principe de la méthode d'Euler est très simple. On va l'appliquer à une équation différentielle du premier ordre :

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= f(x,y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned}$$

On cherche une solution approchée vérifiant la condition initiale. Pour cela, on choisit un pas Δx , on écrit :

$$\Delta y = f(x_0, y_0) \times \Delta x$$

et on approxime : $y(x_0 + \Delta x) \simeq y(x_0) + \Delta y$.

On pose alors :

$$x_1 = x_0 + \Delta x$$

$$y_1 = y_0 + \Delta y$$

Ensuite, on calcule : $\Delta y = f(x_1, y_1) \times \Delta x$,
et on pose :

$$x_2 = x_1 + \Delta x$$

$$y_2 = y_1 + \Delta y$$

On recommence jusqu'à avoir une solution approchée sur l'intervalle désiré.

4-2 Autres équations différentielles

La méthode d'Euler est applicable aux autres équations différentielles et systèmes différentiels.
Avec, par exemple, une équation différentielle du second ordre :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$$

$$y(x_0) = y_0$$

$$\frac{dy}{dx}(x_0) = y'_0$$

On choisit Δx , avec les approximations, on pose :
$$\begin{cases} x_1 = x_0 + \Delta x \\ y_1 = y_0 + y'_0 \times \Delta x \\ y'_1 = y'_0 + f(x_0, y_0, y'_0) \times \Delta x \end{cases}$$

On recommence ensuite à partir de x_1, y_1 et y'_1 ... pour calculer x_2, y_2 et y'_2 ...

4-3 Problèmes de la méthode

La méthode d'Euler a l'avantage de toujours être applicable.

L'inconvénient essentiel est dû à l'accumulation des erreurs qui peuvent faire que, rapidement, la fonction calculée point par point n'a plus de rapport avec la solution cherchée.

Géométriquement, il est facile d'observer que si les courbes intégrales ont de fortes courbures en certains points, la méthode dérive vite et donne des courbes sans rapport avec les courbes intégrales.

Par ailleurs, un petit pas allonge les calculs et un grand pas augmente les erreurs...

5 Compléments

5-1 Avec Maple

a) Solutions exactes

C'est la fonction « `dsolve` » permet de résoudre les équations différentielles ou les systèmes d'équations différentielles avec ou sans conditions initiales. Attention, le résultat est parfois déroutant.

Donnons quelques syntaxes :

- Sans condition initiale :
> `dsolve(2*diff(y(x), x)+y(x)=cos(x), y(x));`
- Avec condition initiale :
> `dsolve({2*diff(y(x), x)+y(x)=cos(x), y(0)=0}, y(x));`
- Pour un système (auquel on pourrait inclure des conditions initiales) :
> `dsolve({diff(x(t), t)=-y(t), diff(y(t), t)=x(t)}, {x(t), y(t)});`

Cette fonction donne simplement l'équation des courbes intégrales (qu'elle a déterminées). Si on veut récupérer les solutions dans une expression, il faut utiliser la fonction de substitution comme dans l'exemple suivant :

```
> Solution:=dsolve(2*diff(y(x), x)+y(x)=cos(x), y(x));
> s:=subs(Solution, y(x));
```

b) Représentation des courbes intégrales

Dans le package « DEtools », la fonction « DEplot » permet de représenter les solutions d'une équation différentielle. Il s'agit du graphe de solutions approchées.

```
> DEplot(2*diff(y(x),x)+y(x)=cos(x), [x,y], -5..5, {[0,1],[0,2],[0,5]});
```

On trouve dans l'ordre, l'équation différentielle, les axes en commençant par la variable, l'intervalle de variation de la variable et la liste des conditions initiales.

c) Solutions approchées d'une équation différentielle

Pour une équation ou un système différentiel avec conditions initiales, c'est l'option « numeric » de « dsolve » qui permet de demander une solution approchée. Les conditions initiales doivent être telles qu'il n'y a plus de constante d'intégration ! Donnons un exemple :

```
> Solution:=dsolve({2*diff(y(x),x)+y(x)=cos(x), y(0)=0}, y(x), numeric);
```

```
> Solution(2);
```

Il faut bien sûr demander la valeur d'une solution en un point !

5-2 Pour les physiciens

On notera la différence essentielle de vocabulaire entre mathématiciens et physiciens dans le traitement des équations différentielles linéaires.

Mathématiques	Physique
Solution particulière de l'équation différentielle avec second membre	Régime permanent
Solution générale de l'équation différentielle sans second membre	Régime transitoire

Il n'y a pas d'erreur, le vocabulaire des physiciens vient de ce que, très souvent, la solution générale de l'équation sans second membre tend rapidement vers 0...

Il ne reste alors que la solution particulière de l'équation avec second membre... qui est bien le régime permanent !

Rappelons enfin qu'en physique, comme ailleurs, on ne calcule que ce qui nous intéresse.

5-3 Les mathématiciens du chapitre

Riccati Jacopo 1676-1754 Mathématicien italien connu pour ses travaux sur les équations différentielles et le calcul intégral.

Bernoulli Jean 1667-1748 Mathématicien suisse, connu pour ses travaux sur la trigonométrie et l'étude du Logarithme, les équations différentielles...

Bernoulli Daniel 1700-1782 Fils du précédent, initiateur, entre autres des équations aux dérivées partielles.

Euler Léonard 1707-1783 Toujours Euler...